高等数学学习

GAODENG SHUXUE XUEXI

和解题指导

HE JIETI ZHIDAO

吴昌炽 主编

北京邮电大学出版社

高等数学学习和解题指导

主编　吴昌炽

编者　韦爱华　杨延齐

　　　闫小舟　赵启松

北 京 邮 电 大 学 出 版 社

·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习和解题指导/吴昌炽主编；韦爱华等编．北京：北京邮电大学出版社，1999.2

ISBN 7－5635－0319－6

Ⅰ．高… Ⅱ．①吴… ②韦… Ⅲ．高等数学－高等学校－学习参考资料 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 33312 号

出版发行：北京邮电大学出版社　电话：(010)62282185(发行部)
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号（邮编：100876）
经　　销：各地新华书店经售
印　　刷：河北省高碑店市印刷厂印刷
开　　本：850 mm×1 168 mm　1/32
印　　张：14.75
字　　数：383 千字
版　　次：1999 年 2 月第 1 版　1999 年 2 月第 1 次印刷
印　　数：1—2 500 册
书　　号：ISBN 7－5635－0319－6/O·19
定　　价：23.00 元

前　言

高等数学是一门重要的基础课，为高等工科等院校各专业的主干课程．初学者往往对其概念、定义和定理重视不够或理解不深，有时缺乏解题的思路，故需提高其分析和综合问题的能力及基本运算技能的熟练程度．

为此，为配合高等数学的学习，编者积长期的教学经验合作编写了本书．本书对高等数学中最主要的概念、定义、定理作了概括的叙述和分析，提出了基本要求和复习要点；系统地对高等数学的相关内容进行了范例分析，既有典型的概念题、计算题，亦有证明题和综合题、应用题；除基本题外亦有一题多解的不同方法和计算技巧，其中包括了部分历届的研究生入学试题．因此，本书既可配合本科学生作复习和习题课之用，亦可用于为报考研究生复习高等数学时作重要参考书．

参加本书的编者有吴昌炽（第一至三讲、第十九至二十四讲）、韦爱华（第四至六讲、附录模拟试题）、杨延齐（第七至十讲）、闫小舟（第十一讲至十四讲）、赵启松（第十五至十八讲）．全书由吴昌炽统稿．

本书经原邮电部公共课教学指导委员会评审，认为是同类数学参考书中比较突出的一种而推荐出版．本书于1995年12月完成初稿已在本校使用三届，现又做了部分修改和补充．

由于编者的业务水平，本书定有很多不足之处，望读者提出批评和指正，以便再版时作进一步的修正．

编　　者

1998年5月

于北京邮电大学

目　　录

第一篇　函数、极限、连续

高等数学与初等数学有着密切的联系，但高等数学是以变量为研究的对象，所以通常称之为变量数学，而函数关系就是变量间的依赖关系．极限思想和方法是研究变量的一种最基本的思想和方法，始终贯串在整个微积分学的全过程中，是建立微分、积分、级数等重要概念的理论基础．

本篇将分三讲，内容分别为

（1）函数．

（2）极限(数列极限和函数极限)．

（3）连续函数．

第一讲　函　数

一、基本要求

1．正确理解函数的概念．

2．了解有关函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性等概念和在其图像中所具有的特点．

3．了解反函数和复合函数的性质及其图像．

4．熟悉基本初等函数的性质及其图像．

5．对简单的实际问题列出函数关系．

二、复习要点

1. 正确理解函数的概念

函数定义 设 X, Y 为实数 R 的非空子集，如果存在一个对应法则 f 使得对每个 $x \in X$ 都有唯一确定的 $y \in Y$ 与之对应，则称 f 是定义在 X 上的函数，记为 f: $X \to Y$.

y 称为 x 所对应的函数值，记为 $y = f(x)$. X 称为函数 f 的定义域，记为 $D_f = X$. 全体函数值所组成的集合称为函数的值域，记为 $U_f = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$, x 称为自变量，y 称为因变量.

为了帮助读者能完整地理解函数概念，再强调下面几点：

(1) 关于函数的定义

函数定义中包含定义域、对应关系和值域三个要素. 其中前面二者是缺一不可的、起决定作用的，而值域亦随之而确定了. 因此，关于两个函数相等，就应该是只有当两个函数的定义域和对应规律完全相同.

(2) 关于函数的表达形式

其中最常见的形式是用式子（或称解析式）来表示. 但不是唯一的形式，还可以是用列表或图形或语句等其它形式来表示函数. 但用式子表达的函数更便于作理论分析（这一点将在以后的学习中逐步得到理解的）.

(3) 关于分区（分段）定义的函数

当用式子表示函数时，亦不只限于用一个式子. 在自变量不同的变化范围内用不同式子来表示的所谓分区定义函数，在整个定义域上仍只表示一个函数，而不能看作几个不同的函数，初学者往往在这里出现概念性错误，要引起注意.

(4) 函数与函数值的联系与区别

例 $f(x)$ 是表示函数的记号，是一个变量；而 $f(a)$ 则表示该

函数$f(x)$在自变量 x 取值 $x=a$ 时所对应的函数值，它是一个定值.

(5) 学会熟练地确定函数的定义域

当用式子表示函数时，通常确定其定义域的方法是：凡一切使式子有定义的 x 可能取值（实数）的集合，即为该函数的定义域. 例如：若函数为偶次根式时其定义域则应使根式下的算式取非负自变量的值；若函数为分式时，则应考虑使分母不为零的 x 的值；若函数为对数函数时，则它的定义域由能使真数表达式大于零的数组成；等等.

但在考虑实际问题时（如物理问题、几何问题），则其定义域应由其所研究问题的实际意义来确定. 例如离地面 44.1 m 处自由下落物体，落体高度 H 与下落时间 t 的函数关系为

$$H = 44.1 - \frac{1}{2}gt^2 = 44.1 - 4.9t^2,$$

可见，它的定义域是 $[0, 3]$ 而不是 $[0, +\infty)$.

2. 掌握函数的一些基本特性

函数的基本特性是指函数的有界性、单调性、周期性、奇偶性等概念和初步的判别方法. 在这里需要强调指出的是：

(1) 函数单调性、有界性一定要结合具体的定义区间来讨论和判别. 例如$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$[a,b]$区间上是有界函数$(a>0)$，但在$(0,+\infty)$区间上却是无界的. 例如$f(x)=\sin x$ 在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$区间上是单调增加函数，但在 $[0, \pi]$ 区间上却不是单调函数.

(2) 函数的定义域具有对称性，是它为奇(偶)函数的必要条件. 因此，总是在以形如$(-l,l)$的对称区间上讨论函数的奇偶性.

(3) 周期性函数必须定义在整个轴上讨论才有意义.

下面还将提供一些常用的最基本的结论：

① 两单调增加(减少)函数的和(积)仍是单调增加(减少)函数.

② 两奇(偶)函数的和仍是奇(偶)函数.

③ 两奇(偶)函数的积是偶函数,一奇函数与一偶函数的积也是奇函数.

④ 若 $y=f(x)$是偶函数, $x=\varphi(t)$是奇(偶)函数,则 $y=f[\varphi(t)]$ 是偶函数.

⑤ 若 $y=f(x)$, $x=\varphi(t)$都是奇函数, 则 $y=f[\varphi(t)]$ 是奇函数.

⑥ 若$f(x)$是偶函数, 且$f(x)\neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$是偶函数.

以上结论, 读者都可以由定义验证.

3. 掌握复合函数的概念

掌握复合函数的概念, 并能熟练地将一个较复杂的函数引入恰当的中间变量, 将该函数分解成由若干个简单的函数(初等函数)复合而成. 这对今后正确计算复合函数的导数十分重要.

在这里还需要指出一点, 即关于复合函数的定义域问题要特别留意. 例如 $y=\sqrt{1-x}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x$ 复合而成. 显然, 仅当 $u=1-x\geqslant 0$, 即 $x\leqslant 1$ 时, 形成的复合函数才有意义. 即 $y=\sqrt{1-x}$ 的定义域是 $(-\infty, 1]$, 它只是函数 $u=1-x$定义域 $(-\infty, +\infty)$ 的一部分. 又例如 $y=\arccos u$, $u=\sqrt{2+x^2}$, 恰因 u 的值域为 $[\sqrt{2}, +\infty)$ 与 $y=\arccos u$ 的定义域为 $[-1, 1]$ 无公共部分, 因而不能构成复合函数, 即 $y=\arccos\sqrt{2+x^2}$ 是无意义的.

4. 掌握基本初等函数的有关知识

应掌握基本初等函数的定义域、值域、函数图像及其基本性质, 要知道双曲函数定义和图像.

5. 掌握反函数的有关知识

掌握反函数的概念，其图像与直接函数之间的关系（二者图像关于第一、第三象限的分角线互为对称）.

三、范例分析

例 1 求下列函数的定义域.

（1）$y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-1}+\sqrt[3]{3x+1}$;

（2）$y=\lg(5x+1)+\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$.

解 （1）应使 $x^2-1\neq0$，即 $x\neq\pm1$，又要求 $4-x^2\geqslant0$，即 $|x|\leqslant2$，所以定义域为 $[-2,\ -1)$，$(-1,\ 1)$，$(1,\ 2]$.

（2）因对 $\lg(5x+1)$ 要求 $5x+1>0$，得 $x>-\dfrac{1}{5}$；又因对 $\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$ 要求 $\left|\dfrac{2x}{1+x}\right|\leqslant1$，即 $-1\leqslant\dfrac{2x}{1+x}\leqslant1$，于是 $-1\leqslant2-\dfrac{2}{1+x}\leqslant1$，即 $-3\leqslant-\dfrac{2}{1+x}\leqslant-1$，解得 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant1$，所以 y 的定义域为 $\left(-\dfrac{1}{5},\ 1\right]$.

例 2 求下列函数的定义域和值域.

（1）$y=\sqrt{2+x-x^2}$；　　（2）$y=\dfrac{1}{\sin\pi x}$.

解 （1）$y=\sqrt{2+x-x^2}=\sqrt{(2-x)(1+x)}$，因当 $(2-x)(1+x)\geqslant0$ 时，y 才有确定值，于是可解得定义域为 $-1\leqslant x\leqslant2$；又因 $y=\sqrt{\dfrac{9}{4}-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}\leqslant\dfrac{3}{2}$，所以，值域为 $0\leqslant y\leqslant\dfrac{3}{2}$.

（2）$y=\dfrac{1}{\sin\pi x}$

因当 $\sin \pi x \neq 0$ 时，y 值才确定，因此 $\pi x \neq k\pi$，所以 y 的定义域为 $x \neq k$（$k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$），其值域为

$$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

例3 求 $f(x)$.

(1) 设 $f(x+1)=x^2-3x+2$；

(2) 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$；

(3) 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$，$(x>0)$.

解 (1) 因为 $f(x+1)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$=[(x+1)-2][(x+1)-3]$，所以

$$f(x)=(x-2)(x-3).$$

(2) 因为 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，所以

$$f(x)=x^2-2.$$

(3) 因为 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}}$，所以

$$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \quad (x>0).$$

例4 下列函数组能否构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，如能构成则指出该复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域及值域.

(1) $y=f(u)=2^u$，$u=\varphi(x)=x^2$.

(2) $y=f(u)=\ln u$，$u=\varphi(x)=1-x^2$.

(3) $y=f(u)=\begin{cases} 1, & |u|<1; \\ 0, & |u|=1; \\ -1, & |u|>1. \end{cases}$ $u=\varphi(x)=\mathrm{e}^x$.

解 (1) 能够复合

$$y=f[\varphi(x)]=2^{x^2}, x\in(-\infty,+\infty), y\in[1,+\infty).$$

(2) 能够复合

$$y = f[\varphi(x)] = \ln(1 - x^2), x \in (-1,1), y \in (-\infty,0).$$

(3) 能够复合

$$y = f[\varphi(x)] = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1; \\ 0, & |e^x| = 1; \\ -1, & |e^x| > 1. \end{cases}$$

即

$$y = f[\varphi(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x > 0. \end{cases}$$

例 5 判别下列函数是否为周期函数，并求它们的周期.

(1) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$;

(2) $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$.

解 (1) 因为$f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + \frac{1}{2}\sin 2(x+2\pi)$

$$= \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x = f(x),$$

所以，$f(x)$是周期函数. 现证 2π 为$f(x)$的周期.

若 $0<l<2\pi$，且 $l\neq\pi$，则

$$f(0+l) = \sin l + \frac{1}{2}\sin 2l = \sin l(1+\cos l) \neq 0,$$

而$f(0)=0$,所以$f(0+l)\neq f(0)$,即 l 不是$f(x)$的周期.

若取 $l=\pi$，则

$$f\left(\frac{\pi}{2}+l\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right) + \frac{1}{2}\sin 2\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right) = -1,$$

但 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$，所以，

$$f\left(\frac{\pi}{2}+1\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

即 π 亦不是$f(x)$的周期，所以，证得 2π 是$f(x)$的周期.

(2) 因 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\cos x|+|\sin x|=f(x)$，所以，$f(x)$是周期函数.

若$0<l<\frac{\pi}{2}$，则$f(0+l)=\sin l+\cos l>1$，

但$f(0)=1$，所以$f(0+l)\neq f(0)$.

可见，l不是$f(x)$的周期，并证得$\frac{\pi}{2}$是$f(x)$的周期.

例 6 证明下列函数在所给区间内是单调函数.

(1) $f(x)=\tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$；

(2) $f(x)=\cos x \quad (0\leqslant x\leqslant \pi)$；

(3) $f(x)=x^3+x \quad (-\infty,\ +\infty)$

证 (1)
$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=\tan x_2-\tan x_1\\&=\frac{\sin x_2}{\cos x_2}-\frac{\sin x_1}{\cos x_1}\\&=\frac{\sin x_2\cos x_1-\cos x_2\sin x_1}{\cos x_1\cos x_2}\\&=\frac{\sin(x_2-x_1)}{\cos x_1\cos x_2}.\end{aligned}$$

当$-\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$时，$\cos x_1>0$，$\cos x_2>0$，$\sin(x_2-x_1)>0$，得$f(x_2)-f(x_1)>0$，所以，$f(x)=\tan x$在$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$区间上为单调增加函数.

(2)
$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=\cos x_2-\cos x_1\\&=-2\sin\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}.\end{aligned}$$

当$0<x_1<x_2<\pi$时，

$$0<\frac{x_2+x_1}{2}<\pi,\quad 0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2}.$$

于是，$\sin\dfrac{x_2+x_1}{2}>0$，$\sin\dfrac{x_2-x_1}{2}>0$，由此得

$$f(x_2)-f(x_1)<0.$$

所以，$f(x)=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上为单调减少函数.

(3)
$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=(x_2^3+x_2)-(x_1^3+x_1)\\&=(x_2^3-x_1^3)+(x_2-x_1)\\&=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+1)\\&=(x_2-x_1)\left[\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2+1\right]\\&>0.\end{aligned}$$

所以$f(x)=x^3+x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为单调增加函数.

注：关于函数单调性的讨论，待以后学习导数概念后，还将提供新的有效方法.

例 7 设$\varphi(x)$，$\psi(x)$，$f(x)$都是单调增加函数，证明：

若$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$，则

$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$.

证 因$\varphi(x)\leqslant f(x)$，所以$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[\varphi(x)]$，又因$\varphi(x)\leqslant f(x)$，且$f(x)$是单调增加函数，所以

$$f[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)],$$

于是证得
$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)].$$

同理，因$f(x)\leqslant\psi(x)$，所以

$$f[f(x)]\leqslant\psi[f(x)].$$

又因$f(x)\leqslant\psi(x)$，且$\psi(x)$是单调增加函数，所以

$$\psi[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)],$$

于是又证得 $f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$.

所以，
$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)].$$

例 8 验证 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ $(-\infty,+\infty)$ 的反函数就是它本身，并找

出函数 $y=\dfrac{ax-b}{cx-d}$ 的反函数就是它本身的条件.

解 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，有 $y+yx=1-x$，得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$，所以，其反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，即为其本身.

又由 $y=\dfrac{ax-b}{cx-d}$，有

$$cxy-dy=ax-b,$$
$$x(cy-a)=dy-b,$$

得 $x=\dfrac{dy-b}{cy-a}$，所以，反函数为

$$y=\frac{dx-b}{cx-a}.$$

可见，若要使反函数等于其自身，即 $y=\dfrac{ax-b}{cx-d}$，则条件应为 $a=d$.

例 9 作 $y=\sin|x|$ 的图像.

解 $y=\sin|x|$ $(-\infty,\ +\infty)$ 是偶函数，其图像应关于 Y 轴对称. 因此，可先作 $y=\sin x$ $(x\geqslant 0)$ 的图像，再作 Y 轴对称，得 $x<0$ 部分的图像，于是得整个图像. 见图 1-1.

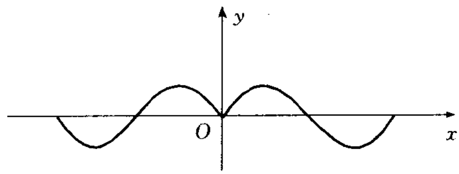

图 1-1

例 10 已知 $y=f(x)$ 的图像，试作下列函数的图像.

(1) $y=-f(x)$;

(2) $y=f(-x)$;