热工测量

华北电力学院
何适生　胡茗显　谢积宝

电力工业出版社

热　工　测　量

华　北　电　力　学　院
何适生　胡茗显　谢积宝

电　力　工　业　出　版　社

前　　言

本书是根据原水电部1978年4月召开的“热工测量与自动化专业教学计划和教材会议”的决定编写的，作为本专业“热工测量”课程的教材。全书着重阐述热工测量技术方面的理论和知识，传感器的原理与使用以及测量过程中的误差分析等。对于通用的显示仪表，则仅作简要介绍。

书中提供了某些传感器的计算方法和图表（例如根据国际建议规范和国标草案编写的节流装置计算用图表），便于读者查用，也可供实际工程设计计算时参考。为了帮助读者学习，书后附有一些习题。

全书由华北电力学院热自教研室何适生(主编)、胡茗显和谢积宝编写。书稿经南京工学院龚家彪副教授全面审阅，提出了建议和意见，并得到其他一些同志评阅，在此一并致谢。

由于编者水平所限，不妥及错误之处恳请读者批评指正。

编　者

1980年5月

目　　录

绪　　论

一

测量技术是指按照被测对象的特点，采用某种方法和仪器获取被测量数值的全过程。只有通过测量才能获得表征物理或化学现象和过程的定量信息。因此各行各业都有自己的测量技术问题。

测量工作的主要任务是：取得工艺过程参数的信号，作为控制生产过程的依据；为科学研究、产品的检查和设备维护提供技术数据；以及对产品数量进行核算等。所以，为了搞好现代化企业的质量管理工作，必须装置成套的测量设备，配备相应的人员，研究测量手段，以保证获得可靠的测量信号和数据。随着企业规模的扩大和专业化、标准化的普及以及技术的日益复杂，生产中“测点”和数据的数量不断增多。因此，测量工作本身的自动化是十分重要的。

国民经济各部门的生产虽然是千差万别，但需要测量的参数可归结为并不太多的若干种类。一般说来，被测参数有长度、时间、压力、质量等力学量；温度、热量等热学量；电流、电压和磁场强度等电磁量；以及光学量、声学量和化学成分等等。上述各种参数并无行业、部门的界限，如“温度”在电力、化工、冶金、农业和医药等部门中都是重要参数。所以，通用性是测量技术的一个特点。由于被测对象的不同和测量条件的差异，尽管是同一种参数，其测量方法、设备和系统也就不能完全一样。如温度参数，就可能属于物体表面温度，火焰温度，高速气流温度等不同的测量对象；有高温，中温，低温等不同的测量范围；还有精密测量和一般测量这样一些不同的精度要求等等。在测量工作中必须根据不同的情况，具体分析，区别对待，这是测量技术的又一个特点。

测量技术的发展引起测量技术工作专业化分工的问题，当前世界各国的专业化分工在体制上不尽相同，就我国而言，大致分为计量、仪器制造和应用三个方面。当然，这三方面是紧密联系相互促进的。

计量主要是研究基本物理量的单位，研制并保存基准器和标准器，传递量值，统一国内的计量单位，研究测量方法，监督仪器的质量，以及参与国际计量的有关工作；仪器制造的主要任务是供应定型的仪器，研制新仪器，为测量工作提供物质基础；应用是指使用部门在生产和科研中组织测试，取得技术数据。

为了提高应用测量技术的水平，在大的生产部门或企业中，往往设有专门从事测量工作的机构来设计测量系统，改进测量方法，校验和维修仪器，例如电厂的热工室就是这样的机构。某些国家的仪器制造厂，除制造仪器外，还承担设计测量系统，维修仪器和技术咨询等工作。仪器制造厂直接参与具体测量工作，能够更好地体会用户的要求，制造和使用的这种结合对研制新仪器、改进产品和提高用户的测量技术水平是有很大好处的。

二

在火力发电厂的生产中，热工测量是热力过程控制系统的一个组成部分。热力过程控制系统示意框图如图0-1所示。从图中可以看出，热工测量在控制系统中具有重要地位，其质量的好坏直接影响着自动控制的水平。

电厂热力过程的被测参数一般有温度、压力、流量、料位和成分，还需测量转速、机械位移和振动等。汽机、锅炉的热力试验常常还要测量流速、热量及应力等。图 0-2 是锅炉的部分测量系统示意图。一台二十万千瓦的机组，其测点约有550～600个，各种仪表达百块以上。

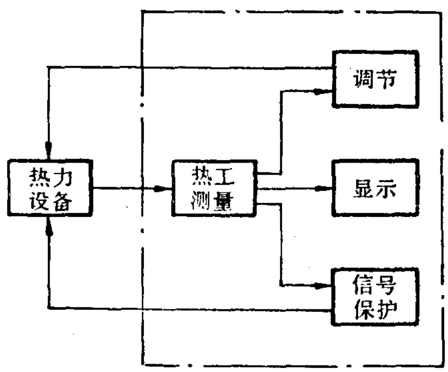

图 0-1 热力过程控制系统示意框图

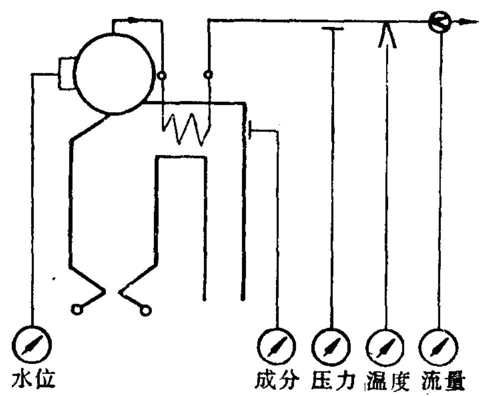

图 0-2 锅炉的部分测量系统示意图

热工测量系统在设计和安装时，应正确地选择测点和仪表，以达到系统合理、投资少、便于维护的要求。运行中应保证整个测量系统经常处于投入状态，能正确而及时地反映热力设备的运行情况，并改善运行人员的劳动条件。因此，从事热工测量工作的技术人员必须充分熟悉热工仪表和测量系统，掌握测量方法，对热力设备（即被测对象）的结构和性能也要有一定的了解。

根据上述的要求和电厂热力过程自动化专业的培养目标，本书的内容是讲述火电厂热工参数的测量基本理论与方法，传感器的原理和性能，仪表的选用和测点的选择原则，测量系统的组成与误差分析，仪表的分度校验和维护以及计量的某些知识等。这些内容涉及面很广，显然，书中只能通过介绍典型的测量方法和仪表，以期读者能收到举一反三的效果，从而在各种实际的测量任务中，尽管对象特性不同，仪表品种繁多和不断更新，也能运用基础理论和专业知识来分析和解决测量问题。

第一章 测 量 概 论

第一节 测量的概念和方法

一、测量的概念

所谓测量，就是用实验方法，把要定量的参数（称为被测量）与定义其数值为1的同类量（称为测量单位）进行比较，求取二者比值，从而得到被测量的量值(比值乘单位)。设被测量为X，其单位为U_X，二者的比值为a，即$X/U_X \approx a$。所以，被测参数的量值为

$$X \approx aU_X \qquad (1\text{-}1)$$

式（1-1）不用等号是考虑到测量结果aU_X有误差，只能近似等于被测量X。通常称式（1-1）为测量的基本方程式。由上述过程可以看出，进行测量要建立单位，确定实验方法和测量设备，并最后估计出结果的误差。

1.测量单位

单位是人为定义的，起初规定时带有“任意”性，因此同种量曾经有过许多单位，使得想对不同单位的同种量的测量结果进行比较时，需要经过换算。现在，由于推行国际单位制（SI），单位的统一已初步实现了。

为了进行测量，仅有单位的定义还不够，还要有复现单位定义的全部信息的实物信号，才能用来参与比较。但是由于认识、技术和方法上不够完善等原因，单位的实物信号的实际值和名义值之间，或大或小的有所差别，这是aU_X不完全等于真实值X的原因之一。

2.测量设备

被测量与其单位用实验方法比较，需要一定的设备。它输入被测量，输出被测量与单位的比值，这种测量设备叫做仪表。

各种仪表不论其采用的原理和结构如何不同，都是使被测量和单位在其中进行一次或多次信号形式（能量形式）的转换、传递和比较。这整个过程中信号不失真也不受到干扰是极困难的，这是aU_X不能等于真实值X的又一原因。

3.误差

如上所述，测量过程不可避免地要发生信息损失，使测量结果出现误差。测量技术的主要任务之一，就是减小这个误差。由于对仪表的结构原理、材料及加工工艺和测量方法等方面都经过很多的研究，甚至对使用者的心理和生理特征也有所考虑，因此现在有许多高级仪表可以精确显示本身所感受到的参数。但是，仪表所感受到的参数与被测对象的实际参数是否一致，是极重要的问题，制造厂不可能保证这个一致性，因为使用条件和对象特性对测量结果会有很大影响，制造厂并不一一预知，这是一个很大的误差来源。此外，

测量中总存在外界的干扰，如环境温度、湿度和压力的变化，震动、杂散电磁场的作用等，制造厂仅能考虑部分防护，这会增大仪表的误差。因此，不要认为高级仪器就一定能给出可靠的测量结果。

二、测量的基本方法

测量方法就是如何实现被测量与单位比较的方法。这些方法既可用于仪表设计中，也可以用于使用仪表的测量过程中。

一般说来，被测参数随时都在变化，生产工艺中的参数尤其如此。使得过程检测原则上都是动态测量，即要想重复取得同一数据是不可能的。但是当参数变动很缓慢，测量进行得又相对很快时，可以近似重复取得同一数据，即认为测量过程中量值稳定不变，这是所谓静态测量。本书中主要介绍静态测量方法，并且只涉及对象的局部参数（近似一点的参数）测量，没有介绍参数场的测量方法。

测量方法从不同的角度看，可以有多种分类。

1.直接测量法和间接测量法

按照得到测量结果的程序，分为：

（1）直接测量法：从实测数据中直接得到被测量值，无需进行函数关系的再运算的测量方法称为直接测量法。例如用直尺量长度，温度计量温度等。

（2）间接测量法：通过直接测量与被测量有已知关系的各个量，在此基础上求出被测量值的方法叫间接测量法。例如求某种导线的电阻率ρ，可以取一段导线直接测量其长度l、直径d和电阻R，然后按关系式$\rho=\pi d^2R/4l$计算出ρ。

2.接触测量方法和非接触测量方法

按照仪表是否与被测对象接触，分为：

（1）接触测量方法：仪表的一部分（传感器）与被测对象接触，并承受对象的参数的作用，才能给出结果的测量方法。例如用弹性压力计测量介质压力时，弹性元件将受到介质同样的压力作用。又如玻璃管液体温度计测温时，其温包应达到被测对象的温度。

（2）非接触测量方法：仪表的传感器不必直接与对象接触而给出测量结果的测量方法。例如用光学高温计测量温度。这种方法有一些独特的优点，如测量运动对象的参数就较方便。

3.偏位测量法和差示测量法

（1）偏位测量法：被测量作用于仪表的比较装置（测量机构），使它的某种参数按已知关系变化，当这种变化产生的反作用与被测量的作用平衡时，则测量机构此参数的变化(作为输出)即可“显示”被测量。例如压力计的弹簧管承受压力后发生形变，此形变经过事先分度等价于某个压力，所以可把弹性变形作为输出来显示作用的压力。一般说来这种方法为了有足够灵敏的输出信号要消耗被测对象较多的能量。

（2）差示测量法：被测量对仪表比较装置（测量机构）的作用，由已知量部分或全部抵消，测量机构的输出是已知量和被测量二者的差值或零，由已知量得出被测量。例如天平和平衡电桥等就是按这种方法测量的。这种方法比偏位法要精确，但设备也复杂得多。

第二节　仪表的组成及分类

一、仪表的组成

无论简单仪表还是复杂仪表，就其部件在处理被测量时的功能而言，可看成由传感器、变换器和显示装置三个环节组成，它们之间用信号线路或信号管路联系起来。各环节可以分成许多部件，也可以组合在一个整体中。对一些简单仪器，上述环节的界线可能不易明确划分。

1.传感器

传感器的作用是感受被测量的大小后输出一个相应的信号。它是仪表与被测对象直接发生联系的部分。因为传感器要从对象提取被测量的信息，向以后各环节提供原始信号，所以它能否准确快速地给出信号，很大程度上决定了整个仪表的测量质量。对传感器的要求如下：

（1）按被测量的输入大小，传感器相应发生一个可"观测"的参数变化作为输出，且此输出与输入之间有稳定的单值函数关系。这种函数关系能按一定的工艺准确复现。

（2）非被测量对传感器作用时，对输出的影响应小得可以忽略。所以在寻求传感器所依据的物理现象时，总是希望此现象对被测量的反应特别灵敏，对其它参数的作用反应很小，以致可以忽略。若不能忽略，则应能对影响采取补偿、修正等措施。

（3）在测量过程中，传感器应尽量少地消耗被测对象的能量，并且对于对象的状态没有干扰或干扰极小。非接触测量仪表的传感器能满足这一要求。

传感器也曾称为敏感元件、一次元件或发送器等等。

2.变换器

为了将传感器的输出进行远距离传送、放大、线性化或变成统一信号等，需要用变换器来对传感器的输出作必要的加工处理。如压力表中的杠杆齿轮机构就是将弹性元件的小变形转换成指针在标尺上的转动；节流式流量计中装置开方器以得到线性化输出；电动单元组合仪表的毫伏变送器可将热电势转换成0～10毫安的信号等，这些都是变换器的例子。变换器处理输入信号时，应该使信息损失最小，也就是使误差最小。有时变换器就是传感器，例如压力测量中的位移变换器，在测量距离和位移时就是传感器了。

3.显示装置

显示装置的作用是向观察者显示被测参数的数值和量值。显示可以是瞬时量指示，累积量指示，越限或极限指示（报警），也可以是相应的记录。有时甚至带调节功能去控制生产过程。显示装置（仪表）也曾称为二次仪表。

由于显示装置是人和仪表联系的主要环节，因此，它的结构应使使用者便于读出数据，并能防止读者的主观误差，数字显示一般就比模拟显示易于减小读数的主观误差。

显示装置现在有模拟式、数字式和屏幕式三种。

（1）模拟式显示：最常见的结构是指示器在标尺上移动，连续指示被测量。一般说这是按主观方式读数，读数的最低位总是由读数者估计。模拟显示设备结构简单，价格低

廉，目前还是主要的显示形式。记录时则是以曲线形式给出数据。

（2）数字式显示：直接以数字给出被测量值，所以不会有视差。记录时亦可打印出数据。由于这种显示的明显优点，在测量中越来越多的被采用。但是这种显示的直观形象性较差。

（3）屏幕显示：这是电视技术在测量显示上的应用，是目前最先进的显示方式。它既能按模拟式给出曲线，也能给出数字，或两者同时显示。屏幕显示具有形象性和易于读数的优点，并能同时在屏幕上显示大量数据（一种参数或数种参数），有利于比较判断。

4.传输通道

仪表各环节的输入和输出信号之间的联系要经过传输通道，传输通道可能是导线、管道、光导管或无线电通讯等形式。信号传输通道比较简单，所以往往被人忽视。实际上，不按规定要求布置和选择传输通道而造成信号失真、信息损失和引入干扰的例子是很多的，严重时根本无法进行测量。例如传输电量时，如果导线的阻抗不匹配，可能导致仪表灵敏度降低，电压或电流信号失真，甚至信号送不进仪表里去。

二、热工仪表的分类

热工仪表是过程检测控制仪表中测量热工参数的一大类，它又有如下分类：

1.按被测参数分类

按热力过程的被测参数分类，有压力仪表、流量仪表、温度仪表、料位仪表及成分分析仪表等。

2.按仪表的显示功能分类

按显示功能分类，仪表可分为指示仪、记录仪、积算仪、盲式仪表（无显示，只发信号）和调节仪表等。一块仪表可能同时具有多种显示功能，例如指示记录仪就同时有两种功能。

3.按仪表各变换环节组成的系统分类

仪表中各变换环节按照什么系统联接（开环还是闭环），使得各组成环节的误差对整个仪表的误差的影响是不同的，从这个角度分类，可分为：

（1）直接变换式仪表：这种仪表的各个变换环节按开环联接，即信号从输入到输出是经过串联的各变换环节沿一个方向传递。图 1-1 所示为其方框图。若各环节的转换系数（即灵敏度）分别为K_1、K_2……，则仪表输出和输入的关系为

$$\varphi=K_1K_2K_3K_4X \tag{1-2}$$

可见直接变换式仪表中每个变换环节的误差都将影响输出，所以这种仪表的误差较大。

（2）平衡式仪表：平衡式仪表按差示测量法工作，采用了闭环测量系统，例如电子电位差计。闭环测量系统的方框图示于图 1-2。从图中可见这是由直接变换部分和反变换

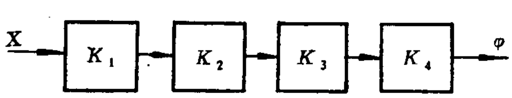

图 1-1 直接变换式仪表信号传递方框图

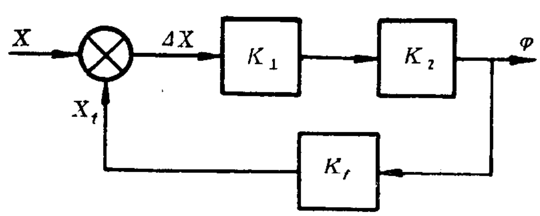

图 1-2 闭环测量系统方框图

（反馈）部分组成的系统。所以输出和输入的关系为

$$\varphi=\frac{K_1K_2}{1+K_1K_2K_f}X \tag{1-3}$$

式中K_f为反馈系数。一般有$K_1K_2\geqslant1$，所以上式可变为

$$\varphi\approx\frac{1}{K_f}X \tag{1-4}$$

可见，只要K_f精确和稳定，则可保证仪表的精度，从而消除了很大一部分环节的变换误差。所以平衡式仪表可以达到较高的测量精确度，但其结构也较复杂。平衡式仪表按其有无积分环节可分为无差式平衡仪表（如电子自动平衡电桥和电位差计等）和有差式平衡仪表（如DDZ-II型中的毫伏变送器及力平衡压力变送器等）。

第三节　测量技术的误差

一、概述

1.测量误差的概念

在测量技术中，由于测量方法的不完善，测量工具的不精确，测量过程中条件的波动，测量者知识、经验的限制以及操作不当等原因，不可避免地造成测量结果与被测量的真实值之间存在一定的差值，这个差值称为测量真误差（简称误差），用δ表示。其值为

$$\delta=x-x_0 \tag{1-5}$$

式中　x——测量结果（如仪表指示值），称为测量值；

x_0——测量时被测量的真实量值，称为真实值或真值。

测量误差δ或大或小，有正有负，δ为正时表示测量值比真实值大，δ为负时表示测量值比真实值小。

2.测量误差的分类

根据测量误差的性质不同，测量误差可分三类：

（1）系统误差：在相同条件下多次测量同一量时，误差的大小和符号保持恒定，或按照一定规律变化，这种误差称作系统误差（亦称规律误差）。系统误差一般可以通过实验或分析的方法，查明其变化的规律及产生的原因，并能在确定了它的数值大小和方向后，对测量结果进行修正。或在新的测量前，采取一定的措施，改善测量条件，改进测量方法，从而使误差减小或排除。系统误差的大小决定测量结果的“准确度”，因为它的存在歪曲了测量结果的真实面目。所以系统误差的发现和消除，对一切测量均具有很重要的意义。

（2）偶然误差：在相同条件下多次测量同一量时，误差的大小、符号均无规律，也不能事前估计。这类误差的产生是由于测量过程中偶然原因引起的，故称偶然误差。偶然误差不能用实验的方法消除，但在多次重复测量时，其总体服从统计规律，从偶然误差的统计规律中可以了解偶然误差的分布情况，并能对偶然误差作出估计。偶然误差的大小决定测量结果的“精密度”，即同一量的多次测量值相互间的接近程度。

（3）粗大误差：明显地歪曲了测量结果的误差称为粗大误差，简称粗差。这种误差是由于测量者对设备性能和环境认识不足，或因疲劳、思想不集中，甚至粗心大意导致不正确的行动而引起的。测量条件的突然变化亦会引起粗差。对应粗差的测量值称为坏值，没有剔除坏值的测量结果是不能采用的，因为这样的测量结果会导致错误的结论。加强测量者的责任心和使他们接受足够的技术训练可以减少粗差的出现，出现粗差后要及时分析和剔除。

以上三种误差对测量的影响可以从图1-3中清楚地看出。图中x_0为真值，$\bar{x}$为多次测量值的平均值，黑点表示每次测量所得的数值。从图中可以看出：（a）图表示偶然误差小，系统误差大，说明测量的精密度高而准确度低；（b）图表示偶然误差大，系统误差小，说明测量的精密度低而准确度高；(c)图表示除去一个坏值x_k以外偶然误差和系统误差都小，说明测量的精密度和准确度都高。把（c）图中除去坏值后的测量结果看做是较精确的测量结果。把精密度和准确度合起来称为精确度，它能较全面地说明测量和仪表的质量。

但是实际测量过程只是设法接近真值，所以在不知真值的情况下不可能分清测量的精密性和准确性，只能笼统地称为测量值的不确定性。对于上述三类误差，必须加以处理，以便得到尽可能正确的测量结果，即尽可能准确地从一系列测量值中判断出最接近真值的数值，并估计出这个判断可能具有的误差界限。那么怎样才能知道测量值中有无疏忽误差和系统误差存在，以及偶然误差的大小呢？在统计和概率理论的基础上建立的误差理论可以用来指导对测量值的数据处理。

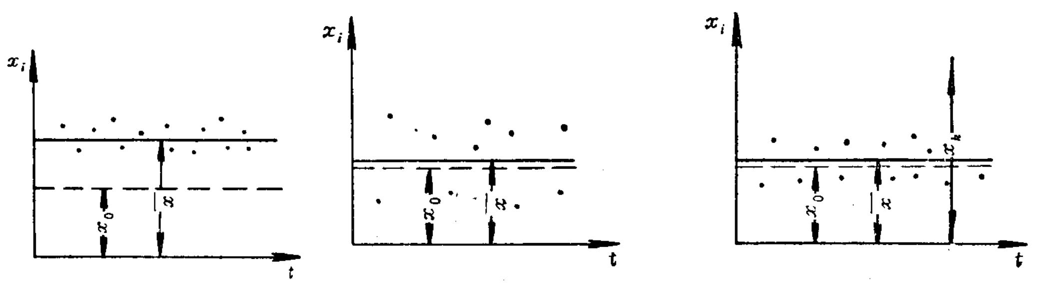

图 1-3　三种误差对测量的影响

希望运用误差理论来解决下列问题：

（1）判断一组测量值是否符合随机测量过程，如符合其偶然误差一般应属于正态分布，若不属于正态分布则可能存在系统误差。可以在具体分析得到各测量值的条件下，找出系统误差及产生系统误差的原因。

（2）判断一组测量值中是否存在疏忽误差。

（3）对经上述处理后的测量数据，判断其最佳值及最佳值的误差界限。

二、偶然误差

在相同条件下对同一被测量进行多次重复测量，称作等精度测量。在消除或改正系统误差之后，一列等精度的测量值仍会由于随机因素的影响而有差异。如果这种多次测量的各值之间没有差别，只能表明所用测量手段的灵敏度或分辨率不够，并非没有随机误差。

随机误差的出现，从表面上看是毫无规律纯属偶然的，故随机误差亦称为偶然误差。但是，就其总体来说，偶然误差的出现服从统计规律，利用数理统计的理论和方法，可以掌握大量数据中存在的偶然误差的若干规律，确定偶然误差对测量结果的影响，并可通过对测量数据的适当处理，来正确估计偶然误差的大小。

1.正态分布

对某量进行一系列等精度测量，得到测量值及其出现的次数如表1-1。总测量次数$n=150$，表中测量值由小至大排列，并取间隔值$\Delta x=0.01$，将150次测量值分成11组，每组中心值为x_i。如表中测量值7.32出现3次，代表测量值界于7.315与7.325之间出现的次数为3，每组中心值出现的次数与总次数之比称作频率。在直角坐标上画出频率与测量值的关系曲线称作测量值的频率直方图，如图1-4所示。

表 1-1 测量值记录表

分组	测量值 x_i	出现次数 n_i	频率 n_i/n	分组	测量值 x_i	出现次数 n_i	频率 n_i/n
1	7.31	1	0.007	7	7.37	29	0.193
2	7.32	3	0.020	8	7.38	17	0.113
3	7.33	8	0.058	9	7.39	9	0.060
4	7.34	18	0.120	10	7.40	2	0.013
5	7.35	28	0.187	11	7.41	1	0.007
6	7.36	34	0.227				

频率直方图的高度与间隔值Δx有关，Δx愈大，则高度愈高。为了避免这一缺点，将n_i/n除以Δx再作图，图形的高度将与Δx无关。如$n\to\infty$令$\Delta x\to 0$，并令

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{n_i}{n}\times\frac{1}{\Delta x}=\frac{1}{n}\times\frac{dn}{dx} \qquad (1\text{-}6)$$

则$f(x)$-x的图形如图1-5所示。$f(x)$称作测量值的概率分布密度，显然$f(x)dx$即为曲线下的阴影面积，它表示在x_i和x_i+dx之间的测量值出现的概率。实践与理论证明，只存在

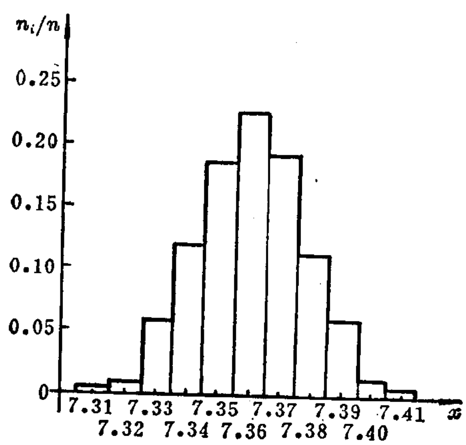

图 1-4 测量值的频率直方图

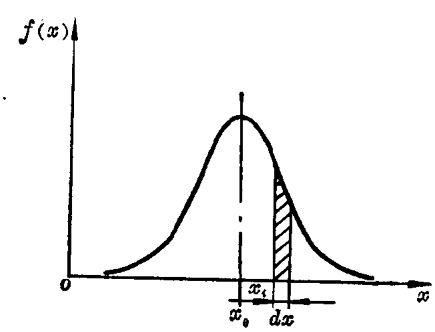

图 1-5 测量值的概率分布密度曲线

偶然误差的测量值一般是遵循正态分布的。因此图 1-5 所示曲线可看作是正态分布曲线。该曲线的函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1\text{-}7)$$

如果x_0和σ的值规定以后，则正态分布的分布密度就确定了，所以x_0和σ也叫正态分布的特征数。分布密度曲线对称于直线$x=x_0$，并在$x=x_0$处达到极大值，在$x=x_0\pm\sigma$处有拐点，以x轴为渐近线。用误差$\delta=x-x_0$代入上式，并将$e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}$写成$\exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right)$，得

$$f(\delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\delta^2}{2\sigma^2}\right)$$

上式又称为高斯公式，其图形如图1-6所示。

式中σ称为标准偏差，其定义式如下：

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)^2} \qquad (1\text{-}8)$$

上式表明偶然误差的平方和除以测量次数开方取极限即可得到标准偏差。根据定义，σ又称为均方根误差。

如给出误差区间$[a,b]$，则偶然误差δ在区间$[a,b]$内出现的概率为

$$P\{a<\delta<b\}=\int_a^b f(\delta)d\delta \qquad (1\text{-}9)$$

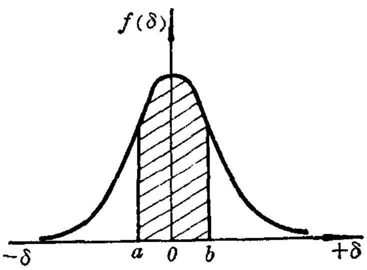

图 1-6　偶然误差的概率密度分布曲线

即等于图 1-6 中阴影部分的面积。因为$-\infty<\delta<\infty$是必然事件，显然有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\delta)d\delta=1$$

由图 1-6 可看出，按正态分布的偶然误差有下列几个特性：

（1）误差可正、可负，绝对值相等的正误差和负误差出现的概率相同，即δ对于纵坐标对称分布，因而全体误差的代数和$\Sigma\delta=0$；

（2）绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的概率大，等于零的误差其概率密度具有最大值；

（3）绝对值很大的误差出现的概率近于零，即可以认为偶然误差值有一定的实际极限。

上述的特性，有时也称为偶然误差的公理。

偶然误差服从正态分布，可以用概率论的中心极限定理来说明，该定理用于偶然误差这种随机变量时可解释为：由大量独立随机因素引起的测量值的偶然误差，若各独立因素造成的误差相对于结果的偶然误差极其微小，则可认为偶然误差实际上是服从正态分布的。

还发现有些误差并不服从正态分布，例如读数或计算中的凑整误差，数字显示的末位±1误差，它们在误差区间内的分布密度各处相同，所以是属于均匀分布；由于度盘偏心引起角度测量的误差服从反正弦分布。

2.正态分布的统计性质

（1）数学期望：对于其分布密度服从正态分布的测量值x，落在（$x \sim x+\Delta x$）内的概率近似为$f(x)\Delta x$，所以一列等精度测量值的数学期望可写成下式

$$M(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2} dx = x_0 \qquad (1\text{-}10)$$

上式的意义为：数学期望是随机变量（测量值）的概率分布的平均数，也就是把变量的所有可能值乘以各个可能值所分别具有的概率的总和。可以根据一列n次等精度测量所得到的结果x_1，x_2，…，x_i，…，x_n来估计真值x_0。从频率直方图（图1-4）可以看出真值x_0的最可能值就是诸x_i的算术平均值：

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_i+\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1\text{-}11)$$

$\bar{x}$表示有限个测量值的平均，它在x_0附近摆动，当n为无穷大时，$\bar{x}$会依概率收敛于x_0，我们把$\bar{x}$称作x_0的无偏估计，即x_0的最佳估计值。

（2）标准偏差（均方根误差）：由标准偏差σ的基本定义式（1-8）可见，它是以真误差$\delta=x-x_0$来定义的，并要求测量次数$n\to\infty$和知道x_0值，实际所知道的仅仅是有限次等精度测量值及依此所求得的最佳估计值$\bar{x}$，所以在计算σ时是用$\bar{x}$代替x_0，用$x_i-\bar{x}=v_i$（叫做剩余误差）代替δ。显然根据算术平均值$\bar{x}$的基本定义式（1-11），不论n为何值，都有

$$\sum_{i=1}^{n} v_i=\sum_{i=1}^{n} x_i-\bar{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i-\sum_{i=1}^{n}\bar{x}=n\bar{x}-n\bar{x}=0 \qquad (1\text{-}12)$$

在计算σ时，用v_i^2代替δ^2，要考虑到虽然一共有n个剩余误差，但由于$\Sigma v_i=0$关系的约束，只有$n-1$个剩余误差是独立量（即n-1个自由度），因为余下的一个剩余误差可由$\Sigma v_i=0$关系式确定。这意味着余下的这一剩余误差并未提供前面（$n-1$）个剩余误差中所未包含的任何新信息。这样，当我们利用n个v_i^2值来估计σ^2值时，应该在求和之后除以$n-1$，而不是除以n，所以便得到下式

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \qquad (1\text{-}13)$$

上式称作贝塞尔公式，当$n\to\infty$时，$\bar{x}\to x_0$，$(n-1)\to n$，可见贝塞尔公式与σ的原始定义式完全一致。不过，利用上式计算时，n为有限值，所以计算出的结果是σ的估计值，用符号$\hat{\sigma}$来表示。

应该注意，在以标准表对直接测量仪表进行检定或校验时，把标准表的示值（修正了的）作为约定真值x_0，这时计算标准偏差不用被校表读数的算术平均值$\bar{x}$，而用约定真值x_0，因此n次校验的自由度就是n，校验结果的标准偏差应按下式计算：

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)^2}$$

σ 的大小表征着各个测量值彼此间的分散程度。不同σ值的三条正态分布曲线如图1-7所示，由图可见，σ值愈小，则分布曲线愈瘦高，这意味着小误差出现的概率愈大，而大误差出现的概率愈小。因此可以用参数σ来表征测量的精密度，也就是说，σ愈小，测量值之间的差异越小，精密度愈高。但是也应指出，一列等精度测量值的σ不是其中任何一个测量值的误差，而是这一列测量值的标准偏差。在不同条件下进行的两列等精度测量，一般说来具有不同的σ值。

从几何角度来看，σ是概率分布密度曲线的拐点的横坐标。因为$d^2 f(\delta)/(d\delta)^2=0$的解恰好是$\delta=\pm\sigma$，如图1-8所示。

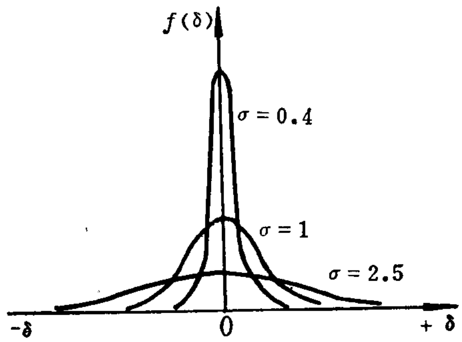

图 1-7　不同σ值的正态分布曲线

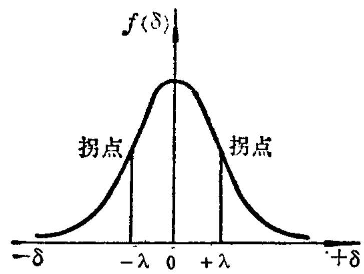

图 1-8　σ在正态分布曲线图上的位置

（3）概率积分：利用概率积分可求出在某一区间内的误差出现的概率。对于正态分布的偶然误差，一般取对称于x_0的区间[$-a$，a]来估计δ出现的概率，即求

$$P\{-a\leqslant\delta<a\}=P\{|\delta|\leqslant a\}=\int_{-a}^{a}f(\delta)d\delta=2\int_{0}^{a}f(\delta)d\delta \qquad (1\text{-}14)$$

因为偶然误差δ在某一区间内出现的概率与标准偏差σ的大小密切相关，故常把区间a取为σ的若干倍，即令

$$a=z\sigma$$

那么

$$z=\frac{a}{\sigma}$$

代入式（1-14），并以$f(\delta)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2}$代入，得

$$\phi(z)=P\{|\delta|\leqslant z\sigma\}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{z}e^{-\frac{z^2}{2}}dz \qquad (1\text{-}15)$$

$\phi(z)$称为概率积分值，它与z的关系如表1-2所示。

例如$z=1$（即$a=\sigma$），查表1-2得$\phi(z)\approx0.683$，也就是说，绝对值小于σ的偶然误差出现的概率是68.3%，换句话说，在一列等精度直接测量值中可能有68.3%的误差其数值落在$\pm\sigma$范围内，31.7%的误差在$\pm\sigma$范围外。即大约每3次测量中可能有一次测量值的误差大于σ。

同样可得出