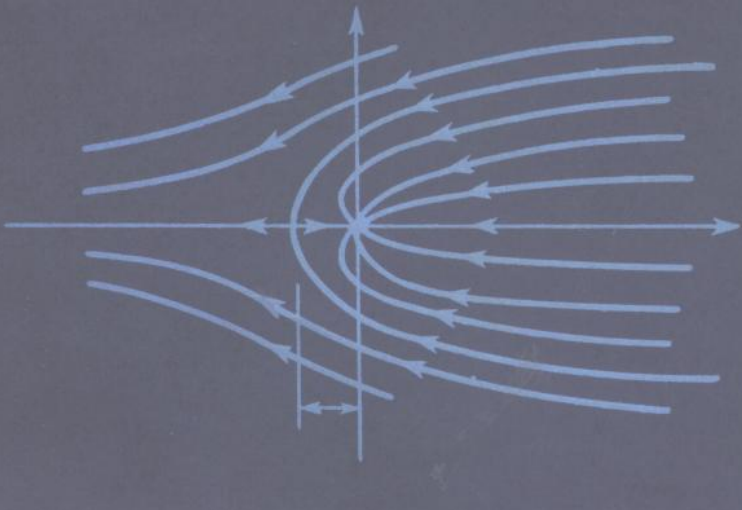
水力学中的微分方程及其应用

[美] 李 文 勋 (WEN—HSIUNG LI)



上海科学技术出版社

水力学中的微分方程及其应用

〔美〕李文勋 著

韩祖恒 郑开琪 译

上海科学技术出版社

水力学中的微分方程及其应用

〔美〕李文勋　著

韩祖恒　郑开琪　译

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 12.5　字数 273,000

1982年8月第1版　1982年8月第1次印刷

印数 1—6,200

统一书号：13119·994　定价：(科五) 1.40 元

Differential Equations of Hydraulic Transients, Dispersion, and Groundwater Flow

Mathematical Methods in Water Resources

By

WEN-HSIUNG LI

Prentice-Hall, Inc. 1972

序

这本书是按水利资源工程系研究生的应用数学与理论水力学课程的要求编写而成的．这样一门课程之所以显得必要，是因为对水利工程师和环境卫生工程师们来说，除了要通晓他们本专业规定的课程之外，也日益需要较深入地来了解有关诸如微分方程、系统分析以及水利资源方面的经济、社会和法律这样一些方面的问题．但实际上要将所有这些课程全部安排在一份培养理科硕士的教学大纲里又是不可能的．这样，就要求有一套较为行之有效的教学方法．本书就是试图将大学中学过的数学在水力学瞬态、扩散与弥散以及地下水流动问题等传统课程中的应用作简明扼要的介绍．

本书是以所用到的数学知识为线索统一起来的，而不只是这三方面问题的简单堆砌．之所以选择这三个方面的问题是因为这些素材中已概括了为达到预期水平所需要了解的大多数重要的微分方程和分析方法．另外将这些问题放在一起来进行介绍，还有可能就所论述到的微分方程的共性和相互关系作研究，而在分别介绍这些内容时，则往往会忽略这样一种统一的探讨．

阅读本书的学生要求学过二年到三年大学数学，并学过一门流体力学引论方面的课程．书中所用的数学方法都是可以在一般工程数学教科书中找到的．但本书为了避免经常翻阅这些教科书起见，对这些方法中的某些方法也作了简要复述．本书重点侧重于问题的理论探讨方面，但也相当充分地

解释了所涉及的物理现象．为使本书的篇幅适度，参考书中容易找到的说明性素材本书只作简要介绍．但读者仍可将这些素材作为必读的材料．

本书未包括计算机的数值解法和图解法，倒不是因为它们不重要，而是因为适当地来探讨这些问题，必将会大大增加本书的篇幅．为此本书只在适当的地方给感兴趣的读者列出些使用这些方法的参考书目．本书选择例题时尽量考虑能揭示解题的共同特性．这种知识无论是对准备进行数值求解或是图解，还是解释结果都会有所帮助．

第一章中，我们将通过对调压塔中振荡稳定性问题的研究来说明常微分方程的应用．第二章中则以河流中水质变化问题来介绍一阶拟线性偏微分方程，而且由于应用了特征方向，就将这种方程简化成了第一章中所用到的微分方程．

在第三章与第四章中用了特征方向之后，可将我们所研究的偏微分方程区分为双曲型方程，抛物型方程和椭圆型方程．双曲型方程将在第三章到第五章中用不同方法进行研究．第三章中，我们将用特征线法来研究象浅水流动问题中所涉及到的拟线性联立一阶偏微分方程组．第四章中则将用分离变量法来研究描述水库、明渠和潮汐河口振荡现象的线性两阶偏微分方程．这一章中还讨论了消元以后的变系数线性常微分方程的解答．第五章中将用拉普拉斯变换来研究水锤的瞬变现象．

在第六章中，还将再次应用第四章和第五章中所介绍的方法来求解扩散和弥散问题所涉及到的线性抛物型和双曲型微分方程．在这一章里也介绍了奇点法．第七章中讨论了地下水流动问题中所涉及到的非线性抛物型和椭圆型微分方程．第八章则用保角映射法来解二维地下水流动问题中的椭

圆型拉普拉斯方程.

第九章中介绍了近年来在许多领域中都得到了广泛应用的摄动法. 并用摄动法研究了前面几章中已经介绍过的一些较复杂的问题.

(下为致谢部分, 详略.)

李文勋

纽约, 锡腊丘兹 1972

目　　录

第　一　章

调压塔中的振荡

§1 引言

在水利资源工程的实践中，关于水流和弥散的知识是必不可少的. 水流和弥散中的许多现象可以用业已成熟的物理学法则来预测. 当一种现象涉及到随时间或空间而变化的一些量时，预测过程就涉及到微分方程的解题问题. 本书的目的就是要研究一下水利资源工程师们特别感兴趣的那些微分方程，即用于水力学瞬态问题，流体流动时的弥散问题以及地下水流动问题这样三方面的微分方程. 而这些课题综合起来就可以包括许多种更重要的微分方程.

大体上，可以有两种解微分方程的方法，即解析法和近似的数值解法与图解法. 这两种方法在研究工程问题时都各有其适用的地方. 对特定情况，由近似方法可以求得一种数值解，因此这种方法用来处理一种已知的现象是很有效的. 而另一方面，由解析法则可以得到一种能显示问题所涉及到的一切因素影响的解. 对这样一种解析解说来，如果要得到与其等价的数值解，那就需要对这些因素的各种数值进行大量的计算，即使是这样，也往往无法揭示出问题的某些微妙的特性来. 但有时也可能会碰到根本无法求得解析解或解析解变得十分复杂的情况. 因此，一般的说来，如果有求得解析解的可能和方便时，就应该使用解析法. 否则当解析解变得过份复杂或根本不可能求得时，就应该使用近似解法. 如果用计

算机来求解一类问题，而这类问题的解就是那些已经可以通过查表得到的函数(如正弦函数，贝塞耳函数等)，这时动用计算机未免小题大做. 反之，去求一种难以解释现象的复杂的解析解则又过于莽撞.

本书的目的是要介绍求微分方程解析解的各种方法. 同时，也要来研究一下我们所考虑的水流系统的性质. 至于图解法和数值解法，由于不大大增加本书的篇幅是不可能深入探讨的，因此就省略了. 我们只在书中适当的地方，为读者提供一些参考书目，以便可从中找到有关水利资源工程问题的数值解法和图解法的应用实例.

本书中介绍的解法并不局限于介绍这些方法时所涉及到的特殊水流系统问题，也完全可用于其他类似的微分方程. 例如，本章中虽然研究的只是调压塔中水的振荡问题，但其他许多振荡系统的问题也可以用类似的微分方程来描述. 因此，也是可以用同样的方法来进行研究的.

§2 调压塔

在一条长管道中，当管中水流由于下游端阀门关闭而使流量迅速减少时，水的压力会随着水的迅速减速而大幅度地增加. 这种现象一般称之为水锤[注]. 为了避免管道中这种压力的大幅度增加，有些时候可以在控制管道流量的阀门或机组附近设置一座调压塔. 例如，图 1-1 所示即为一座位于水库引水管道阀门上游处的简易调压塔. 设置了这样的调压塔以后，如果阀门迅速开启，管道中的水加速，调压塔就可以立即补给过阀流量. 反之，如果阀门迅速关闭，调压塔则可为

[注] 水锤压力将在第五章中研究.

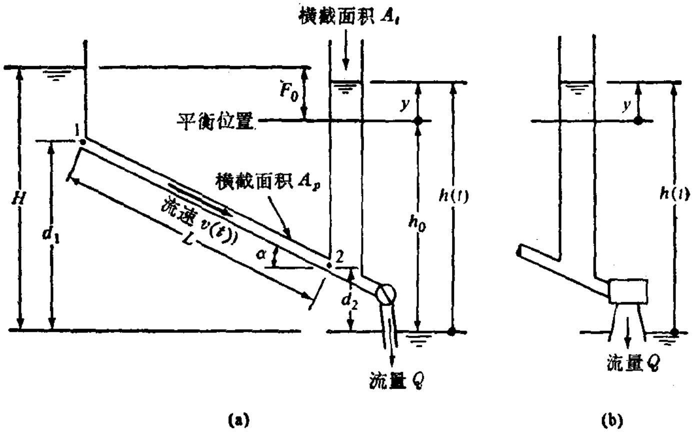


图 1-1

管道中过剩水量提供蓄水空间．这样，就减缓了水的减速，从而减小了管道中的水锤压力值．

当管道中的水流为稳定流时，由于管道中摩阻损失的关系，调压塔中的水位要较水库的水位低某一距离 F_1．在阀门的调节位置改变后，最终管道中水流达到另一种稳定状态时，这个高差如图 1-1 所示那样便变为另一个值 F_0．在两种稳定状态的转换期间，调压塔中的水面，由于水流的惯性作用，通常会产生突然涌浪，然后再在最终的平衡位置附近振荡．工程师感兴趣的就是要确定这种振荡水面所可能达到的最高和最低高程，并确定振荡的衰减率及其频率．了解这种频率是很重要的，因为如果在这种频率之下延长了扰动的时间（即重复开关阀门），将会使塔内水位产生大幅度的振荡（即谐振）．这种大幅度扰动显然是必须避免的．另一个有实际意义的是稳定性问题．正如一个倒置的摆，一经扰动就不会再回到它的铅垂的平衡位置一样，一座调压塔如果设计得不适当，那

末，一经扰动后，也会引起大量弃水.

在下面研究调压塔中的振荡问题时，我们将假定水是不可压缩的. 以后在第五章例 4 中还将证明，当塔中水振荡的持续时间大于管道中压力波(波速约为3000到4000英尺/秒)行经整个管道所需的时间时，采用这种近似假定是允许的. 研究这种问题时的基本方程是根据质量守恒定律所得的连续性方程[注]:

$$A_t \frac{dh}{dt} = A_p v - Q \tag{1}$$

和对于管道中的水所导出的动量方程(力＝质量×加速度):

$$p_1 A_p - p_2 A_p + A_p L \gamma \sin\alpha - \text{管壁摩阻} = A_p L \frac{\gamma}{g} \frac{dv}{dt}.$$

通常塔中微量的水头损失和流速水头与管道中的摩阻损失比较起来是不大的，因此压力 $p_1 \approx \gamma(H-d_1)$ 及压力 $p_2 \approx \gamma(h-d_2)$. 再因为 $\sin\alpha = (d_1-d_2)/L$，动量方程就变为

$$H - h - F = \frac{L}{g} \frac{dv}{dt}, \tag{2}$$

式中 F 为管道中的瞬时沿程摩阻水头. 这个方程表明，瞬时水头差$(H-h)$中的一部分是克服管道摩阻用的，而另外一部分则是用来加速水流的流动的. 所得出的方程即使在管道稍微弯曲时也还是有效的. 对于不稳定流的 F 值来讲，还没有充分地研究过. 但对于研究调压塔时所涉及到的缓变流来说，F 可用一个稳定湍流情况的经验公式:

$$F = \pm c|v|^n \quad (v \gtrless 0) \tag{3}$$

来近似地表示. 上式中，对于某一特定的管道来讲，c 值为常数. 又取水流流向调压塔时的流速 v 为正. 常数指数 n 略小

[注] 这些方程中的字母符号将在本章末的字母符号表中注明，并示于图 1-1.

于 2. 因为由摩阻所引起的水头降落是与水流方向一致的，所以写出方程(3)时，F 与 v 同号.

当初始值 h 与 v 为已知且确定了流量 Q 时，变量 $h(t)$ 和 $v(t)$ 即可由方程 (1) 和 (2) 确定. 当所给定的流量 Q 是一个 h, v 和 t 的复杂函数而且 F 非线性地以 v 表出时，这些方程的解也许是十分复杂的. 在这种情况下，如果必要的话，可以采用数值解法，也可以利用图解法. 不过，就调压塔的不少性态来说，还是可以通过解析方法来加以认识的.

在研究振荡问题时，用其最终的平衡值来量度因变量是方便的. 假设 v_0 和 F_0 分别为最终的 v 值和相应的 F 值，那末如图 1-1 所示，按方程(2)，由于 $dv/dt=0$，塔中的最终水面高程 h_0 为$(H-F_0)$. 引入变量 x(超过 v_0 的流速)和 y(h_0 以上的高程)：

$$x=v-v_0 \quad 和 \quad y=h-(H-F_0), \tag{4}$$

则方程(1)与(2)变为

$$\begin{cases} A_t \dfrac{dy}{dt}=A_p x+(A_p v_0-Q), & (5) \\[2ex] \dfrac{L}{g}\dfrac{dx}{dt}=-y-(F-F_0). & (6) \end{cases}$$

这些以新变量 x 和 y 表示的方程将在下一节里用来研究简易调压塔中的振荡问题. 至于简易调压塔或其它型式的调压塔的设计方法，可参见管道水力学方面的著作[5, 10].

§3 一阶一次联立微分方程组

简易调压塔的方程(5)与(6)是两个一阶一次的联立微分方程组(微分方程的阶数是包含在方程中的最高阶导数的阶数. 微分方程的次数是方程最高阶导数的幂). 一般地说来，

这样的方程组可写为

$$\frac{dx}{dt}=f_1(x,\ y,\ t),\ \frac{dy}{dt}=f_2(x,\ y,\ t). \tag{7}$$

这种方程组经常碰到，并经常用来替代一个二阶一次微分方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}=f\left(\frac{dy}{dt},\ y,\ t\right),$$

因为后者可再写为

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\ y,\ t),\ \frac{dy}{dt}=x.$$

当方程(7)中的 f_1 和 f_2 与时间 t 无关时，这些方程就描述了一个自治系统.

如图 1-2 所示，方程(7)可以在 xyt-空间中用几何图形来作说明. 一个特解，即在任意 t 时给出 x 值与 y 值的方程，在该空间中，可以用一条曲线来表示，这条曲线称之为积分曲

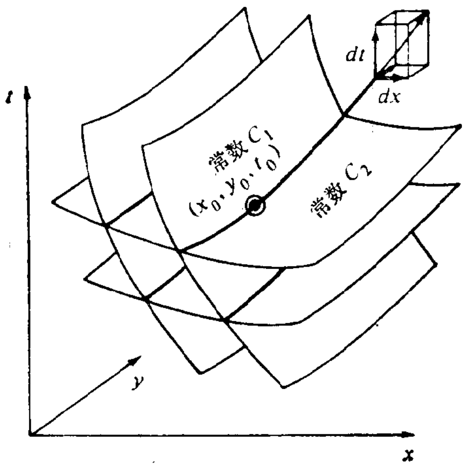


图 1-2

线．在这条曲线的任意点(x, y, t)上，方程(7)确定了积分曲线增量的微分的分量dx, dy与dt必须有下面的比例关系：

$$dx:dy:dt=f_1(x, y, t):f_2(x, y, t):1.$$

当解存在时[4]，积分曲线可用一对参数方程来描述：

$$x=\phi_1(t;C_1, C_2),\ y=\phi_2(t;C_1, C_2). \tag{8}$$

正如一个两阶常微分方程的通解那样，方程(7)的这种解答包含了两个积分常数C_1与C_2．每一特定积分曲线是用这些常数中的一些特定值描述的．例如对经过点(x_0, y_0, t_0)的积分曲线来讲，C_1与C_0值就可由联立方程组

$$\begin{cases} x_0=\phi_1(t_0;\ C_1, C_2), \\ y_0=\phi_2(t_0;\ C_1, C_2) \end{cases}$$

确定．因为方程(8)代表了方程(7)的许多解，故称其为微分方程的通解．

方程(7)的通解亦可用形式

$$\psi_1(x, y, t;C_1)=0,\ \psi_2(x, y, t;C_2)=0 \tag{9}$$

表示．这些方程中，每个方程代表了xyt-空间中的一族曲面．如图1-2所示，每一个曲面是用常数C_1或C_2的特定值确定的．方程(8)与(9)是有互相联系的，例如方程组(8)的第一式可由方程组(9)中消去y求得．确定了C_1与C_2值的一条积分曲线就是这些曲面中两个曲面的交线．

本章将研究方程(7)所描述的某些振荡问题．在任何情况下，首先要求得一种含有两个积分常数的通解，然后由初始条件确定两个常数值．首先来考虑常系数线性方程组：

$$\frac{dx}{dt}=Ax+By+g_1(t),\ \frac{dy}{dt}=Cx+Dy+g_2(t),$$

式中常数A, B, C, 与D取决于系统的特性．函数$g_1(t)$与$g_2(t)$代表施加的外部影响．就自治系统来说，$g_1(t)\equiv g_2(t)\equiv 0$