内容简介

这是一本介绍拉普拉斯变换与$\mathscr{Z}$变换及其应用的实用参考书。全书分为两大部分。第一部分论述变换方法及其应用，共7章：第1章回顾复数及复变函数的基本知识；第2第5章分别介绍这两种变换方法的概念与性质；第3、第6章为反变换；第5、第7章为应用。论述深入浅出，概念明确，注重实用，并逐渐达到一定水平。第二部分大量实用手册资料：I 拉普拉斯变换表；II 拉普拉斯反变换表；III 数字拉普拉斯反变换程序；IV 网络函数表；V $\mathscr{Z}$变换表。大部分资料为国内首次出版。

本书对象为与这两种变换方法及其应用有关领域，如电气工程、自动控制、计算机应用、应用数学、运筹学及其他工程学科的大、中专教师、学生、自学人员、研究和工程技术人员。本书可作为参考书、自学课本或实用手册。

实用拉普拉斯变换与$\mathscr{Z}$变换手册

胡锡恒　编

责任编辑：杨富强

*

电子工业出版社出版（北京市万寿路）

北京宏飞印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

开本：787×1092 1/16　印张：18　字数：435千字

1988年5月第1版　1988年5月第1次印刷

印数：0,001—3700册　定价 3.80元

统一书号：15290·472

ISBN7-5053-0170-5/TP·17

目　录

第一部分　变换方法及其应用

本书的第一部分扼要地介绍拉普拉斯变换和$\mathscr{Z}$变换，及其在电气、自动控制工程中的一些应用。这些变换方法，简言之，就是把描述物理对象（如电路网络，工业过程，化工过程，控制系统等）的连续的或离散的时间函数和方程，依据某一特定的数学规则，变化为复变数s或z的函数和方程，从而使所研究的问题得以简化。

我们采用由浅渐深的讲述方法，即有简明扼要的理论叙述，又有一定数量的例题帮助读者理解，同时，作为一本技术参考资料，除了第二部分手册的公式，图表较为丰富外，在第一部分也尽可能全面地反映有关的内容，例如两种变换的各项性质，求反变换时分母含多重二阶因子的情况等等，有些是在其它现行书著中难以查找到的。这两种变换方法的应用极为广泛，这里主要讲述与电气、自动控制有关的一些内容，并注意介绍数字滤波、数字仿真等新兴领域，这对引导读者向更深入的研究是有益处的。

在学习上述内容之前，我们首先要简单地回顾一下复数和复变函数的基本知识，这些知识对于掌握拉普拉斯变换和$\mathscr{Z}$变换是必不可少的。但是，这种回顾，将紧紧围绕着本书涉及的问题，而远没有论及到复变函数理论的深入部分。这样做既不使读者感到困难（尤其对于初学者），也能满足我们使用的需要。

1. 复数与复变函数

1.1 复数

先从二次方程方程的解谈起。二次方程

$$x^2+2bx+c=0 \tag{1.1}$$

是我们所熟知的，其中 b、c 都是实数。它的两个根可以表示为

$$x_{1,2}=-b\pm\sqrt{b^2-c} \tag{1.2}$$

当 $b^2\geqslant c$ 时，上式虽然成立。但实际的例子中不可避免地会出现 $b^2\geqslant c$ 的情况，这时，由于负数 b^2-c 的平方根在实数域里没有意义，我们必须重新定义一种数，来使方程(1.1)有解。这就是所谓的**虚数**，虚数单位定义为 -1 的平方根，即：

$$j=\sqrt{-1} \tag{1.3a}$$

在数学里常用 i 来表示虚数单位。但在电气工程领域，字母 i 一般表示电流，故就用字母 j 来表示虚数单位。

由虚数的定义，我们还很容易得到下列结果：

$$\left.\begin{aligned}j^2&=-1\\ j^3&=-j\\ j^4&=1\end{aligned}\right\} \tag{1.3b}$$

应该对初学者说明，虚数的“虚”字只是一个名称，数学家给它定下这个名字时并没有赋予它什么物理内容，比如“虚象”等。它仅仅是表示式(1.3)所表达的一种定义而已。

这样一来，当 $b^2<0$ 时，方程(1.1)的根就可以表示为：

$$x_{1,2}=-b\pm j\sqrt{c-b^2}$$

这样即含实数又含虚数的数就称为**复数**。

按照我们这一领域里的惯例，常常将复数记为**代数形式**，即：

$$s=\sigma+j\omega \tag{1.4}$$

其中 σ、ω 都是实数，σ 称为 s 的**实部**，$j\omega$ 称为 s 的**虚部**，它们可以记为

$$\mathrm{R_e}[s]=\sigma \tag{1.5a}$$

和

$$\mathrm{I_m}[s]=\omega \tag{1.5b}$$

当然 σ 或 ω 也可以为零，这时复数 s 就变成了实数或纯虚数。只有 σ 和 ω 同时为零，才说复数 s 为零。而对于两个复数，只有当它们的实部和虚部分别相等时，才说这两个复数是相等的。

例 1-1 方程(1.1)中，若 $b=1$，$c=2$，并将 x 记为 s，就得

$$s_1=-1+j$$
$$s_2=-1-j$$

例 1-1 中的 s_1 和 s_2 都是复数，而且它们的实部相等，虚部的数值相等，但符号相反。这时就称它们互为**共轭复数**，并用"*"作共轭的记号。如 s_2 是 s_1 的共轭复数，即 $s_2=s_1^*$；同理 $s_1=s_2^*$（亦可记为 $\bar{s}_2$）。由式(1.2)可以看出，如果二次方程有复根，则必定是共轭复根。我们还可以推记，任意实多项式如果有复根(多项的根就是令多项式等于零时所得方程的根)，它们必定是共轭地成对出现的。

1.2 复数的几何表示

在直角坐标系中，如果用横轴表示复数 s 的实部 σ，用纵轴表示虚部 $j\omega$，则 s 就可以用平面上的唯一的一个点来表示。而平面上的每一个点，也唯一地表示一个复数。

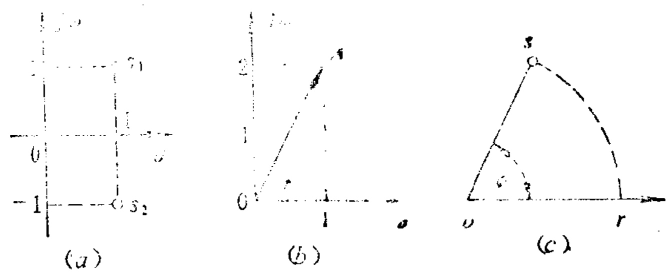

图 1-1 复数的几何表示

例 1-1 中的 s_1 和 s_2，就可以用图 1-1(a)上的两个点来表示。由于平面上的每一个点都表示一个复数，所以就叫这个平面为**复平面**。

如果 A 为 s 在复平面上的点，以坐标原点为起点，以 A 为终点的矢量 $\overline{OA}$ 也可以表示复数 s。矢量 $\overline{OA}$ 的长度 r 被定义为复数 s 的**模**或**幅值**记为 $|s|$；$\overline{OA}$ 与实轴正方向的夹角 φ 定义为复数 s 的**幅角**，并以逆时针为正方向，记为 $\arg(s)$ 或 $\angle s$。由图 1-1(b)可得

$$r=|s|=\sqrt{\sigma^2+\omega^2} \tag{1.6a}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\omega}{\sigma} \tag{1.6b}$$

注意，角 φ 所在的象限应由 ω 和 σ 的符号来确定，而不能由 ω/σ 的符号确定。例如 $1-j$ 和 $-1+j$，ω/σ 都等于 -1，而前者在第四象限，辐角为 $-\frac{\pi}{4}$，后者却在第二象限，辐角为 $\frac{3\pi}{4}$。

最后介绍另一种很常用的表示复数的形式，即**极坐标形式**。如图 1-1(c) 所示。r 是复数 s 的模，即 $|s|$，而 φ 就是它的幅角。其正方向为逆时针方向。只要这两个参数确定了，复平面上的点也象使用直角坐标 σ 与 ω 时一样被完全确定下来了。复数的极坐标记法是：

$$s=r\angle\varphi \tag{1.7}$$

显然，r 与 φ 和直角坐标 σ 与 ω 有下述对应关系

$$\sigma=r\cos\varphi \tag{1.8a}$$

$$\omega=r\sin\varphi \tag{1.8b}$$

式(1.4)就可写成

$$s=r(\cos\varphi+j\sin\varphi) \tag{1.9}$$

利用尤拉公式[注]

$$e^{j\varphi}=\cos\varphi+j\sin\varphi \tag{1.10}$$

则复数又可记成

$$s=re^{j\varphi} \tag{1.11}$$

称为复数的**指数形式**。

根据共轭复数的定理，不难发现，共轭复数的图形在直角坐标系里关于实轴是对称的，而在极坐标里关于极轴是对称的。对于各种表达式，有

$$s=r\angle\varphi, \qquad 则\ s^*=r\angle-\varphi$$

$$s=re^{j\varphi}, \qquad 则\ s^*=re^{-j\varphi}$$

1.3 复数运算

(1) 加减

复数的加减法，用复数的代数形式进行。两个复数的加减运算，就是它们的实部和虚部分别作加减运算。例如

$$s_1=\sigma_1+j\omega_1,\ s_2=\sigma_2+j\omega_2$$

则

$$s_1\pm s_2=(\sigma_1\pm\sigma_2)+j(\omega_1\pm\omega_2) \tag{1.12}$$

如果 s_1 与 s_2 互为共轭复数，即 $\sigma_1=\sigma_2$，$\omega_1=-\omega_2$ 则有：

$$s_1+s_1^*=2\sigma_1 \quad 为实数$$

$$s_1-s_1^*=j2\omega_1 \quad 为纯虚数$$

因为复数可以用矢量表示，所以它的加减法也符合矢量加减法的平行四边形法则。如图 1-2(a)、(b)所示。

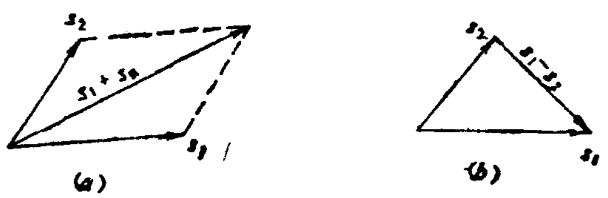

图 1-2 复数的加和减

(2) 乘除

复数的代数形式相乘，只要将虚数单位 j 看作代数运算中的一个“字母”，并注意到它自

[注]：尤拉公式证明如下

已知指数函数，正弦函数和余弦函数分别可以展为幂级数

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

则

$$e^{j\theta}=1+j\theta-\frac{\theta^2}{2!}-j\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^2}{4!}+\cdots\right)+j\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}+\cdots\right)$$

所以

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$$

身具有式(1.3b)所示的运算功能，就可以按多项式代数乘法的规则进行了。

例如，s_1 与 s_2 相乘，得

$$\begin{aligned} s_1 s_2 &= (\sigma_1 + j\omega_1)(\sigma_2 + j\omega_2) \\ &= \sigma_1\sigma_2 + j\sigma_2\omega_1 + j\sigma_1\omega_2 + j^2\omega_1\omega_2 \\ &= (\sigma_1\sigma_2 - \omega_1\omega_2) + j(\sigma_1\omega_2 + \sigma_2\omega_1) \end{aligned} \tag{1.13}$$

如果 s_1 与 s_2 互为共轭复数。则

$$s_1 \cdot s_2 = s_1 \cdot s_1^* = \sigma^2 + \omega_1^2 \tag{1.14}$$

即共轭复数的积是一个实数。这是一个很重要的性质，在复数除法中要用到它。

作复数除法时，分子分母同时乘以分母的共轭复数，使分母成为实数。

$$\begin{aligned} \frac{s_1}{s_2} &= \frac{(\sigma_1 + j\omega_1)(\sigma_2 - j\omega_2)}{(\sigma_2 + j\omega_2)(\sigma_2 - j\omega_2)} \\ &= \frac{(\sigma_1\sigma_2 + \omega_1\omega_2) + j(\sigma_2\omega_1 - \sigma_1\omega_2)}{\sigma_2^2 + \omega_2^2} \\ &= \frac{\sigma_1\sigma_2 + \omega_1\omega_2}{\sigma_2^2 + \omega_2^2} + j\frac{\sigma_2\omega_1 - \sigma_1\omega_2}{\sigma_2^2 + \omega_2^2} \end{aligned} \tag{1.15}$$

例 1-2 设 $s_1 = 1 + j$，$s_2 = 1 - j2$

则

$$s_1 + s_2 = 2 - j$$

$$s_1 - s_2 = 0 + j3$$

$$s_1 \cdot s_2 = (1+2) + j(1-2) = 3 - j$$

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{(1+2) + j(1+2)}{1^2 + 2^2} = -\frac{1}{5} + j\frac{3}{5}$$

如果用复数的指数形式作乘除运算，可以直接运用指数的性质，例如

$$s_1 \cdot s_2 = r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi)} \tag{1.16a}$$

$$s_1 / s_2 = r_1 e^{j\varphi_1} / (r_2 e^{j\varphi_2}) = r_1 / r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{1.16b}$$

例 1-3 例 1-2 中 s_1，s_2 的指数形成可以由式(1.6a)、(1.6b)求得

$$r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad \varphi_1 = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$r_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \qquad \varphi_2 = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{-2}{1}\right) = -1.1071$$

这里再次请读者注意，求 φ 时，应从复数的实虚部所在的象限来确定 φ 的具体取值。现有

$$s_1 = \sqrt{2}\, e^{j(\pi/4)} \qquad s_2 = \sqrt{5}\, e^{-j1.1071}$$

则

$$s_1 \cdot s_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}\, e^{j(\pi/4 - 1.1071)} = \sqrt{10} e^{-j0.3217}$$

$$= \sqrt{10}[\cos(-0.3217) + j\sin(-0.3217)] = 3 - j1$$

$$s_1 / s_2 = \sqrt{2} / \sqrt{5}\, e^{j(\pi/4 + 1.1071)} = \sqrt{\frac{2}{5}} e^{j1.8925} = -0.2 + j0.6$$

使用复数的指数(或极坐标)形式进行乘除运算要简易得多。但是，如果已知的复数是代数形式，而且数字又比较简单时，我们宁可直接用代数形式进行运算，而免去与指数形式

的互化手续，但这些互化的程序与复数运算法则一样十分重要，必须熟练掌握。

式(1.16a)和(1.16b)所表示的复数乘除在复平面有着明显的几何意义，复数 $s_1=re^{j\varphi}=r_1\angle\varphi_1$ 乘以复数 $s_2=r_2\angle\varphi_2$ 等于 s_1 的模 r_1 乘以 s_2 的模 r_2，然后逆时针旋转一个角度 φ_2，这样得到一个模为 r_1r_2，幅角为 $\varphi_1+\varphi_2$ 的复数，这就是 s_1 与 s_2 的积 $r_1r_2e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$。如图 1-3($a$)所示。

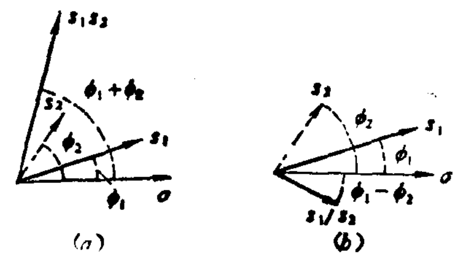

图 1-3 复数乘除的几何表示

同理，复数 s_1 除以 s_2，就等于以 s_1 的模 r_1 除以 s_2 的模 r_2，再顺时针转一个角度 φ_2 所得的复数。商的模为 r_1/r_2，辐角为 $\varphi_1-\varphi_2$。如图1-3(b)所示。

(3) 方根

复数与实数一样，也可进行乘方和开方运算。

设复数

$$s=re^{j\varphi}=r(\cos\varphi+j\sin\varphi) \tag{1.17}$$

则 s 的 n 次幂

$$s^n=(re^{j\varphi})^n=r^ne^{jn\varphi}=r^n(\cos n\varphi+j\sin n\varphi) \tag{1.18}$$

式(1.18)即是复数乘方公式。

例 1-4 求$(1+j)^6$

$\because$ $$1+j=\sqrt{2}\,e^{j(\pi/4)}$$

$\therefore$ $$\begin{aligned}(1+j)^6&=(\sqrt{2}\,e^{j(\pi/4)})^6\\&=(\sqrt{2})^6(e^{j(\pi/4)})^6\\&=2^3e^{j(3/2)\pi}\\&=8\left(\cos\frac{3}{2}\pi+j\sin\frac{3}{2}\pi\right)\\&=-8j\end{aligned}$$

如果采用式(1.17)右端的复数三角表示式 s 的 n 次方又可写成

$$s^n=r^n(\cos\varphi+j\sin\varphi)^n \tag{1.19}$$

比较式(1.18)和式(1.19)，可得

$$(\cos\varphi+j\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+j\sin n\varphi \tag{1.20}$$

这就是棣莫佛(De Moivre)公式。我们可以由此得到复数开方运算的法则。设 $z^n=s$，z 和 s 都是复数，且 s 已知，z 即是 s 的 n 次方根，记作 $z=\sqrt[n]{5}$。现令

$$z=\rho(\cos\theta+j\sin\theta),\ s=r(\cos\theta+j\sin\theta).$$

那么由式(1.20)

$$z^n=\rho^n(\cos n\theta+j\sin n\theta)=r(\cos\theta+j\sin\theta)$$

比较上式两边，得

$$\rho^n=r,\ \cos n\theta=\cos\varphi\ \text{或}\ \sin n\theta=\sin\varphi$$

注意到这些三角函数的周期是 2π，故有

$$\rho=\sqrt[n]{r},\ \theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots)$$

其中$\sqrt[n]{r}$是算术根，所以

$$z=\sqrt[n]{s}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+j\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \tag{1.21}$$

当$k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1$时，得到$n$个相等的根

$$z_0=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+j\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

$$z_1=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n}+j\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right)$$

$$\cdots\cdots$$

$$z_{n-1}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}+j\sin\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

当k以其他整数代入时，这些根又重复出现。例如取$k=n$时，

$$z_n=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2n\pi}{n}+j\sin\frac{\varphi+2n\pi}{n}\right)$$

$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+j\sin\frac{\varphi}{n}\right)=z_0$$

不难看出，上述几个根的模是一样的，而其幅角相间着$2\pi/n$。它们均匀地分布在以$\sqrt[n]{r}$为半径的圆周上。

例 1-5 求$\sqrt[4]{1+j}$

解 因为

$$1+j=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+j\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

所以，由式(1.21)

$$\sqrt[4]{1+j}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+j\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$$

取$k=0, 1, 2, 3$，得

$$z_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+j\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

$$z_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+j\sin\frac{9\pi}{16}\right)$$

$$z_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+j\sin\frac{17\pi}{16}\right)$$

$$z_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+j\sin\frac{25\pi}{16}\right)$$

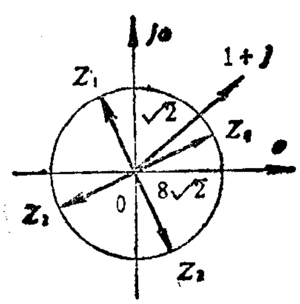

图 1-4 例 1-4 图

这四个根均匀分布在以原点为圆心，$\sqrt[8]{2}$为半径的圆周上(见图 1-4)。并且有

$$z_1=jz_0,\ z_2=-z_0,\ z_3=jz_0$$

1.4 复变函数基本知识

在实数域里，如果对于自变量x的每一个允许值，通过一个确定的法则，都能得到相应

的 y 值，这种对应关系，称为函数关系，即 y 是 x 的函数。一般记作 $y(x)$，如：$y=1+2x$，$y=2+x^2$ 等等。现在把自变量推广为前面所述的复变量，也就是说，对于复变量 s 的每一个允许值，都可以按照一个确定的法则，得到另一个复变量 F 的值，就称复变量 F 为复变量 s 的函数，简称**复变函数**，记为 $F(s)$。如 $F(s)=1+2s$，$F(s)=2+s^2$ 等等。$F(s)$ 也是复变量，因此也可以表示成 $F(s)=u+jv$ 的形式。其中 u 是 $F(s)$ 的实部，jv 是 $F(s)$ 的虚部。但我们常常更多地使用 $F(s)$ 的模和辐角，因此也将 $F(s)$ 记为 $F(s)=|F(s)|\angle F(s)$。$|F(s)|$ 与 $\angle F(s)$ 分别是 $F(s)$ 的模和辐角，它们各自也都是复变数 s 的函数。实变函数 $y=5(x)$ 可以用几何图形来表示，直观地帮助我们理解和研究函数的性质。但复变量 $s=\sigma+j\omega$ 含两个变量 σ 与 ω，它的函数 $F(s)$ 也是复变量，也含有两个变量，即 u 和 v 或 $|F(s)|$ 和 $\angle F(s)$。复变函数反映了这两对变量之间的对应关系，因此无法用一个平面几何图形完全表示出来。一个方法是用两个空间图形分别表示 $|F(s)|$ 和 $\angle F(s)$ 随复变数 $s=\sigma+j\omega$ 的变化，图 1-5 就是 $F(s)$ 的模 $|F(s)|$ 作为 s 的函数情况。

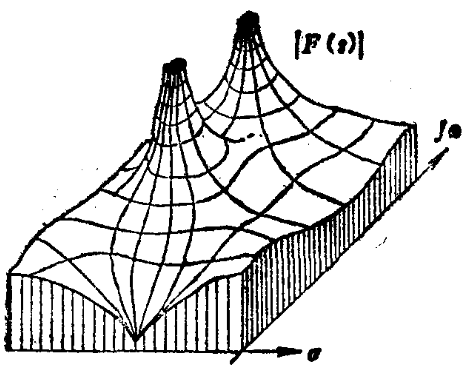

图 1-5 $|F(s)|$ 的三维几何表示

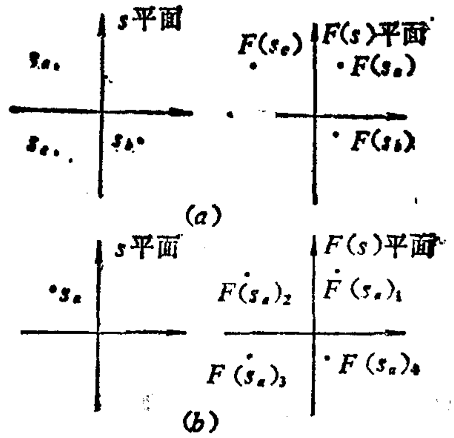

图 1-6 单值函数和多值函数

另一个方法是分别用两个平面表示 s 和 $F(s)$，如图 1-6 所示，如果对于 s 平面内的每一个点(代表一个 s 值)，$F(s)$ 平面内仅有一个点(代表一个 $F(s)$ 值) 与之对应，函数 $F(s)$ 就叫做单值函数，如果对于 s 平面的每一个点，$F(s)$ 平面内有不止一个点与之对应，那么 $F(s)$ 就是多值函数。这两种情况分别如图 1-6 的 (a) 和(b)。我们这本书中涉及到的函数都是单值函数。

下面简介我们要用到的几个复变函数基本概念：解析函数、函数的极点和零点。

如果一个复变函数 $F(s)$ 和它的所有各阶导数在 s 平面的某个区域内总是有意义的，那么，就说函数 $F(s)$ 在这个区域内是解析的。例如，函数

$$F(s)=\frac{1}{s+4}$$

只要 $s\neq-4$，$F(s)$ 及其各阶导数在整个 s 平面都存在，所以 $F(s)$ 在除 $s=-4$ 的全平面是解析的。

如果 $F(s)$ 在某区域除了 p_i 点外是解析的，即当 $s\to p_i$ 时，$|F(s)|$ 趋于无穷大，这种 p_i 点称为 $F(s)$ 的极点。若

$$\lim_{s\to p_i}[F(s)(s-p_i)^q] \qquad q=1,\ 2,\ 3,\ \cdots \tag{1.22}$$

为一有限值，就称 p_i 是 $F(s)$ 的 q 阶极点，一阶极点亦称单极点。

如果 $F(s)$ 在 z_i 点外是解析的，但当 $s\to z_i$ 时，$|F(s)|$ 趋于零，这种 z_i 点就称为 $F(s)$ 的零点。

若：

$$\lim_{s\to z_i}[F(s)(s-z_i)^{-q}] \tag{1.23}$$

为一个非零值，就称 z_i 是 $F(s)$ 的 q 阶零点。一阶零点亦称单零点。

极零点在图 1-5 中形象地表达出来了。$|F(s)|$ 的图象就象一片起伏不平的大地，直指云天(并趋于无穷)的尖锋，就是极点；而陷于最底层的深谷(由于 $|F(s)|\geqslant 0$，最低点是 0，即 $|F(s)|=0$)就是零点。由于它们的存在，整个“大地”才显得如此雄伟壮观。

如果 $F(s)$ 可以表示成 s 的有理分式形式，即 s 的两个多项式之比的形式，则 $F(s)$ 的极点就是其分母多项式的根，而零点则是其分子多项式的根。我们所要讨论的函数，大都属于这种形式。而且都是在除极点外的整个 s 平面解析的。

例 1-6 已知

$$F(s)=\frac{10(s+1)(s-2)^2}{s(s^2+2s+2)(s+4)^3}$$

分别令其分母多项式和分子多项式为 0，则可求出它的极零点。这个函数有单个实极点 0，复极点 $-1+j$ 和 $-1-j$，以及三阶实极点 -4。它的零点是 -1 和 2，其中 2 是二阶的。

1.5 留数定理

留数定理是复变函数理论的一个重要内容。在后面我们将要用它来简化拉普拉斯反变换和 $\mathscr{Z}$ 反变换的积分问题。

(1) 复变函数的积分

与实数函数积分的定义一样，我们也可以定义复变函数沿曲线 C 的积分。

$$\int_C F(z)dz=\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}F(\xi_k)\Delta z_k \tag{1.24}$$

其中 C 为函数 $F(z)$ 定义域内的一条光滑有向曲线，把 C 分成若干个弧段，ξ_k 是第 k 个弧段上的任一点，$\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$，如图 1-7 所示。

如果 C 是一条闭合的曲线，则积分就可记成：

$$\Phi_C F(z)dz \tag{1.25}$$

符号 Φ 表示闭合曲线积分，其中的箭头则表示逆时针为积分的正方向。

现将曲线积分(1.24)化为参数的积分。设光滑曲线可以由下述参数方程表示

$$z=z(t)\qquad t_\alpha\leqslant t\leqslant t_\beta \tag{1.26}$$

其正方向为参数 t 增加的方向，t_α 和 t_β 对应于曲线的起点 α 和 β，并且 $z(t)$ 的导数 $z'(t)\neq 0$，$(t_\alpha<t<t_\beta)$，则(1.24)的积分就可以表示为对参数 t 的积分，

$$\int F(z)dz=\int_{t_\alpha}^{t_\beta}F(z(t))z'(t)dt \tag{1.27}$$

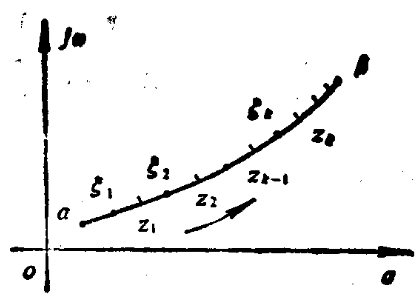

图 1-7 积分曲线

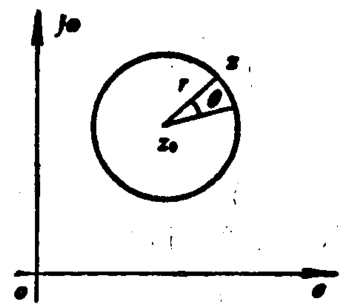

图 1-8 例 1-7 图

例 1-7 计算 $\oint \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$。其中 C 为以 z_0 为中心，r 为半径的圆周，以逆时针为正方向(图 1-8)，n 为整数。

曲线 C 的方程可以写成：

$$z=z_0+re^{j\theta}$$
$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

则：

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\int_0^{2\pi}\frac{jre^{j\theta}}{r^{n+1}e^{j(n+1)\theta}}\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{j}{r^n e^{jn\theta}}\,d\theta$$
$$=\frac{j}{r^n}\int_0^{2\pi}e^{-jn\theta}d\theta$$

当 $n=0$ 时，得

$$j\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi j$$

当 $n\neq 0$ 时

$$\frac{j}{r^n}\int_0^{2\pi}e^{-jn\theta}d\theta=\frac{j}{r^n}\int_0^{2\pi}(\cos n\theta-j\sin n\theta)\,d\theta=0$$

也就是

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\begin{cases}2\pi j, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases} \tag{1.28}$$

这个结果很重要，下面将要用到。

(2) 留数定理

设函数 $F(z)$ 在封闭曲线 C 上和内部，除了在 n 阶极点 a 外，处处都是解析的。这时，函数

$$F(z)=\frac{F(z)(z-a)^n}{(z-a)^n}$$
$$=\frac{H(z)}{(z-a)^n} \tag{1.29}$$

则 $H(z)$ 在曲线 C 上和内部处处解析。可以证明，解析函数的导数还是解析函数。因此，

$H(z)$可以在 a 点展开成泰勒级数:

$$H(z)=H(a)+H'(a)(z-a)+\frac{H''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots$$
$$+\frac{H^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\cdots \tag{1.30}$$

将上式代入(1.29)中,得

$$F(z)=\frac{H(a)}{(z-a)^n}+\frac{H'(a)}{(z-a)^{n-1}}+\frac{H''(a)}{2!\,(z-a)^{n-2}}+\cdots$$
$$+\frac{H^{(n-1)}(a)}{(n-1)!\,(z-a)}+\frac{H^{(n)}(a)}{n!}+\frac{H^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a)+\cdots \tag{1.31}$$

这种含$(z-a)$负次幂的级数,称为 $F(z)$在 a 点的罗伦级数。现对上式两边沿闭合曲线C积分,并注意到,由例 1-7 的式(1.28),等式的右边除了一项

$$\oint_C\frac{dz}{(z-a)}=2\pi j$$

外,其余的各项都为零,因此我们有

$$\oint_C F(z)dz=2\pi j\frac{H^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

或:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint F(z)dz=\frac{H^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}=\mathrm{Res}[F(z),a] \tag{1.32}$$

这就是说,复变函数 $F(z)$沿闭曲线 C 的积分,只与 $F(z)$在极点 a 处的罗伦展式的一个系数有关。我们就定义这个系数为函数 $F(z)$ 在极点 a 处的**留数**,通常记为 $\mathrm{Res}[F(z),a]$或简记为 Res,式(1.32)即是留数的定义式。

如果封闭曲线 C 中包含有 $F(z)$ 的多个极点,上述结果的推广就是著名**留数定理**。根据这个定理,**函数 $F(z)$ 沿封闭曲线C的积分,等于曲线 C 内所包含的 $F(z)$ 极点的留数之和**,即

$$\oint F(z)dz=2\pi j\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}_k \tag{1.33}$$

这一定理给我们计算复变函数的积分带来很大的方便。下面介绍几个留数的计算规则,它们可由式(1.29)和(1.32)直接得出。

规则 I 如果 a 为 $F(z)$的单极点,则

$$\mathrm{Res}[F(z),a]=\lim_{z\to a}(z-a)F(z) \tag{1.34}$$

规则 II 如果 a 为 $F(z)$的 m 阶极点,则

$$\mathrm{Res}[F(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{d_z^{\,m-1}}\left\{(z-a)^m F(z)\right\} \tag{1.35}$$

例 1-8 计算积分$\oint\limits_C\frac{ze^z}{z^2-1}dz$, C 是以原点为圆心,半径 $r=2$ 的圆周。

由于 $F(z)=\frac{ze^z}{z^2-1}$ 有两个一阶极点 $+1,-1$,而且它们都位于圆 C 之内,所以由留数

定理有

$$\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}dz=2\pi j\left\{\mathrm{Res}[F(z),\ 1]+\mathrm{Res}[f(z)-1]\right\}$$

即积分计算简化为求留数的计算。由规则 I，

$$\mathrm{Res}[F(z),1]=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{ze^z}{z^2-1}=\lim_{z\to 1}\frac{ze^z}{z+1}=\frac{e}{2}$$

$$\mathrm{Res}[F(z),1]=\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{ze^z}{z^2-1}=\lim_{z\to -1}\frac{ze^z}{z-1}=\frac{z^{-1}}{2}$$

因此

$$\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}dz=2\pi j\left(\frac{e}{2}+\frac{e^{-1}}{2}\right)=2\pi j ch1$$

例 1-9 计算积分 $\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}dz$，曲线 C 与例 1-8 相同。

在曲线 C 内，$z=0$ 是被积函数的一阶极点，$z_2=1$ 是二级极点。现先求它们的留数：对 $z_1=0$，由规则 I

$$\mathrm{Res}=\lim_{z\to 0} z\frac{e^z}{z(z-1)^2}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2}=1$$

对 $z_2=1$，由规则 II

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}&=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{d(z)}\left[(z-1)^2\frac{e^z}{z(z-1)^2}\right]\\&=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z}\right)\\&=\lim_{z\to 1}\frac{e^z(z-1)}{z^2}\\&=0\end{aligned}$$

从而，由留数定理

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)}dz=2\pi j(\mathrm{Res}_1+\mathrm{Res}_2)=2\pi j$$

应该说：从数学上来看上述介绍并不是很全面和严密的，但却符合前面提到的原则，即既不使读者感到困难，又能满足应用的要求。以后我们也按这一原则来处理问题，尽量用简单的语言来表达我们所要讨论的数学问题。

2. 拉普拉斯变换

本章着重阐述拉普拉斯变换的概念、性质和方法。在不少资料中，编著者们大都从傅立叶变换入手，导出拉普拉斯变换的概念。在数学上，这无疑是严密而精确的。然而，却给初学者们带来较多的困难。他们往往很难从抽象的数学定义去理解和接受变换、象函数等概念。为此，我们试图先避开较多的抽象数学推导，而通过一个简单的例子来说明所谓变换的目的和意义，由浅入深地介绍变换的含义，进而引出拉普拉斯变换的概念。同时，也把由傅立叶变换到拉普拉斯变换的基本推导列出，以便于完整地表达拉普拉斯变换的数学含义。

2.1 变换的目的和概念

在分析和解决问题时，我们常常对问题的数学表达形式进行某种改造，希望通过这种改造，能够用更简单、更通用的方法去解决较为复杂的问题。上述这种改造，在数学上就可以称为**变换**（或**映射**）。这种过程可以用图 2-1 的方框图来说明。由图可见，用变换方法解决问题一般包括以下 3 个步骤：

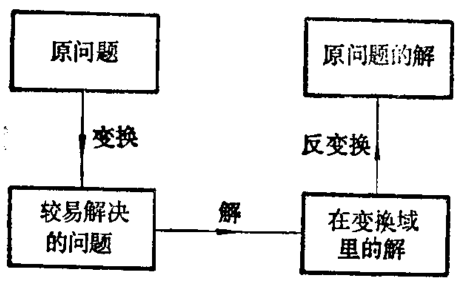

图 2-1 变换方法原理图

(1) 通过变换将原问题改造为较易解决的问题；

(2) 求出这个较易解的问题的解，这个解是在变换领域中的；

(3) 通过反变换将所得的解再改造回原问题讨论的领域中去，从而得到原问题的解。

现在通过一个简单的例子来说明上述解题过程。

例 2-1 解方程

$$x^{1.75}=3 \tag{2.1}$$

方程中的幂指数不是整数，要直接计算 3 的 1.75 次方根 $\sqrt[1.75]{3}$ 来求解 x 是非常麻烦的。但我们却可以通过某种改造使问题得到简化。现对方程两侧取对数，得

$$1.75 \lg x=\lg 3 \tag{2.2}$$

我们看到，通过这一处理，方程(1.1)左边的乘方运算被改造成了方程(2.2)左边的乘法运算，解方程(2.2)已毫无困难：

$$\lg x=\frac{\lg 3}{1.75}=0.2726$$

但得到的只是 $\lg x$。为了求出 x，我们可以查表或通过其他计算工具取反对数，则

$$x=\lg^{-1}(0.2726)=1.8733$$

上述过程可以用图 2-2 来描述，它是图 1-1 具体化的结果。

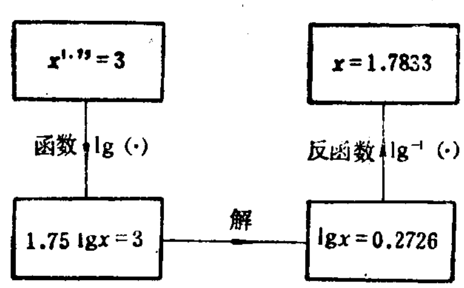

图 2-2 用对数解方程的步骤

从这个例子，我们可以总结出几个特点：

(1) 在例 2-1 中，我们使用的变换，实际上是函数 $y=\lg x$，对于每一个 x 值都赋于一个 y 值，即 $\lg(\cdot)$ 是单值函数；

(2) 反函数 $\lg^{-1}(\cdot)$ 也是单值函数；

(3) 在实数域里，$\lg x$ 的定义域为 $x>0$；

(4) 变换 $\lg(\cdot)$ 和反变换 $\lg^{-1}(\cdot)$ 都可以列成表册，以便查用。

上面我们用黑点来代替变量的符号，如 $\lg(\cdot)$ 就表示对数函数运算，它的变量可以是 x，也可以是其他变量。

在例 2-1 中，函数 $\lg(\cdot)$ 是在数 x 和数 y 之间进行变换的。更一般地，我们可以在其他类型的对象之间作变换。被变换的对象的全体常常称为**原空间**或**原域**，具体的对象就是原空间里的一个**元素**。原空间里的每一个元素都应对应着另一个空间中的至少一个元素。后者的全体就称为**变换空间**或**变换域**。上例中，函数 $\lg x=y$ 的原空间就是全体正实数 x，具体每一个 x 值(如 $x=1.8733$)就是原空间的一个元素，它对应着一个 y 值(如 $y=3$)，y 可以是任意实数，故实数的全体就是变换空间。这种对应关系可以用图 2-3 来形象地表达。

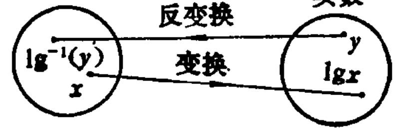

图 2-3 $\lg x$ 的变换

如果变换的对象是函数，就是函数变换。

下面定义**函数变换**：某一个变换 T，它把一类函数 $f(\cdot)$ 变换为另一类函数 $F(\cdot)$，则称 T 为函数 $f(\cdot)$ 和函数 $F(\cdot)$ 间的一个变换。$f(\cdot)$ 称为**原函数**，而 $F(\cdot)$ 则是 $f(\cdot)$ 在变换 T 下的**象函数**(即 $f(\cdot)$ 的映象)，或称为 $f(\cdot)$ 的 T 变换。这个关系的数学表达式为

$$T[f(\cdot)]=F(\cdot) \tag{2.3}$$

如果对于每一个可变换的函数 $f(\cdot)$，通过 T 变换都存在唯一的一个 $F(\cdot)$ 与之对应，则称 T 为唯一变换。反过来，对于每一个 $F(\cdot)$，也就唯一地存在一个 $f(\cdot)$ 与之相对应，这就是 T 的**反变换**。反变换记为

$$T^{-1}[F(\cdot)]=f(\cdot) \tag{2.4}$$

我们把式(2.3)和式(2.4)统一记为

$$f(\cdot)\longleftrightarrow F(\cdot) \tag{2.5}$$

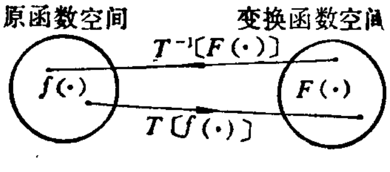

图 2-4 函数变换示意图

它表达了原函数 $f(\cdot)$ 和象函数 $F(\cdot)$ 之间的某种变换关系。(初学者注意，不是相等关系。)我们称式(2.5)两边的 $f(\cdot)$ 和 $F(\cdot)$ 为一个**变换对**。图 4-2 形象地说明了函数变换的关系。

其实，这种关系我们是十分熟悉的。例如，微分算子把 $f(t)$ 变为 $F(s)$

$$T[f(t)]=\frac{d}{ds}f(s)=F(s) \tag{2.6}$$

而积分算子则把 $F(s)$ 反变换为 $f(t)$

$$T^{-1}[F(s)]=\int_c^t F(s)ds=f(t) \tag{2.7}$$

这里的 $\frac{d}{ds}(\cdot)$ 和 $\int_c^t(\cdot)ds$ 就可以看作一对变换和反变换。