纯粹数学与应用数学专著 第11号

亚纯函数的奇异方向

庄圻泰 著

科学出版社

1.622
6

纯粹数学与应用数学专著　第 11 号

亚纯函数的奇异方向

庄 圻 泰　著

科 学 出 版 社

1 9 8 2

内 容 简 介

本书阐述亚纯函数的奇异方向及有关的理论，从 Picard 定理开始，重点论述亚纯函数的充满圆及 Borel 方向．叙述严谨，由浅入深．

本书可供数学工作者，高等院校数学专业师生及有关科研人员参考．

纯粹数学与应用数学专著 第 11 号

亚纯函数的奇异方向

庄圻泰 著

责任编辑 魏茂乐

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1982 年 8 月第一版 开本：850×1168 1/32

1982 年 8 月第一次印刷 印张：7 1/4

印数：精 1—2,650 插页：精 3 平 2

平 1—3,450 字数：188,000

统一书号：13031·1947

本社书号：2647·13—1

定价： 布面精装 2.35 元

平 装 1.40 元

科技新书目：28-精 35 平 36

序　　言

在本书中，亚纯函数的奇异方向[1]是指 Julia 方向及 Borel 方向. 回顾亚纯函数的值分布理论的历史发展，可以说是从 K. Weierstrass 的工作开始的，而它的主要来源是 Picard 定理. 这个理论可以分为模分布和幅角分布两个方面. 在模分布方面，Picard 定理及 Borel 定理是两个具有代表性的定理. 在幅角分布方面，和这两个定理相应的具有代表性的定理分别是 Julia 方向及 Borel 方向的存在定理. Julia 方向的存在性是 G. Julia 根据 P. Montel 的正规族理论首先发现的，后来又找到其它的证明方法. Borel 方向的存在性的证明是由 G. Valiron 借助于 R. Nevanlinna 的亚纯函数的理论并且应用关于多项式的模的 Boutroux-Cartan 定理而首先完成的. Borel 方向这个名称是 G. Valiron 给出的，后来有人称它为 Borel-Valiron 方向.

本书的内容从 Picard 定理开始. Picard 定理通常叙述成为两个定理：Picard 第一定理及 Picard 第二定理. 第一定理是关于整函数的一个定理；第二定理是关于在一个本性奇点附近的全纯函数的定理. 在第一章中首先给出 Picard 第一定理的一个证明，同时也证明在一种形式下的 Schottky 定理[2]. 证明方法是著名的 Borel 的初等证明中的方法，但证明的细节与原来的证明相差很多. 利用简单的变换，我从一种形式下的 Schottky 定理得出另一种便于应用的形式下的 Schottky 定理，然后应用它证明了 Picard 第二定理. 到此为止，Picard 定理的初等证明全部完成.

根据 Schottky 定理的后一种形式，略加推广以后，也可以证明在一个本性奇点附近的全纯函数的充满圆的存在性，然后利用充

1) 关于奇异方向这个概念参阅[2]及[21 b, p.53].

2) 这个证明，1948 年我曾在北京大学数学系的一次学术报告会上讲过.

满圆就很容易证明这样一个函数的 Julia 方向的存在定理．在这个证明中没有涉及到正规族的理论．不过正规族的方法有一个优点，就是利用这个方法不仅可以得出 Julia 方向，而是从每一个正规性定则都可以得出一种相应的方向．因此我就写出了全纯函数的正规族和亚纯函数的正规族的基本理论，并且应用它证明了在一个本性奇点附近的全纯函数和具有一个渐近值的亚纯函数的 Julia 方向的存在性．

第二章、第三章及第四章为第五章作准备，第五章是关于亚纯函数的充满圆及 Borel 方向的内容．在这里也是先证明充满圆的存在性，然后利用充满圆证明 Borel 方向的存在定理．读者将看到在这个证明中不仅用了 R. Nevanlinna 的亚纯函数理论中的基本定理和关于多项式的模的 Boutroux-Cartan 定理，而且型函数也起着重要的作用，尤其在无穷级亚纯函数的情形，型函数更是不可缺少的．实际上，型函数的概念就是 O. Blumenthal 在研究无穷级整函数的过程中引进的[3]．他利用型函数给出了无穷级整函数的级的定义．后来熊庆来在他的关于无穷级亚纯函数的研究中，给出了无穷级亚纯函数的级的一个较好的定义，在其中也用了型函数．在 O. Blumenthal 和熊庆来的工作中，级的存在性的证明都比较长，我在 1961 年的一项工作中给出了简单的证明，同时我也较简单地证明了 G. Valiron 所引进的有穷正级亚纯函数的精确级的存在性．第四章的内容就来自这项工作和我的另一项工作．

第六章的内容是 A. Rauch 的一个定理的证明和根据这个定理所得的第五章中几个定理的推广．A. Rauch 的这个定理颇为重要，除去在这一章中的应用外，还有其它应用，例如在第八章中一个定理的证明就用了 A. Rauch 的这个定理．

在第七章中，对于亚纯函数与其导数的增长性的比较进行了研究，这一章的内容是我在 1951 年做的一项工作．在下一章提出的问题中将用到这项工作中的结果．

关于 Borel 方向存在下列问题：设 $f(z)$ 为一有穷正级 ρ 的亚纯函数．根据第七章中的一个结果函数 $f(z)$ 的导数 $f'(z)$ 的级亦

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

为 ρ. $f(z)$ 和 $f'(z)$ 是否有相同的 ρ 级 Borel 方向? 关于这个问题我在 1937 年得到下列结果:

设 Δ 是一个 $\rho\,(0<\rho<\infty)$ 级的亚纯函数 $f(z)$ 的一条 ρ 级的 Borel 方向. 如果在一个含 Δ 于其内部的角内 $f(z)$ 有两个 Borel 意义下的例外值 a 及 b, 则 Δ 也是 $f(z)$ 的导数 $f'(z)$ 的一条 ρ 级的 Borel 方向. 特别若 a 及 b 二值中有一个为无穷, 则 Δ 也是 $f(z)$ 的所有各级导数 $f^{(n)}(z)\,(n\geqslant 1)$ 的一条公共的 ρ 级的 Borel 方向.

这个结果我曾在一篇简报形式的短文中发表[9a]. 1965 年当我对这项工作进行整理并准备将这个结果全文发表时, 我发现在这个结果中的假定下, 实际上可以得出更强的结论, 其中一部分是: 将级大于 1 的值点都忽略不计, 只考虑级为 1 的值点, 则 Δ 仍保持是函数 $f(z)$ 的一条 ρ 级的 Borel 方向. 这刚好将 G. Valiron 的一个关于整函数的定理[21a,chp.3]推广到 Borel 方向. 他的这个定理, 按照原来的字句叙述如下:

If a function $F(z)$ has a value exceptional B for the whole aggregate of zeros, then there can be no other value exceptional only for simple zeros. 于是我就引进了单充满圆序列及单 Borel 方向两个概念. 这两个概念的引进不仅简化了一些定理的叙述而且也是很自然的. 这些结果已发表在我最近的一篇论文中[9,e], 这篇论文是第八章的主要内容.

本书是在我过去写的讲义的基础上写成的. 本书中的定理, 除去一些明显的以外, 都有详细的证明. 读者只要具备大学复变函数课程的知识, 就能读懂本书. 一切外国数学家的名字在本书中都用原名, 没有用译名.

庄圻泰

1979 年 11 月

目　录

第一章 Picard 定理

§1.1 一个一般性定理

Picard 的关于整函数的定理[18]：一个非常数的整函数取每一个有穷值，最多除去一个例外值，是利用模函数证明的. Borel[4] 给出这个定理的一个初等证明，其中只用到全纯函数及增函数的一些初等性质而没有用到模函数，这个初等证明对于 Picard 定理的发展产生了深远的影响.

为了同时得出上述 Picard 定理及 Schottky 定理，在本节中我们将证明关于在一区域 $|z|<\rho$ $(0<\rho\leqslant\infty)$ 为全纯的函数 $f(z)$ 的一个一般性定理，证明的方法，在本质上与 Borel 的初等证明是一致的，但在细节上却相差很多.

引理 1.1 设 $f(z)$ 为一函数在一区域 $|z|<\rho$ 为全纯. 设 $M(r)$，$A(r)$ 及 $B(r)$ 为三个实函数，分别于 $0<r<\rho$ 定义如下：

$$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|,\ A(r)=\max_{|z|=r}\operatorname{Re}\{f(z)\},$$
$$B(r)=\max_{|z|=r}-\operatorname{Re}\{f(z)\}.$$

则 $M(r)$，$A(r)$ 及 $B(r)$ 均于 $0<r<\rho$ 为非减.

证明 若 $f(z)$ 非为常数，则根据最大模原理，$M(r)$ 为 r 的增函数. 此时 $A(r)$ 及 $B(r)$ 亦为 r 的增函数，因为 $e^{A(r)}$ 及 $e^{B(r)}$ 分别为函数 $e^{f(z)}$ 及 $e^{-f(z)}$ 的模于 $|z|=r$ 的最大值. 若 $f(z)$ 为一常数，则 $M(r)$，$A(r)$ 及 $B(r)$ 均为常数.

引理 1.2 若函数 $f(z)$ 在一区域 $|z|<\rho$ 为全纯，则于 $0<r<R<\rho$ 有：

$$M(r)\leqslant\frac{2R}{R-r}\{A(R)+2|f(0)|\},\tag{1.1}$$

$$M(r) \leqslant \frac{2R}{R-r}\{B(R)+2|f(0)|\}. \tag{1.2}$$

其中 $M(r)$, $A(r)$ 及 $B(r)$ 为引理 1.1 中定义的函数.

这个引理来自 J. Hadamard[10], E. Borel[4] 及 C. Carathéodory[13] 的工作.

证明 先考虑一函数 $f(z)$ 在一圆 $|z|<R$ 内为全纯并满足条件:

$$f(0)=0, \quad \operatorname{Re}\{f(z)\}<A,$$

其中 $A>0$ 为一常数. 在以下我们证明不等式

$$M(r) \leqslant \frac{2Ar}{R-r} \tag{1.3}$$

于 $0<r<R$ 成立.

为此引进辅助函数

$$g(z)=\frac{f(z)}{2A-f(z)}=\frac{P+iQ}{2A-P-iQ}, \quad P=\operatorname{Re} f,$$

$$Q=\operatorname{Im} f.$$

由于 $2A-P>A$, 分母恒不等于零, 故 $g(z)$ 于 $|z|<R$ 为全纯, 并有

$$|g(z)|^2=\frac{P^2+Q^2}{(2A-P)^2+Q^2}.$$

由条件 $P<A$ 显然有 $P+|P|<2A$. 故有 $|g(z)|<1$. 另外有 $g(0)=0$. 故根据 Schwarz 引理,

$$|g(z)| \leqslant \frac{|z|}{R}$$

于 $|z|<R$. 然后由恒等式

$$f(z)=\frac{2Ag(z)}{1+g(z)},$$

即得

$$|f(z)| \leqslant \frac{2A\frac{|z|}{R}}{1-\frac{|z|}{R}}=\frac{2A|z|}{R-|z|}.$$

现在设 $f(z)$ 为一函数在一区域 $|z|<\rho$ 为全纯．若 $f(z)$ 为一常数，则 (1.1) 及 (1.2) 式显然成立．假定 $f(z)$ 非为常数，设 r 及 R 为二值使 $0<r<R<\rho$，则函数 $F(z)=f(z)-f(0)$ 于 $|z|<R$ 为全纯，并根据引理 1.1 的证明，满足条件：

$F(0)=0$,

$\mathrm{Re}\{F(z)\}=\mathrm{Re}\{f(z)\}-\mathrm{Re}\{f(0)\}<A(R)-\mathrm{Re}\{f(0)\}$.

故可应用 (1.3) 式并得

$$\max_{|z|=r}|F(z)|\leqslant\frac{2r}{R-r}\{A(R)-\mathrm{Re}(f(0))\}.$$

故有

$$M(r)\leqslant|f(0)|+\max_{|z|=r}|F(z)|\leqslant|f(0)|$$

$$+\frac{2r}{R-r}\{A(R)-\mathrm{Re}(f(0))\}$$

$$<\frac{2R}{R-r}\{A(R)+2|f(0)|\}.$$

这就证明了 (1.1) 式．再应用 (1.1) 式到函数 $-f(z)$，又得 (1.2) 式．

引理 1.3 设 $U(r)$ 为在一区间 $0<r<\rho$ 的一个非负并且非减的函数．设 a 及 b 为二正数，使 $b\geqslant 2a$ 并且 $b\geqslant 8a^2$．假定不等式

$$U(r)<a\,\overset{+}{\log}\,U(R)+a\log\frac{R}{R-r}+b \tag{1.4}$$

于 $0<r<R<\rho$ 成立，则不等式

$$U(r)<2a\log\frac{R}{R-r}+2b \tag{1.5}$$

于 $0<r<R<\rho$ 成立．

这个引理来自 E. Borel[4], F. Bureau[5] 及 H. Milloux[14b] 的工作．

让我们回顾一下函数 $\overset{+}{\log}x$ 于 $x\geqslant 0$ 的定义：

$\overset{+}{\log}x=0\quad(0\leqslant x<1)$， $\overset{+}{\log}x=\log x\quad(x\geqslant 1)$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$\overset{+}{\log} x$ 为非负并且非减，它满足不等式

$$\overset{+}{\log}(x_1x_2) \leqslant \overset{+}{\log} x_1 + \overset{+}{\log} x_2,$$

$$\overset{+}{\log}(x_1 + x_2) \leqslant \overset{+}{\log} x_1 + \overset{+}{\log} x_2 + \log 2.$$

另一方面在引理 1.3 的证明中需要下列不等式

$$e^{\frac{b}{a}} x > 8a \log x + 8b \quad (x \geqslant 2). \tag{1.6}$$

我们首先给出这个不等式的证明．考虑辅助函数

$$\varphi(x) = e^{\frac{b}{a}} x - 8a \log x - 8b.$$

只需证明:

$$\varphi(2) > 0 \tag{1.7}$$

及

$$\varphi'(x) = e^{\frac{b}{a}} - \frac{8a}{x} > 0 \quad (x \geqslant 2). \tag{1.8}$$

我们有

$$2e^{\frac{b}{a}} > 2\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\right) > \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2, \tag{1.9}$$

又由 $b \geqslant 8a^2$, 有

$$1 + \frac{b}{a} > 8a,$$

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^2 > 8a\left(1 + \frac{b}{a}\right) = 8a + 8b. \tag{1.10}$$

另一方面，有

$$8a + 8b > 8a \log 2 + 8b. \tag{1.11}$$

由 (1.9), (1.10) 及 (1.11) 式得

$$2e^{\frac{b}{a}} > 8a \log 2 + 8b,$$

故有 (1.7) 式．又由 (1.9) 及 (1.10) 式，得

$$2e^{\frac{b}{a}} > 8a,$$

故有 (1.8) 式．

现在引理 1.3 可如下证明：设 r 及 R 为二值使

$$0 < r < R < \rho,$$

并假定

$$U(r) \geqslant 2a \log \frac{R}{R-r} + 2b. \tag{1.12}$$

在以下我们证明 $r' = \frac{1}{2}(r+R)$ 及 R 二值亦满足不等式

$$U(r') \geqslant 2a \log \frac{R}{R-r'} + 2b. \tag{1.13}$$

事实上，根据 (1.4) 式，有

$$U(r) < a \log U(r') + a \log \frac{r'}{r'-r} + b$$

$$< a \log U(r') + a \log \frac{R}{R-r'} + b.$$

由此不等式及 (1.12) 式写为下列形式

$$U(r) \geqslant 2a \log \frac{R}{R-r'} - 2a \log 2 + 2b,$$

得

$$\log U(r') > \log \frac{R}{R-r'} - 2 \log 2 + \frac{b}{a},$$

即

$$\log U(r') > \log \left(\frac{1}{4} e^{\frac{b}{a}} \frac{R}{R-r'}\right).$$

但 $b \geqslant 2a$，故有

$$\frac{1}{4} e^{\frac{b}{a}} \frac{R}{R-r'} > \frac{1}{4} e^{\frac{b}{a}} \geqslant \frac{1}{4} e^{2} > 1,$$

$$U(r') > \frac{1}{4} e^{\frac{b}{a}} \frac{R}{R-r'}. \tag{1.14}$$

另一方面在 (1.6) 式中特别令 $x = \frac{R}{R-r'}$，有

$$e^{\frac{b}{a}} \frac{R}{R-r'} > 8a \log \frac{R}{R-r'} + 8b. \tag{1.15}$$

由 (1.14) 及 (1.15) 式即得 (1.13) 式.

现在令

$$r_n = \frac{1}{2}(r_{n-1} + R) \quad (n = 1, 2, \cdots), \quad r_0 = r.$$

则对于每一正整数 n 有

$$0 < r_n < R < \rho \tag{1.16}$$

及

$$U(r_n) \geqslant 2a \log \frac{R}{R - r_n} + 2b. \tag{1.17}$$

$U(r)$ 既为一非减函数，由 (1.16) 式有 $U(r_n) \leqslant U(R)$. 但由 (1.17) 式，$U(r_n)$ 随 n 趋于∞，故发生矛盾.

定义 1.1 设 z 为一复数. 当 n 经过全体整数（正整数、负整数及零）变化时，$|z - 2n\pi i|$ 有一最小值. 此最小值以 $\delta(z)$ 表示.

引理 1.4 设 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 为二函数在一区域 $|z| < \rho$ 为全纯并满足恒等式

$$e^{f_1(z)} + e^{f_2(z)} = 1. \tag{1.18}$$

命

$$B_1(r) = \max_{|z|=r} - \mathrm{Re}\{f_1(z)\}, \quad M_2(r) = \max_{|z|=r} |f_2(z)|.$$

则于 $0 < r < R < \rho$，有

$$B_1(r) < \frac{2R}{R-r}\left\{3\log M_2(R) + 2\log \frac{1}{\delta\{f_2(0)\}}\right.$$
$$\left. + 7\log 2 + 2\pi\right\}. \tag{1.19}$$

证明 考虑两个值 r 及 R，使 $0 < r < R < \rho$ 并分别两种情形：

1° $B_1(r) \leqslant 1$. 在此情形 (1.19) 式显然成立.

2° $B_1(r) > 1$. 在此情形证明如下：设 z_0 为圆 $|z| = r$ 的一点使

$$\mathrm{Re}\{f_1(z_0)\} = -B_1(r).$$

由 (1.18) 式，有

$$|e^{f_2(z_0)} - 1| = e^{-B_1(r)}.$$

命

$$e^{f_2(z_0)} = 1 + \zeta.$$

则

$$|\zeta| = e^{-B_1(r)} < e^{-1} < \frac{1}{2}.$$

故 $\log(1+\zeta)$ 的一个值为

$$\log(1+\zeta) = \zeta - \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^3}{3} - \frac{\zeta^4}{4} + \cdots,$$

并存在一整数 n 使

$$f_2(z_0) - 2n\pi i = \log(1+\zeta).$$

我们有

$$|\log(1+\zeta)| \leqslant |\zeta| + \frac{|\zeta|^2}{2} + \frac{|\zeta|^3}{3} + \cdots$$

$$< |\zeta| + |\zeta|^2 + |\zeta|^3 + \cdots = \frac{|\zeta|}{1-|\zeta|} < 2|\zeta|.$$

所以

$$|f_2(z_0) - 2n\pi i| < 2e^{-B_1(r)}, \tag{1.20}$$

$$2\pi|n| < M_2(r) + 1. \tag{1.21}$$

由 (1.18)式，函数 $f_2(z) - 2n\pi i$ 在区域 $|z| < \rho$ 无零点，故有

$$f_2(z) - 2n\pi i = e^{g(z)} \tag{1.22}$$

其中 $g(z)$ 于 $|z| < \rho$ 为全纯并且

$$-\pi < \operatorname{Im}\{g(0)\} \leqslant \pi. \tag{1.23}$$

(1.20) 式现在可以写为

$$|e^{g(z_0)}| < 2e^{-B_1(r)}. \tag{1.24}$$

命

$$\mu(r) = \max_{|z|=r} |g(z)|, \quad \alpha(R) = \max_{|z|=R} \operatorname{Re}\{g(z)\}.$$

则由 (1.24) 式易知

$$\mu(r) > B_1(r) - \log 2. \tag{1.25}$$

另一方面，根据 (1.22) 及 (1.21) 式，有

$$e^{\alpha(R)} \leqslant M_2(R) + 2\pi|n| < 2M_2(R) + 1.$$

故有

$$\alpha(R) < \log[2M_2(R)+1] = \log^+[2M_2(R)+1]$$
$$\leqslant \log^+ M_2(R) + 2\log 2. \tag{1.26}$$

根据 (1.22) 及 (1.23) 式，有

$$g(0) = \log|f_2(0) - 2n\pi i| + i\theta_0 \quad (-\pi < \theta_0 \leqslant \pi).$$

让我们求出 $|g(0)|$ 的一个上限. 根据 Cauchy 不等式及(1.21)式，有

$$|f_2(0) - 2n\pi i| \leqslant |f_2(0)| + 2\pi|n| < 2M_2(R) + 1,$$

故有

$$\log|f_2(0) - 2n\pi i| < \log^+ M_2(R) + 2\log 2. \tag{1.27}$$

另一方面根据 $\delta(z)$ 的定义，有

$$|f_2(0) - 2n\pi i| \geqslant \delta[f_2(0)] > 0,$$

故有

$$-\log|f_2(0) - 2n\pi i| \leqslant \log\frac{1}{\delta[f_2(0)]} \leqslant \log^+\frac{1}{\delta[f_2(0)]}. \tag{1.28}$$

由 (1.27) 及 (1.28) 式得

$$|\log|f_2(0) - 2n\pi i|| < \log^+ M_2(R) + \log^+\frac{1}{\delta[f_2(0)]} + 2\log 2$$

并有

$$|g(0)| < \log^+ M_2(R) + \log^+\frac{1}{\delta[f_2(0)]} + 2\log 2 + \pi. \tag{1.29}$$

应用引理 1.2 到函数 $g(z)$，有

$$\mu(r) \leqslant \frac{2R}{R-r}\{\alpha(R) + 2|g(0)|\}. \tag{1.30}$$

最后由 (1.25), (1.26), (1.29) 及 (1.30) 式得

$$B_1(r) < \log 2 + \mu(r) \leqslant \log 2 + \frac{2R}{R-r}\{\alpha(R) + 2|g(0)|\}$$
$$< \log 2 + \frac{2R}{R-r}\Big\{3\log^+ M_2(R)$$
$$+ 2\log^+\frac{1}{\delta[f_2(0)]} + 6\log 2 + 2\pi\Big\}$$

$$< \frac{2R}{R-r}\left\{3\log M_2(R) + 2\log\frac{1}{\delta[f_2(0)]} + 7\log 2 + 2\pi\right\}.$$

引理 1.5 设 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 为二函数在一区域 $|z| < \rho$ 为全纯并满足恒等式

$$e^{f_1(z)} + e^{f_2(z)} = 1.$$

命

$$M_1(r) = \max_{|z|=r} |f_1(z)|, \quad M_2(r) = \max_{|z|=r} |f_2(z)|.$$

则于 $0 < r < R < \rho$，有

$$M_1(r) < \frac{16R^2}{(R-r)^2}\left\{3\log M_2(R) + 2\log\frac{1}{\delta[f_2(0)]} + 2|f_1(0)| + 7\log 2 + 2\pi\right\}.$$

证明 设 r 及 R 为二值使 $0 < r < R < \rho$. 令

$$r_1 = \frac{1}{2}(r + R).$$

根据引理 1.4，有

$$B_1(r_1) < \frac{2R}{R-r_1}\left\{3\log M_2(R) + 2\log\frac{1}{\delta[f_2(0)]} + 7\log 2 + 2\pi\right\}.$$

又根据引理 1.2，有

$$M_1(r) \leqslant \frac{2r_1}{r_1 - r}\{B_1(r_1) + 2|f_1(0)|\}.$$

故有

$$M_1(r) < \frac{4R}{R-r}\{B_1(r_1) + 2|f_1(0)|\}$$
$$< \frac{16R^2}{(R-r)^2}\left\{3\log M_2(R) + 2\log\frac{1}{\delta[f_2(0)]} + 2|f_1(0)| + 7\log 2 + 2\pi\right\}.$$

定理 1.1 设 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 为二函数在一区域 $|z| < \rho$ 为全

此为试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook.com