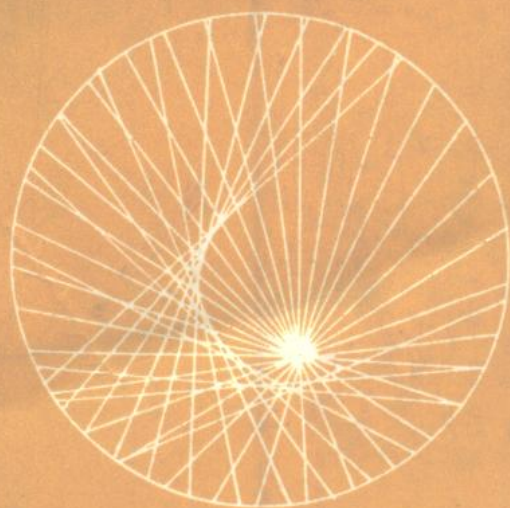


高等数学 与 线性代数



全国工学硕士研究生数学
入学考试复习指导

编 李彩英 解可新 良君

天津大学出版社

全国工学硕士研究生
数学入学考试复习指导

高等数学与线性代数

陆君良 解可新 李彩英 编

天津大学出版社

0249/11

内 容 简 介

本书是根据国家教育委员会制定的全国工学硕士研究生入学考试《数学考试大纲》及高等工业学校《数学课程教学基本要求》编写的。全书总结和概括了高等数学与线性代数的基本内容，围绕教学和考核的基本要求，通过对典型例题的分析，阐述解题的基本方法和技巧，以提高分析问题、解决问题及应试的能力。

本书是全国报考工学硕士研究生的数学复习指导书，也可作为高等工业学校及工科函授大学、电视大学等各类高等学校的高等数学和线性代数课程的教学参考书。

(津)新登字012号

全国工学硕士研究生数学

入学考试复习指导

高等数学与线性代数

陆君良 解可新 李彩英 编

*

天津大学出版社出版

(天津大学内)

河北省邮电印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：850×1168毫米1/32 印张：19³/8 字数：504千字

1993年9月第一版

1993年9月第一次印刷

印数：1—4000

ISBN7-5618-0511-X

O·52

定价：14.60元

前 言

根据国家教育委员会决定，从1987年开始，全国工学各专业硕士研究生入学考试中，数学考试实行全国统考。为此，国家教委制订并颁布了《数学考试大纲》。大纲规定主要考核高等数学与线性代数（部分专业用〈数学一〉试卷仅含12%的复变函数或概率论），为了帮助考生系统地复习数学知识，熟悉并适应考试的内容与要求，我们编写了这本研究生数学入学考试复习指导书《高等数学与线性代数》。

本书根据《数学考试大纲》、并参照国家教委制定的《数学课程教学基本要求》，扼要地介绍了各章节的基本内容与要求，仿照考试试题的形式与结构，通过典型例题反映了这些要求的重点，介绍了分析问题与解决问题的方法、技巧和解决难点的途径。并在各节后选编了一定数量的习题，以供读者思考、动手演算，便于巩固、提高。书末附有各节习题的答案或提示。

本书是编者在长期担承高校数学教学实践的基础上，依据多年来参加研究生数学入学考试的命题、阅卷及考前辅导等工作的经验和体会编写的。本书的第一、三、六、七、八章由解可新编写，第二、四、五、九章由李彩英编写。全书由陆君良主审并最后定稿。

本书可供报考工学硕士研究生的考生复习数学时使用；也可作为各工科院校（包括电视大学、职业大学和业余大学，以及夜大等）学生学习高等数学与线性代数的教学参考书。

本书在编写过程中，得到了天津大学研究生院的帮助和支持，在此表示衷心的感谢。

编 者

1993年4月

目 录

第一章 函数、极限、连续	(1)
第一节 函数	(1)
习题1-1	(9)
第二节 极限	(12)
习题1-2	(23)
第三节 连续函数	(26)
习题1-3	(33)
第二章 一元函数微分学	(35)
第一节 导数与微分的概念	(35)
习题2-1	(45)
第二节 微分法	(48)
习题2-2	(62)
第三节 中值定理、罗必塔法则	(64)
习题2-3	(82)
第四节 导数的应用	(85)
习题2-4	(104)
第三章 一元函数的积分学	(107)
第一节 不定积分	(107)
习题3-1	(120)
第二节 定积分及其计算	(123)
习题3-2	(149)
第三节 定积分的应用	(154)
习题3-3	(169)
第四章 向量代数与空间解析几何	(171)

第一节 向量代数	(171)
习题4-1	(183)
第二节 空间解析几何	(184)
习题4-2	(206)
第五章 多元函数微分学	(210)
第一节 多元函数及其偏导数和全微分	(210)
习题5-1	(226)
第二节 多元函数微分法及方向导数与梯度	(229)
习题5-2	(246)
第三节 多元函数微分学的应用	(249)
习题5-3	(273)
第六章 多元函数的积分学	(276)
第一节 重积分	(276)
习题6-1	(308)
第二节 曲线积分	(313)
习题6-2	(338)
第三节 曲面积分	(340)
习题6-3	(369)
第七章 无穷级数	(372)
第一节 常数项级数	(372)
习题7-1	(387)
第二节 幂级数	(388)
习题7-2	(416)
第三节 付里叶级数	(418)
习题7-3	(437)
第八章 常微分方程	(440)
第一节 常微分方程的基本概念与一阶微分方程	(440)
习题8-1	(456)
第二节 可降阶的高阶微分方程	(457)
习题8-2	(466)

第三节 线性微分方程	(466)
习题8-3	(478)
第九章 线性代数	(482)
第一节 行列式、矩阵	(482)
习题9-1	(511)
第二节 n 维向量与线性方程组	(515)
习题9-2	(546)
第三节 矩阵的相似对角形	(549)
习题9-3	(573)
第四节 二次型	(575)
习题9-4	(589)
习题答案与提示	(591)

第一章 函数、极限、连续

第一节 函 数

一、基本内容与要求

1. 函数概念

当变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记为

$$y=f(x),$$

其中 x 叫做自变量， y 叫做因变量，变量 x 的变化范围叫做这个函数的定义域。

如果自变量 x 取某一数值 x_0 时，函数有确定的值与它对应，则称函数在 x_0 处有定义。

自变量取定义域内的某一值时，函数的对应值叫做函数当自变量取该值时的函数值。如果自变量在定义域内任取一个确定值时，函数都只有一个确定的值和它对应，这种函数称为单值函数，否则称为多值函数。

函数有三种表示法：公式法（又称解析法）、表格法和图象法。

2. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性 设函数 $f(x)$ 在 $\mathcal{D}$ 内有定义，如果存在正数 M ，使得当 x 取 $\mathcal{D}$ 内任一个值时，对应的函数值 $f(x)$ 满足

$$|f(x)| \leq M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 $\mathcal{D}$ 内有界。否则称无界。

(2) 函数的单调性 对于 $\mathcal{D}$ 内任意两点 $x_1 < x_2$ ，若有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 $\mathcal{D}$ 内是单调增加的. 若有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 $\mathcal{D}$ 内是单调减少的.

(3) 函数的奇偶性 若函数 $f(x)$ 在对称区间 $(-a, a)$ 内, 对任意的点 x , 有 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为区间 $(-a, a)$ 内的奇函数; 若对任意的点 x , 有 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为区间 $(-a, a)$ 内的偶函数.

(4) 函数的周期性 对于函数 $f(x)$, 若存在不为零的数 l , 使得

$$f(x+l) = f(x)$$

对于定义域内的任何 x 都成立, 则 $f(x)$ 称为周期函数, l 是 $f(x)$ 的周期. 一般称 l 中的最小正数为 $f(x)$ 的周期.

3. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathcal{D}$, 值域为 $\mathcal{W}$. 若对于 $\mathcal{W}$ 中的每一个数 y , 在 $\mathcal{D}$ 中有确定的数值 x , 使得 $f(x)=y$, 则 x 是 y 的函数. 这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数, 记为

$$x=f^{-1}(y).$$

如果仍用 x 表示自变量, y 表示因变量, 则函数 $y=f(x)$ 的反函数记为

$$y=f^{-1}(x).$$

函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形, 关于直线 $y=x$ 对称.

反函数的存在定理 若函数 $y=f(x)$ 是单调增(减)函数, 则它的反函数存在, 并且也是单调增(减)函数. 若 $y=f(x)$ 还是连续函数, 则它的反函数也是连续函数.

4. 隐函数

已经解出因变量 y 的二元方程 $y=f(x)$ 所定义的函数称为显函数. 若有函数 $f(x)$ 能使二元方程 $F(x, y)=0$ 变为恒等式

$$F(x, f(x)) = 0,$$

则称 $f(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 所定义的隐函数.

5. 复合函数

如果 y 是 u 的函数: $y=f(u)$, 其定义域为 $\mathscr{U}$, 而 u 又是 x 的函数: $u=\varphi(x)$, 其定义域为 $\mathscr{X}$, 值域为 V , 且 $V\subset\mathscr{U}$, 则称 y 是变量 x 的复合函数, 记为

$$y=f(\varphi(x)),$$

其中变量 u 称为中间变量.

6. 初等函数

(1)基本初等函数 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称基本初等函数.

(2)初等函数 由常量和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成, 并用一个解析式表示的函数称初等函数.

函数概念是事物运动过程中变量之间的依从关系在数学中的反映. 给出一个函数就是给出定义域(数集 $\mathscr{X}$)和对应规律 f , 有了定义域和对应规律就有了函数的值域: $\mathscr{Y}=\{y|y=f(x), x\in\mathscr{X}\}$. 所以函数的定义域和对应规律称为函数的两要素, 掌握函数的两要素是学习函数概念的基本要求.

高等数学中所遇到的函数大多是初等函数, 所以初等函数是一类重要的函数. 非初等函数在实际问题和数学理论中也常出现. 在非初等函数中, 分段函数是经常遇到的. 分段函数的一种典型形式是

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & a<x\leq b, \\ \psi(x), & b<x<c.\end{cases}$$

如果 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 是初等函数, 在区间 (a, b) 和 (b, c) 上可按初等函数研究, 但在分界点 $x=b$ 处不能按初等函数研究, 这是分段函数的主要特点. 函数 $f(x)$ 在分界点 $x=b$ 处的性质由左右两侧分别按 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 进行讨论, 然后综合得出结论.

这一节的基本要求是

- (1) 理解函数的概念及表示法.
- (2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
- (3) 了解反函数、隐函数和复合函数的概念.
- (4) 熟悉基本初等函数的性质及其图形.
- (5) 能列出简单应用问题的函数关系.

二、例题

填空题(例1—例5)

例1 函数 $y = \arccos \frac{2x}{1+x}$ 的定义域是_____.

解 由 $\left| \frac{2x}{1+x} \right| \leq 1$ 且 $x \neq -1$, 有 $|2x| \leq |1+x|$. 两边平方得 $4x^2 \leq (1+x)^2$ 即 $(3x+1)(x-1) \leq 0$. 因此所求的定义域是 $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$.

例2 已知 $f(x) = \sin x$, $f(\varphi(x)) = 1-x^2$, 则 $\varphi(x) =$ _____ 的定义域为_____.

解 由 $f(x) = \sin x$ 及 $f(\varphi(x)) = 1-x^2$ 得

$$\sin(\varphi(x)) = 1-x^2,$$

即 $\varphi(x) = \arcsin(1-x^2)$.

它的定义域为 $|1-x^2| \leq 1$, 即 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ 或 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

例3 已知 $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x$, 则 $f\left(\cos \frac{x}{2}\right) =$ _____.

解 由 $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} = 2\left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right)$, 得

$$f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = 2\left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right),$$

所以 $f\left(\cos \frac{x}{2}\right) = 2\left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) = 1 - \cos x$.

例4 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$

则 $f(f(x)) =$ _____.

解 因为 $|f(x)| \leq 1$, 故

$$f(f(x)) = 1.$$

例5 已知函数 $y = \begin{cases} x-1, & x \leq 2, \\ x^2-4x+5, & x > 2. \end{cases}$

的反函数为 $y = \varphi(x)$, 则 $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) =$ _____.

解 因为

$$x \leq 2 \text{ 时, } x = y + 1, y \leq 1;$$

$$x > 2 \text{ 时, } y = x^2 - 4x + 5 \text{ 即 } x = 2 + \sqrt{y-1},$$

$y > 1$. 所以

$$y = \varphi(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1, \\ 2 + \sqrt{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

$$\text{因此, } \varphi\left(\frac{3}{2}\right) = 2 + \sqrt{\frac{3}{2} - 1} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

选择题〔注〕(例6—例8)

例6 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 则 $f\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(x - \frac{1}{2}\right)$ 的定义域是

$$(A) -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}. \quad (B) \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

$$(C) x = \frac{1}{2}. \quad (D) x > \frac{1}{2}.$$

〔注〕本书例题和习题中的选择题, 都列有代号为(A)、(B)、(C)、(D)的四个答案, 其中仅有一个是正确答案, 要求解题者选出自己认为是正确答案的代号即可. 作为例题, 都给出了选择答案的依据.

解 由 $0 \leq x + \frac{1}{2} \leq 1$ 及 $0 \leq x - \frac{1}{2} \leq 1$,

得 $x = \frac{1}{2}$.

所以选择(C).

例7 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0, \\ \cos x, & x < 0, \end{cases}$$

则 $f(x)$ 是

(A) 奇函数.

(B) 偶函数.

(C) 奇函数与偶函数的和.

(D) 周期函数.

解 由于在 $(-\infty, +\infty)$ 内任何有定义的函数 $f(x)$, 都可以表示为奇函数

$\frac{f(x) - f(-x)}{2}$ 与偶函数 $\frac{f(x) + f(-x)}{2}$ 的和, 即

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

因此, 应选择(C)

例8 设 a, b 是常数, 且 $b > a$. 函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 它的图象既对称于直线 $x = a$, 又对称于直线 $x = b$. 则函数 $f(x)$ 必是

(A) 奇函数.

(B) 偶函数.

(C) 周期函数.

(D) 单调函数.

解 设 $\delta > 0$, 且 $x = a + \delta$, 则由于函数 $y = f(x)$ 的图象对称于直线 $x = a$, 故 $f(a + \delta) = f(a - \delta)$, 即

$$f(x) = f(2a - x). \quad (1)$$

$$\text{同理有 } f(x) = f(2b - x). \quad (2)$$

将(2)中的 x 换成 $2a - x$, 则得

$$f(2a - x) = f(2b - 2a + x). \quad (3)$$

由(1)、(3)得

$$f(x) = f[2(b-a) + x].$$

所以, 函数 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数, 故选择(C).

例9 求函数 $y = \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$ 的定义域.

解 当 $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \geq 0$ 时,

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} - x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2},$$

即 $2k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5}{6}\pi.$

其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

例10 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 试求下列函数的定义域:

(1) $f(4x^2)$; (2) $f(\operatorname{tg} x)$; (3) $f(\ln x)$.

解 (1) 令 $t = 4x^2$, 则 $f(4x^2) = f(t)$, 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, $0 \leq 4x^2 \leq 1$, 即 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. 所以 $f(4x^2)$ 的定义域是 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

(2) 当 $0 \leq \operatorname{tg} x \leq 1$ 时, $k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

所以 $f(\operatorname{tg} x)$ 的定义域为 $k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

(3) 由 $0 \leq \ln x \leq 1$, 知 $1 \leq x \leq e$.

所以 $f(\ln x)$ 的定义域为 $[1, e]$.

例11 设 $f(x) = \frac{1}{x-3} + \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x-2)}$, 求

(1) $f(x)$ 的定义域;

(2) $f(\ln x)$ 的定义域;

(3) $f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域, 其中 $a > 0$.

$$\text{解 (1)} \quad \begin{cases} x-3 \neq 0, \\ \log_{\frac{1}{3}}(x-2) \geq 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x-3 \neq 0, \\ 0 < x-2 \leq 1. \end{cases}$$

解此不等式得

$$2 < x < 3.$$

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(2, 3)$.

(2) 由(1)的结果知, 应使 $2 < \ln x < 3$, 于是 $e^2 < x < e^3$.

所以 $f(\ln x)$ 的定义域为 (e^2, e^3) .

(3) 由(1)的结果知, 当 x 同时满足不等式 $2 < x+a < 3$ 和 $2 < x-a < 3$ 时, 函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 才有确定的值与之对应.

$$\text{由} \quad \begin{cases} 2 < x+a < 3, \\ 2 < x-a < 3, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2-a < x < 3-a, \\ 2+a < x < 3+a, \end{cases}$$

得在 $3-a \leq 2+a$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, 不等式组无解; 在 $3-a > 2+a$, 即 $a < \frac{1}{2}$ 时有 $2+a < x < 3-a$.

所以, 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $(2+a, 3-a)$.

例12 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f(\varphi(x))=1-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$, 并写出它的定义域.

解 因为 $f(x)=e^{x^2}$, 所以 $f(\varphi(x))=e^{[\varphi(x)]^2}$. 而 $f(\varphi(x))=1-x$, 因此 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$.

对上式两端取对数, 得

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}.$$

由 $\ln(1-x) \geq 0$, 有 $1-x \geq 1$, 即 $x \leq 0$.

所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$, $x \leq 0$.

例13 设 $f(x)=\sin x$, $\varphi(x)=a^x$, 求 $f(\varphi(x))$, $\varphi(f(x))$, $f[f(x)]$, $\varphi(\varphi(x))$.

解 $f[\varphi(x)] = \sin \varphi(x) = \sin a^x.$

$$\varphi\{f(x)\} = a^{f(x)} = a^{\sin x}.$$

$$f\{f(x)\} = \sin f(x) = \sin(\sin x).$$

$$\varphi\{\varphi(x)\} = a^{\varphi(x)} = a^{a^x},$$

例14 设 l 为大于零的常数, $f(x) \neq 0$ 且 $f(x+l) = \frac{1}{f(x)}$, 试证函数 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数.

证 因为 $f(x+2l) = f\{(x+l)+l\} = \frac{1}{f(x+l)}$

$$= \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} = f(x).$$

所以 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数.

例15 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{k}{x}$, k 为常数, 证明 $f(x)$ 为奇函数.

证 由方程组

$$\begin{cases} 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{k}{x}, \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = kx, \end{cases}$$

解得 $f(x) = \frac{k}{3} \left(\frac{2}{x} - x \right)$. 于是

$$f(-x) = \frac{k}{3} \left(-\frac{2}{x} + x \right) = -\frac{k}{3} \left(\frac{2}{x} - x \right) = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

习题 1-1

填空题 (第 1—4 题)

1. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$, 则函数 $f(e^x)$ 的定义域为_____

2. 已知函数 $f(x)=x^2-2$ 及 $g(x)=2x+1$, 则 $f[g(x)]=$ _____

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 2-x^2, & |x| \leq 2, \\ 2 & , |x| > 2, \end{cases}$

则 $f[f(4)]=$ _____.

4. 设函数 $y=\arcsin \frac{x-1}{4}$ 的反函数是 $y=\varphi(x)$, 则

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right)=$$

选择题(第5—8题)

5. $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是

- (A)有界函数. (B)单调函数. (C)周期函数.
(D)偶函数.

6. 函数 $y=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是

- (A)奇函数. (B)偶函数. (C)无界函数. (D)有界函数.

7. 函数 $f(x)=\lg(\sqrt{1+x^2}-x)$ 是

- (A)奇函数. (B)偶函数. (C)周期函数. (D)有界函数.

8. 设有函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$, 其中一个是奇函数, 一个是偶函数, 则必有

- (A) $\varphi(-x)+\psi(-x)=\varphi(x)-\psi(x)$.
(B) $\varphi(-x)+\psi(-x)=\psi(x)-\varphi(x)$.
(C) $\varphi(-x)\cdot\psi(-x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$.
(D) $\varphi(-x)\cdot\psi(-x)=-\varphi(x)\cdot\psi(x)$.

9. 求下列函数的定义域: