内 容 简 介

本书以边界元法的基本原理及其在固体力学中的应用为中心，主要叙述工程中常用的直接法，对间接法也介绍了其基本思想和若干应用实例。

书中以格林公式为基础，建立了边界元的直接法，并以大部分篇幅论述了用边界元法如何求解弹性静力与动力问题以及粘弹性、热弹塑性与蠕变问题。此外，还阐述了边界元法在电磁领域中的应用。最后讨论了为提高解决实际问题的效率而采用的边界元及有限元的耦合解法。

本书可作为有关专业大学高年级学生和研究生的教学参考书，也可供力学、土木、采矿、地质及水利等领域的科技人员阅读。

责任编辑：田 克 运

田中正隆　田中喜久昭

境界要素法——基礎と応用

东京　丸善株式会社　1982

边界元法的基础与应用

郎德宏 译　刘文斌 校

*

煤炭工业出版社　出版

（北京安定门外和平里北街21号）

煤炭工业出版社印刷厂　印刷

新华书店北京发行所　发行

*

开本850×1168 1/32　印张 9 1/4

字数 240 千字　印数1—2,070

1987年6月第1版　1987年6月第1次印刷

书号15035·2845　定价1.85元

序　　言*

自一九六〇年以来，运用计算机的数值分析方法，取得了异常惊人的进步。特别是由于有限元法（Finite Element Method, FEM）的研究与开发，近二十年里，几乎对所有工程中的各种问题都能够进行数值分析。这种数值分析方法是以容量大、速度高的计算机的开发作为前提的。但是，由于分析的对象越来越复杂，所以在应用数值分析方法方面，从其计算成本来说，将会受到很大限制，将来也会遇到和过去同样的问题。因此，为克服有限元法和差分法等区域型解法的缺点，人们对于更有效的分析方法的研究与发展，予以极大的关心。在这样的社会背景以及工程方面迫切需要的情况下，近几年来，边界元法（Boundary Element Method, BEM）显露头角。然而，这种解法的先驱研究，已经在六十年代前半期发表过了，它与有限元法和差分法等使用计算机的数值解法正式开始研究的时间大致相同。此后，无论是方法的改进，还是理论基础的建立，与其他数值解法几乎是平行地发展着，直至达到今天这样发达的状况。

边界元法是把控制微分方程式变换成边界上的积分方程式，与有限元法相同，都是先离散而后求解的数值分析法。最后要解的方程式的未知数只是边界上的未知节点量，所以与区域型解法相比较，需要处理的矩阵的维数少，其最大优点是输入的数据量大为减少且计算时间大大缩短。边界元法有直接法和间接法两种。直接法使用具有明确物理意义的变量来建立公式，而间接法所用变量的物理意义不一定明确。对于位势问题来说，过去使用过单一位势或是双重位势等公式表示，这些正是间接边界元法的基础。在发展的初期阶段，利用间接法进行了许多研究，可是，

注：序言部分有删节——译者。

最近有偏向于用直接边界元法的倾向。本书对于以把体积分和边界积分联系起来的格林（Green）公式为基础的直接边界元法，从方法的基础到应用都作了说明。对于间接边界元法，则根据需要只介绍了基本的考虑方法。

在第一章叙述了关于边界元法研究的发展简史与展望，以及以固体力学为中心的连续介质力学的几个领域。第二章以在位势问题中经常遇到的拉普拉斯（laplace）方程为例来阐明边界元法的基本概念。并叙述了使用各种不同类型边界单元情况下的离散方法及详细解法。第三章阐述了对三维弹性静力问题边界元法的基础和应用。假定弹性体符合虎克（Hooke）定律，在微小应变以及微小变形情况下，推导直接边界元法的公式，然后应用矩阵来论述离散方法及详细解法。另外，还介绍了几种应用实例，以表明边界元法的实用性。第四章除说明二维弹性问题的具体应用外，还讲述了对弹性静力问题精心考虑后得到的边界元法及其应用。也就是说，除了详细地叙述了求解轴对称问题的方法及其应用外，同时还讲了只用边界积分处理体力作用下的几个问题的边界元法。第五章介绍关于梁和板的弯曲问题的直接边界元法。在阐明间接法时，还介绍了几个分析实例。第六章是关于热弹性问题的边界元法。这一章没有把位移场和温度场联系起来考虑，研究所谓非耦合热弹性问题，即给出温度分布情况，考虑由此而引起的包含在体积分中的体力项的边界元分析法及几个应用实例。第七章叙述热弹塑性和蠕变等问题，即所谓材料非线性问题的边界元法。对于这些问题，在说明以往常用的迭代法及应用实例之后，讨论了对区域内部进行单元划分，不需要迭代计算的边界一区域单元法。第八章说明与时间有关问题的边界单元法。对此问题，不仅论述使用拉普拉斯变换和傅立叶（Fourier）变换的分析法，而且详细论述将时间轴也进行单元划分的直接法。第九章给出了非结构力学部分的边界元法应用实例，提出了电磁问题。推导确定电磁场的边界元法公式，详细叙述对压电问题的直接法。第十章讲述为提高计算效率应采取的一些办法，即说明边

界元法和有限元法的耦合解法。这种耦合解法对包含无限区域的各种问题是很有效的。同时，进一步讲明，在实际分析中很重要的区域划分边界元法的基础和应用。在附录中，集中给出了许多问题的基本解、形状函数以及数值积分公式等。

综上所述，本书把焦点放在连续介质力学中的固体力学上，论述了边界元法的基础和应用。边界元法的研究还仅仅是开始，这种解法在连续介质力学方面的应用，今后会更加广泛。第一章中的发展简史及其展望的内容，我们衷心希望在不久的将来，会重新大篇幅地改写。另外，对于边界元法来说，我国还处于发展阶段，本书若对边界元的发展有所贡献，那么对作者来说，没有比此事更使人高兴的了。

田中正隆

田中喜久昭

1982年1月

目　　录

1 绪　　论

1.1 引言

本书叙述的中心内容是边界元法这一新的数值分析法的基础及其在固体力学中的应用。在正文开始前，首先介绍边界元解法基本的，重要的特征以及以往的研究概况。

边界元法（Boundary Element Method，以下缩写为BEM）是与有限元法类似的一种数值分析法，不同点是它把积分方程式作为建立公式的基础。边界元法用格林定理把所考虑问题的控制微分方程式变换成边界上的积分方程式，然后以与有限元法相同的方法进行离散，之后再进行分析。由于边界积分方程式成了离散对象，故可以把所考虑问题的维数降低一维来进行处理。因此，与把整个的区域作为离散对象的差分法和有限元法等所谓区域型解法进行比较，这种方法具有输入数据少及计算时间明显缩短这一优点。近年来，随着有限元法系统的大型化，特别是从计算成本方面来考虑时，人们注意到，边界元法是很有用的。由于边界元法研究的进展极其迅速，结果，这种方法不仅对线性问题、即使对非线性问题也成为有限元法等区域型解法的强有力的竞争对手，而且，在某些领域中边界元法已经取代了区域型解法的分析系统。

边界元法就理论而言并不应该说是新的分析方法。在物理、数学范畴内，边界积分方程式法（Boundary Integral Equation Method），奇异点解法（Singularity Method）或格林函数法（Green's Function Method）等方法很早以前就为人熟知。以前，配点法的解法是在边界上选取适当数目的点，使在这些点上满足积分方程式。可是，最近已经可用与有限元法同样多的高次

边界元，并在解法上下了很多工夫，获得了明显的发展。

边界元法有直接法和间接法两种。直接法是根据把体积分变换成边界上的面积分的Green公式而来的。采用物理意义明确的变量，然后进行公式推导。因此，可以说，目前这种方法在工程问题的许多应用方面，正在成为主要方法。间接法利用位势理论中一直经常采用的单层位势和双重位势来推导公式，使用的变量的物理意义未必清楚。可是，就是在这种解法中，也有难于放弃的优点，所以现在仍在用与研究直接法同样多的精力来研究它。本书以边界元法中的直接法及其应用为中心加以叙述。对间接法，则根据需要说明了基本考虑方法，同时介绍几个应用实例。

首先，在本章讲述边界元法在固体力学各种问题中的应用。边界元法现在仍在继续蓬勃发展着，在此回顾一下以往的研究，并展望它的未来。

1.2 边界元法（BEM）发展概况

在拉吾（love）[1]、伯格曼（Bergman）、斯奇佛（Schiffer）[2]、目什海里什维里（Muskhelishvili）[3]、米克林（Mikhlin）[4]和库波瑞芝（Kupradze）[5]的著作中，详细地论述了线弹性问题的边界元法的理论基础。这种解法从六十年代已开始在工程问题中应用。在计算机的发展和与此同出一辙的差分法和有限元等方法发展的同时，边界元法研究也很活跃，以至达到今天所见到的繁荣景象。把边界积分方程离散化，然后归到线性代数方程式，再使用计算机求解。首先，由札斯吾（Jaswon）和西姆（Symm）就Laplace算子表示的位势问题，从间接法的立场开始研究，然后，由札斯吾和马堤（Maiti）等人对平板弯曲问题的解法进行研究。这些研究成果均汇集在札斯吾和西姆的著作中。另外，在班纳吉（Banerjee）和布特非勒德（Butterfield）所编辑的著作中，也收录了许多间接法的研究成果。

另一方面，关于边界元法的直接法早期研究，首先是由札斯

吾和庞特（Ponter）[10]对弹性杆件扭转问题进行的。继之是瑞作（Rizzo）对弹性静力问题进行了研究。以后，又有瑞作、西皮（Shippy）、克茹斯（Cruse）、拉柴特（Lachat）、瓦特逊（Watson）、布瑞比阿（Brebbia）、朝岛特（Chaudouet）等人进行了充分地研究。使用高次边界元，这种解法很有效，而且结果精度高，可以用于分析包含热弹性的很多实际问题。在布瑞比阿（Brebbia）及布瑞比阿与瓦勒克[13]（Walker）的著作中，详细地叙述了边界元直接法的基础和应用，并在国际会议的论文集[14]~[17]中，报导了很多研究成果。还有，在班纳吉和布特非勒德的总论中[78]，详细地讲述了边界元法在各种土木工程问题中的应用。

在以下的三节中，回顾一下在固体力学的几个领域中的研究情况。

1.3 弹性静力问题

有关直杆的扭转问题，在Jaswon和Ponter之后，发表了几项研究成果[18]~[21]。由于Alarcon等人的研究，对各种断面形状的杆，都可以进行高精度的分析。

关于梁的弯曲问题，Butterfield[23]提出对等直梁、变截面梁以及弹性地基梁的处理方法。此外，对平板的弯曲问题，Jaswon和Maiti，Maiti 和 Chakrabarty，Altiero和Sikarski等人，根据间接法研究了分析方法。以后，Hansen[27]和Stern[28]提出了把边界上物理意义明确的变量作为未知量的直接法解法。Bezine[29]~[31]也提出同样的分析方法。Wu和Altiero提出了对各向异性弹性板的边界元分析法。

对一般的二维及三维弹性固体的边界元法，在上述Rizzo的早期研究之后，Cruse又对解法进行了改进和扩充。另外，Alarcon、Brebbia 和 Dominquez以及Nakaguma和Brebbia都说明了加权残数法与边界元法是等价的，并分析了几个弹性问题。Lachat和Watson二人建立了比高次单元更一般的解法。另外，法国

Senlis的 CETIM 小组及英国 Southampton 的CML 小 组还编制了适用于三维弹性和热弹性问题的通用程序。Wilson和Cruse[38]又提出了各向异性弹性问题的卓有成效的边界元分析法，并对轴对称弹性体问题的很多分析方法进行了探讨。

对于热弹性问题，如果温度场是已知的，可以作为有体力作用的弹性静力问题来分析。Rizzo和 Shippy 分析了原子反应堆结构及涡轮机叶片等三维热弹性问题；Chaudouet 和 Loubignac[44]两人独自分析了滚筒的三维热变形问题，并且对与热应力问题有关的问题，即确定温度场热传导问题的研究，也做了许多尝试。Rizzo和Shippy[45] 用拉普拉斯变换的方法，解决了非定常热传导问题中温度场对时间的依赖关系，提出对时间和空间进行单元划分方式的直接边界元分析法，并确认了它的有效性。

确立了线弹性问题的边界元法，就可以分析断裂力学中的应力扩大系数。对二维和三维问题的各种破坏型式的应力扩大系数进行了计算。与有限元法相比，这种方法不仅可大大缩短计算时间，而且能得到更好的结果。另外，也提出了使用裂缝尖端的奇异单元及各向异性弹性体的应力扩大系数等的计算方法。

在弹性分析的重要应用领域还有接触问题。Anderson等人分析了二维接触问题的几个实例，并且考虑了接触面的摩擦。Batra[59]对橡胶套着的滚筒的接触问题作了分析，葸和山地[60]分析了三维弹性体的接触问题。

1.4 弹性动力问题及粘弹性问题

Doyle用拉普拉斯变换的积分方程式，对包含惯性项的非定常弹性动力问题进行了基础研究。以后，Cruse和Rizzo提出边界元法的离散方法与解法。接着，Cruse 进行了半无限弹性体的瞬态响应分析，并根据这种方法，进行了有孔平板的动态应力集中的计算以及埋设物周围的瞬态应力分析。对非定常弹性动力问题，除用上述的拉普拉斯变换法外，还提出了对时间和空间进行单元划分的更直接的边界元分析法。

此外，在定常振动响应分析中，采用傅立叶变换的解法是有效的。丹羽、小林[68]等人根据这种方法，分析了包含有隧道的弹性地基的振型，并进行了薄膜和薄板的定常振动分析。对粘弹性问题，提出用拉普拉斯变换的解法，并对具体问题进行了分析。

1.5 非线性问题

建立了对线弹性问题的解法，很自然地想到用这种方法来求解非线性问题。首先，对弹塑性问题，把塑性变形产生的非线性项看成体力；提出了用线性弹性问题的解法进行迭代计算来解弹塑性问题。此后，Mendelson等人进行了V形缺口试件的三点弯曲弹塑性分析，并按这种方式进行了许多弹塑性问题的分析[78]~[81]。这种解法必需逐步迭代进行计算。从以往的计算实例来看，大致可以说有良好的收敛性，但是仍有必要经常注意迭代的收敛性。因此，为取代这种解法，提出不仅对边界，而且对于预计可能产生塑性变形集中的内部区域也要进行单元划分。把这个区域的未知节点位移作为最终离散化的代数方程式中的未知数，然后再加以处理。这种方法，虽然提高了代数方程的阶数，但避免了对各个增量步的迭代计算。

对于热弹塑性蠕变变形问题，Kumar，Mukherjee，Bui 等人进行了基础研究。此后，Mukherjee、Kumar 及 Morjaria 对平板的面内蠕变列举了很多分析实例，并对平板的粘塑性出平面弯曲[90]及出平面剪切[91]也进行了研究。

1.6 边界元法研究的展望

像上面已经概括的那样，边界元法首先是应用于线性问题。其后，力图扩大适用范围到与时间有关的问题和材料非线性的问题。在此，对今后把边界元法应用到尚未开拓的有关领域的研究工作作个展望。

如上所述，边界元法与区域型解法不同，因为它处理无穷区

域问题非常容易。对某些问题，如将有限元法和边界元法结合起来，兼顾两者的优点，有时是很有利的。在流体的波动和电磁场问题中，用这种解法会取得很好的效果[92]。对弹性问题也用此法进行了研究[93]。可以认为，这种将两者结合起来的方法——耦合法，在非线性问题和土力学的很多问题中，已得到广泛的应用。

对于包括大变形的几何非线性问题，尚未见到有人研究。可以说，这个领域是边界元法应用中一个很大的未开拓领域之一。板和壳的弯曲问题也必须研究大变形。对于这类问题，也期望着有效的边界元法的研究。

对地基或流体与结构物耦联的变形问题，可以说以往或多或少都进行过一些研究，但还有很多遗留问题尚未解决。例如，在地基——结构物的耦联问题中，假定结构物为刚体，进行地基的响应的讨论时，必须建立考虑结构物变形的解法。同样，也有必要研究考虑容器变形的内部液体流动的边界元法。

边界元法把无限介质的基本解做为基础，因此，求出适应多数问题并且易于使用的基本解，对于今后边界元法发展是必不可少的。可以说，对很多基本解已经很熟悉，但是，进一步求出更多基本解的研究，应该说是今后的重要课题之一。

1.7 结语

如上所述，与差分法和有限元法相比，边界元法研究的历史很短，可以说，在很多工程问题中，边界元法的应用还刚刚开始。对线性问题已经广泛地认识到了边界元法的有效性，但是包含非线性问题的很多其他领域的边界元法的应用，尚在探索阶段。因此，在以发展中的边界元法作为主题的这本书中，不仅讲述了已经确定的内容，而且，今后在边界元法的研究中，对凡是有用的新建议也准备积极地进行研究。

参 考 文 献

(1) A.E.H.Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge Univ. Press, 4th. ed., (1927).

(2) S.Bergman and M. Schiffer, *Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics*, Academic Press, New York, (1953).

(3) N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, P.Noordhoff, Groningen, (1953).

(4) S. G. Mikhlin, *Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations*, Pergamon Press, London, (1965).

(5) V. D. Kupradze, *Potential Methods in the Theory of Elasticity*, I.P.S.T., Jerusalem, (1965).

(6) M. A. Jaswon, Integral equation methods in potential theory. I, *Proc. Roy. Soc., Ser.* A, 275 (1963), pp.23～32.

(7) G. T. Symm, Integral equation methods in potential theory. Ⅱ, *Proc. Roy. Soc., Ser.* A, 275 (1963),pp. 33～46.

(8) M.A.Jaswon and G.T.Symm, *Integral Equation Methods in Potential and Elastostatics*, Academic Press, London, (1977).

(9) P. K. Banerjee and R. Butterfield (eds.), *Developments in Boundary Element Methods*-1, Appl.Sci. Publishers, London, (1979).

(10) M.A.Jaswon and A. R. Ponter, An integral equation solution of the torsion problem, *Proc. Roy. Soc., Ser.* A, 273 (1963), pp. 237～246.

(11) F. J. Rizzo, An integral equation approach to boundary value problem of classical elastostatics, *Quart. Appl. Math.*, 25-1 (1967), pp.83～95.

(12) C. A. Brebbia, *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London, (1978), 《边界元法入门》一

书由神谷纪生、田中正隆、田中喜久昭等合译，由培風館于1980年出版.

(13) C. A. Brebbia and S. Walker; *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newness-Butterworths, London, (1980); 《边界元法的基础与应用》一书由神谷纪生、田中正隆、田中喜久昭等合译，由培風館于1981年出版.

(14) T. A. Cruse and F. J. Rizzo (eds.); *Boundary-Integral Equation Method, Computational Applications in Applied Mechanics*, AMD-Vol.11, ASME, New York, (1975).

(15) C. A. Brebbia (ed.); *Recent Advances in Boundary Element Methods*, Pentech Press, London, (1978).

(16) C. A. Brebbia (ed.); *New Developments in Boundary Element Methods*, CML Publications, Southampton, (1980).

(17) C. A. Brebbia (ed.); *Boundary Element Methods*, Springer-Verlag, Berlin, (1981).

(18) S. Christiansen; A review of some integral equations for solving the Saint-Venant torsion problem, *Jour. Elasticity*, 8 (1978), pp.1～20.

(19) S. Christiansen; Numerical investigation of some integral equations related to the classical Saint-Venant torsion problem, in Ref. (15), pp.87～104.

(20) J. P. Wong and G. Aquirre-Ramirez; A finite element-integral equation solution to torsion problem, *Compt. & Struct*, 9 (1978), pp.53～55.

(21) E. Alarcón, A. Martin and F. Paris; Improved boundary element in torsion problems, in Ref. (15), pp. 149～165.

(22) E. Alarcon, A. Martin and F. Paris; Boundary elements in potential and elasticity theory, *Compt. & Struct.*, 10 (1979), pp.351～362.

(23) R. Butterfield; New concepts illustrated by old problems, in Ref. (9), pp.1～30.

(24) M. A. Jaswon and M. Maiti; An integral equation formulation of plate bending problems, *Jour. Eng. Math*, 2 (1968), pp.83～93.

(25) M. Maiti and S. K. Chakrabarty; Integral equation solutions for simply supported polygonal plates, *Intl. Jour. Eng. Sci.*, 12 (1974), pp.793～806.

(26) N. J. Altiero and D. L. Sikarskie; A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form, *Compt. & struct.*, 9 (1978), pp.163～168.

(27) E. B. Hansen; Numerical solution of integro-differential and singular integral equations for plate bending problems, *Jour. Elasticity*, 6 (1976), pp.39～56.

(28) M. Stern; A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems, *Intl. Jour. Solids & Struct*, 15 (1979), pp. 769～782.

(29) G. Bezine; Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions, *Mech. Res. Comm.*, 5 (1978), pp.197～206.

(30) G. Bézine and D. A. Gamby; A new integral equation formulation for plate bending problems, in Ref. (15), pp. 327～342.

(31) G. Bézine; Application of similarity to research of new boundary integral equations for plate flexure problems, *Appl. Math. Modelling*, 5(1981), pp.66～70.

(32) B. C. Wu and N. J. Altiero; A new numerical method for the analysis of anisotropic thinplate bending problems, *Compt, Meth. Appl. Mech. Eng.*, 25(1981), pp. 343～353.

(33) T. A. Cruse; Numerical solutions in three dimensional elastostatics, *Intl. Jour. Solids & Struct*, 5(1969), pp. 1259～1274.

(34) T. A. Cruse; An improved boundary-integral equation method for three dimensional elastic stress analysis, *Compt. & Struct.*, 4(1974), pp.741～754.

(35) E. Alarcón, C. A. Brebbia and J. Dominquez; The boundary element method in elasticity, *Intl. Jour. Mech. Sci.*, 20(1978), pp. 625～639.