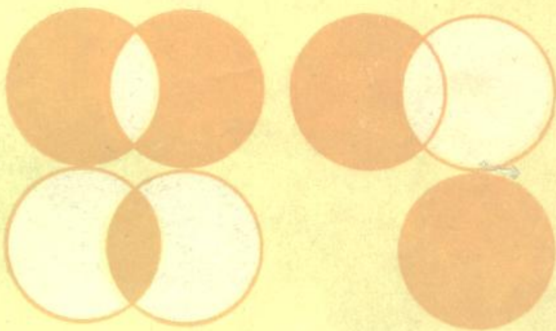
模糊数学

陈贻源 编



华中工学院出版社

模 糊 数 学

陈贻源 编

華中工学院出版社

内　容　提　要

本书系介绍模糊数学的基本理论和基本方法的入门书．主要内容包括模糊集合、扩张原理与模糊数、模糊关系与模糊聚类、模糊关系方程与综合评判、模糊函数与模糊规划等．同时对模糊数学在近代数学的一些分支中的扩展及其在模糊系统中的应用也给予简单介绍，主要内容包括模糊积分与可能性理论、模糊集上的范畴与模糊系统．在介绍基本理论的同时并列举一些应用实例．每章末附有习题．关于集合、格等概念作为预备知识放在第一章．

本书可供大专院校师生、科技工作者阅读，亦可作为模糊数学讲习班基本理论的试用教材．

模　糊　数　学

陈贻源　编

责任编辑　李立鹏

华中工学院出版社出版

（武昌喻家山）

湖北省新华书店发行　　各地新华书店经售

华中工学院印刷厂印刷

开本　850×1168　1/32　　印张：8　　字数：194,000

1984年3月第一版　　1984年3月第一次印刷

印数：1—15,000

统一书号：13255—024　定价：1.30元

编 者 的 话

自美国 California 大学的 L.A. Zadeh 教授于 1965 年发表“Fuzzy Sets”一文以后，模糊数学便作为一门新的数学学科而诞生了。近二十年来，发展非常迅速，应用相当广泛。

A. Kaufmann（法）、菅野（日）、E. Sanchez（法）和 P.P. Wang（美籍）等学者先后来华讲学，对模糊数学在我国的发展起着很大的促进作用；特别是《模糊数学》杂志创刊以来，模糊数学的这一崭新的思想引起了国内广大科技工作者的浓厚兴趣；更由于老一辈数学家的热心关怀与扶植，模糊数学在理论和应用方面呈现出朝气蓬勃的景象，模糊数学队伍也正在茁壮成长之中。

近年来，广大科技工作者、大中学校的部分师生和有志于模糊数学的广大青年迫切要求有一本关于模糊数学的基本理论的入门书，笔者趁兴想作一尝试，便得到院、系领导和师生们的热情支持，特别是徐利治教授给以热切的关心。完成初稿时，曾作为我院高年级学生的讲座和选修课的教材试用。承蒙师生为本书提出了很多有益的意见，特别感谢我系于寅、吴乐光副教授，胡适耕等同志为本书提出了很好的具体修改意见。

本书主要根据 D.Dubois and H.Prade 合著的《Fuzzy Sets and Systems——theory and application》和浅居喜代治著《模糊系统理论入门》（赵汝怀译）两书编写而成，并参考了吴望名副教授、童增祥等同志分别在我院和苏州的模糊数学讲习班上的教学参考资料，以及罗承忠和张文修副教授各自编写的模糊数学讲义，其他参考文献列在书末。上述同志不但为本书提供了很多很好的编写素材，而且提出了很好的修改意见。特别是童增祥和赵汝怀同志详细地审阅了本书全稿，提出了宝贵的修改意见。在审阅过程中，汪培庄和王子孝副教授给以热切的关心，彭祖赠副教

授对一、二两章提出了有益的修改意见，苑金城同志作了校阅工作，在此一并致谢！

全书的结构分三部分。第一章是预备知识，主要内容是集合与格，所需其他预备知识于各章中分述。

第二——六章是模糊数学的主要基础，也是全书的重要内容。在叙述每一章的基本理论的同时，注意到内容的某些进展，如三角范数、二阶综合评判等，也同时注意到联系实际，如Fuzzy集用于模式识别，扩张原理用于Fuzzy数，Fuzzy关系用于聚类分析、排队择优和图象识别，而Fuzzy关系方程着重于求最大解与极小解的方法，Fuzzy函数的极值用于Fuzzy规划。

第七、八两章的主要内容是将模糊数学扩展到近代数学的主要分支，这些内容也尽可能地联系于实际。如Fuzzy积分联系于综合评价问题；将Fuzzy测度作为可能性的基础，并将可能性与Fuzzy概率作某些比较；Fuzzy集上的范畴联系于系统的描述，为描述Fuzzy系统的结构与稳定性，引入了Fuzzy群与Fuzzy拓扑空间的概念。这一部分的各章自成一独立体系。首先回顾原有的概念和理论，然后将其扩展到模糊情况。

书中的大部分定理都给出了详细证明，但类似的证明过程留给读者完成。章末附有习题，是为了巩固概念和熟练计算之用。

在完成本书的过程中，得到吴从炘、刘应明、吴学谋、汪培庄和邓聚龙等教授的支持、帮助和鼓励，笔者表示衷心感谢！

最后要特别感谢华中工学院出版社的同志们为本书早日出版付出了辛勤的劳动。

由于笔者才疏学浅、书中不足之处会有很多，错漏疏忽在所难免，恳请读者批评指正。

陈贻源

一九八四年元月于华中工学院

主要运算符号

$\in$	表示元素与集合的属于
$\overline{\in}$	不属于
$\subset$	包含
$\not\subset$	不包含
$\subsetneqq$	真包含
$\cup$	并
$\cap$	交
$\forall$	对于所有的
$\exists$	至少存在一个
$\rightarrow$	蕴含
$\longmapsto$	任意蕴含
$=$	等于
$\neq$	不等于
$\equiv$	恒等于
$\not\equiv$	不恒等于
$<$	小于
$\nless$	不小于
$>$	大于
$\ngtr$	不大于
$\leqslant$	小于或等于
$\cong$	同构
$\triangleq$	定义
$\wedge$	取小运算
$\vee$	取大运算
$\sim$	等价关系
$\hat{+}$	代数和运算
$\dot{\wedge}$	代数积运算
$\oplus$	有界和运算
$\odot$	有界积运算
$\triangle$	三角范算子
$\top$	三角范数
$\perp$	反三角范数
$\textcircled{\top}$	三角交
$\textcircled{\perp}$	三角并
$\left.\begin{matrix}\curlyvee\\ \curlywedge\end{matrix}\right\}$	yager 算子
$\left.\begin{matrix}\hat{\varepsilon}\\ \check{\varepsilon}\end{matrix}\right\}$	Einstan算子
$\succ$	优越（先）
$\dotplus$	阶梯和
$\sum\limits_{i=1}^{n}$	n 项和
$\int$	Fuzzy 积分
$\tilde{+}$	Fuzzy 加法
$\ominus$	Fuzzy 减法
$\tilde{\cdot}$	Fuzzy乘法
$\tilde{\div}$	Fuzzy 除法
$\propto$	$a\propto b=\begin{cases}1 & (a\leqslant b)\\ b & (a>b)\end{cases}$

γ	$a\gamma b=\begin{cases} b & (a\geqslant b)\\ 0 & (a<b)\end{cases}$
$\circledcirc$	α合成运算
$\circledcirc$	γ合成运算
ε	$a\varepsilon b=\begin{array}{ll} b & (a>b)\\ [b,1] & (a=b)\\ \varnothing & (a<b)\end{array}$
δ	$a\delta b=\begin{cases}[0,b] & (a>b)\\ [0,1] & (a\leqslant b)\end{cases}$

A^c($\underset{\sim}{A}^c$) 集合 A (Fuzzy 集 $\underset{\sim}{A}$)的补

$\prod\limits_{i=1}^{n}$, $\times$　在四则运算中表乘积，在向量空间中表直积。

目　录

注：带有“*”号的章、节或定理，初读者可暂略去。

第一章 集 合

本章包括两部分内容，第一部分是学习模糊数学所必备的基础知识，内容包括集合论、格论、以及同态与同构等概念。

元素与集合的关系可用特征函数给以描述，但这种特征函数只能描述非此即彼的清晰概念，对于亦此亦彼的模糊概念的描述，显然是不满足要求的。因此，要求将普通集合推广。本章的最后一节就讨论这种拓广集合的要求。

由于将普通集合推广为模糊集合，便出现了一种新的性质：模糊集合不满足互补律！于是便产生了建立在模糊集合基础之上的数学——模糊数学。本章第五节的最后一部分将简述模糊数学和普通数学的区别，特别是和统计数学的区别。

§1·1 集合的概念与运算

集合是现代数学中一个最基本的概念，不能用更简单的概念来定义它，仅给出一种描述。

所谓**集合**乃是“具有某种性质的、确定的、彼此可以区别的事物的汇总。”构成集合的事物叫做集合的元素或元，通常用大写字母A、B、C、…、X、Y、Z等表示集合，而用小写字母a、b、c、…、x、y、z等表示元。当元a属于集合A时，记为$a\in A$；当元a不属于集合A时，记为$a\overline{\in} A$。集合也简称为**集**。

元a与集A的关系只有两种可能，要么$a\in A$，要么$a\overline{\in} A$，即“非此即彼！”

为了表示简洁，将引用一些符号：

"$\forall x \in A$" 表示"集 A 中的所有元 x",

"$\exists x \in A$" 表示"集 A 中存在一个元 x".

设 P、Q 是两个命题,

"$P \Rightarrow Q$" 表示"若 P 成立,则 Q 成立";

"$P \Leftrightarrow Q$" 表示"当且仅当 P 成立时 Q 成立";

"$P(x)$" 表示"关于 x 的命题"或"x 具有性质 P";

"$A=\{x \mid P(x)\}$" 表示"具有性质 P 的 x 所构成的集".

常用的一些名词和术语如下:

空集 不含任何元的集称为空集,记为 $\varnothing$.

有限集 含有限个元素的集称为有限集,记为

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

无限集 非有限集称为无限集.

单元素集 仅含一个元 a 的集称为单元素集,记为 $\{a\}$,a 与 $\{a\}$ 的意义是不同的,它们之间的关系是 $a \in \{a\}$.

包含 $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$,则称 B 包含 A,记为 $A \subset B$,并称 A 是 B 的**子集**;若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称 A 与 B **相等**,记为 $A=B$(否则,$A \neq B$);若 $A \subset B$,但 $A \neq B$,则称 B 真包含 A,记为 $A \subsetneqq B$.并称 A 是 B 的**真子集**.

论域 作为对象被考虑的所有元的全体称为论域,通常以大写字母 U, V 或 X, Y 表示.

幂集 设 U 是论域,由 U 的所有子集为元素而构成的集称为 U 的幂集,记为 $P(U)$.$\varnothing$ 与 U 是 U 的两个特殊子集,称为 U 的平凡子集.

设 U 为论域,A、B、$C \in P(U)$,定义集的运算如下:

并集 由 A 和 B 中的元的全体所构成的集称为 A 与 B 的并集,记为 $A \cup B$,即 $A \cup B=\{u \mid u \in A$ 或 $u \in B\}$.

交集 由 A 和 B 中的公共元所构成的集称为 A 与 B 的交集,记为 $A \cap B$,即 $A \cap B=\{u \mid u \in A$ 且 $u \in B\}$.

差集　由属于A但不属于B的元所构成的集称为A与B的差集，记为$A \backslash B = \{u | u \in A$ 且 $u \overline{\in} B\}$.

补集　由论域U中不属于A的元所构成的集称为A在U中的补集，记为$U \backslash A = A^c$. 当$B \subset A$，称$A \backslash B$为B在A中的补集.

集的并、交、差、补运算如图 1.1—1 表示：

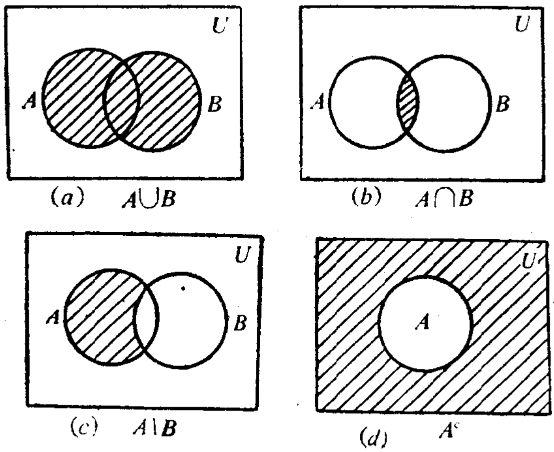


图1.1—1　(a)$A \cup B$　(b)$A \cap B$　(c)$A \backslash B$　(d)A^c

设A、B、$C \subset U$，其并、交、补运算具有如下性质：

1° **幂等律**　$A \cup A = A$，$A \cap A = A$；

2° **交换律**　$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$；

3° **结合律**　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；

4° **分配律**　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$，

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；

5° **吸收律**　$A \cap (A \cup B) = A$，$A \cup (A \cap B) = A$；

6° **0-1 律**　$A \cup \varnothing = A$，$A \cap \varnothing = \varnothing$；$A \cup U = U$，$A \cap U = A$；

7° **互补律**　$A \cup A^c = U$，$A \cap A^c = \varnothing$；

8° **对偶律**　$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$，$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$；

9° **复原律** $(A^c)^c = A$。

设 $A \in P(U)$，定义映射 χ_A: $U \to \{0,1\}$，

$$\chi_A(u) = \begin{cases} 1, & \text{当 } u \in A; \\ 0, & \text{当 } u \bar{\in} A. \end{cases}$$

则称 χ_A 为集 A 的**特征函数**，由此可得

$$A = B \Leftrightarrow \chi_A(u) = \chi_B(u) \qquad (\forall u \in U),$$

$$B \subset A \Leftrightarrow \chi_B(u) \leqslant \chi_A(u) \qquad (\forall u \in U),$$

$$B \subsetneqq A \Leftrightarrow \chi_B(u) \leqslant \chi_A(u) \qquad (\forall u \in U) \text{ 且 } \exists u_0 \in U,$$

使得 $\chi_B(u_0) = 0$，$\chi_A(u_0) = 1$。

$$\chi_{A \cup B}(u) \triangleq \chi_A(u) \vee \chi_B(u) \triangleq \max\{\chi_A(u), \chi_B(u)\} \quad (\forall u \in U),$$

$$\chi_{A \cap B}(u) \triangleq \chi_A(u) \wedge \chi_B(u) \triangleq \min\{\chi_A(u), \chi_B(u)\} \quad (\forall u \in U),$$

$$\chi_{A^c}(u) \triangleq 1 - \chi_A(u) \quad (\forall u \in U),$$

其中，“$\triangleq$”表示“定义”，“$\vee$”表示“取大”运算，“$\wedge$”表示取小运算。

§1.2 映射与关系

给定集 X 和 Y，若有一对应法则存在，使得对于集 X 中任一元 x，有 Y 中唯一元 y 与之对应，则称此对应法则 f 为从 X 到 Y 的**映射**，记为

$$f: X \to Y.$$

并称 X 为映射 f 的**定义域**。又定义

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y,$$

称 $f(X)$ 为 f 的**值域**。

(*a*) 若 $f(X) = Y$，则称 f 为**满射**或**全射**；

(*b*) 若 $f(x_1) = f(x_2)$，则 $x_1 = x_2$，称映射 f 为**单射**；

(*c*) 若 f 既是单射又是满射，则称 f 为**双射**或**满单射**；

(*d*) 若 f 为双射，由 $y = f(x)$ 确定 Y 到 X 的映射，称为 f

的**逆映射**，记为 f^{-1}；

(e) 若 $Y=X$ 且 $\forall x\in X$，$f(x)=x$，则称 f 为由 X 到 X 的**恒等映射**，记为 1_X 或 e_X；

(f) 设 $f: X\to Y$，$g: Y\to Z$，定义映射 $h: X\to Z$，

$$h(x)=g(f(x)),\ \forall x\in X,$$

称 h 为 f 与 g 的**合成映射**，记为 $h=g\circ f$；

若 $f: X\to Y$，$g: Y\to Z$，$h: Z\to W$，则

$$(h\circ g)\circ f: X\to W \text{ 且 } (h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)；$$

(g) 设 $f: X\to Y$，$A\in P(X)$，令

$$f^*(A)=\{f(x)\mid x\in A\}\in P(Y),$$

从而 f^*：$P(X)\to P(X)$，称 f^* 为由 f 诱导出来的**集射**，仍将 f^* 记为 f。

若 A、$B\in P(X)$，$f: X\to Y$，易证

1° $A\subset B\Rightarrow f(A)\subset f(B)$；

2° $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；

3° $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$；

4° $f(A\backslash B)\supset f(A)\backslash f(B)$。

设 Λ 与 U 是任意两非空集，给定映射

$$f: \Lambda\to P(U),\ \lambda\longmapsto A_\lambda,$$

记
$$f(\Lambda)=\{A_\lambda\mid_{\lambda\in\Lambda}\}\triangleq\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset P(U),$$

称 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为含参变数 λ 的**集合族**，称 Λ 为**指标集**，其中，$\lambda\longmapsto A_\lambda$ 表示：当 $\lambda\in\Lambda$ 时，$f(\lambda)=A_\lambda\in P(U)$。

当 $\Lambda=N$ 时，λ 是自然数，常记为 i, j, k, n 等。但在一般情形下，Λ 可以不是可列集。

§1.1中关于集的并、交运算可推广到含参变数的集合族上去，定义

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{u\mid\exists\lambda\in\Lambda:\ u\in A_\lambda\},$$

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{u \mid \forall \lambda \in \Lambda:\ u \in A_\lambda\}.$$

当 $\Lambda = N$ 时，常记作 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 及 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. 易证

$1°\ A \cup (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A \cup A_\lambda)$，$A \cap (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap A_\lambda)$；

$2°\ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c = (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c$，$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c = (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c$，

其中，A、$A_\lambda \in P(U)$。

序偶　任两个元 x, y 确定一个新元 $z = (x, y)$，称 (x, y) 为 x 与 y 的序偶，且 $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x'$，$y = y'$。

直积　设 X、Y 为任意两集，称

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

为 X 与 Y 的直积。

类似地，可定义任给 n 个集 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的直积：

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in X_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

一般地，$X \times Y \neq Y \times X$。

关系　对于给定的集 X, Y，称任何子集 $R \subset X \times Y$ 为 X 与 Y 的关系。当 $(x, y) \in R$ 时，称 x 和 y 为 R 相关，记为 xRy；否则 $(x, y) \notin R$，记为 $x \not R y$。

设 $f: X \to Y$，显然有 $\{(x, y) \mid y = f(x)\} \subset X \times Y$，仍以 f 表示集合，于是，映射 f 是关系的特例。

同样，称 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 的任意子集 R 为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的关系。

设 $Y = X$，称 $X \times X$ 的子集 R 为 X 上的**二元关系**，同样，称 $X \times X \times \cdots \times X$ 的子集 R 为 X 上的 **n 元关系**。

等价关系　集 X 上的关系 $\sim$ 称为等价关系，若它满足

(i) **自反律**　$\forall x \in X$，恒有 $x \sim x$；

(ii) **对称律**　$\forall x, y \in X$，$x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$；

(iii) **传递律**　$x \sim y$ 且 $y \sim z \Rightarrow x \sim z$。

划分 所谓集合U的划分是指满足如下条件的集合族$\mathscr{K}\subset P(U)$：

（i） 对任意的$A,B\in\mathscr{K}\Rightarrow A=B$或$A\cap B=\varnothing$；

（ii） $\bigcup\limits_{A\in\mathscr{K}}A=U$。

可以证明

定理 1.2.1 R是U上的等价关系$\Longleftrightarrow$存在U的划分$\mathscr{K}$，使得xRy，当且仅当x,y同属于某个$A\in\mathscr{K}$。

序关系 设"$\leqslant$"是U上的关系，且满足条件：

（i）**自反律** $\forall u\in U$，都有$u\leqslant u$；

（ii）**反对称律** $u\leqslant v$且$v\leqslant u\Rightarrow u=v$；

（iii）**传递律** $u\leqslant v$且$v\leqslant w\Rightarrow u\leqslant w$；

称"$\leqslant$"是U上的序关系或偏序关系，而称$(U,\leqslant)$为**偏序集**或**半序集**。

全序集 若$(U,\leqslant)$是偏序集，且对任意的$u,v\in U$，必有$u\leqslant v$或$v\leqslant u$，则称$(U,\leqslant)$为全序集。这时，$\leqslant$为U上的全序。

例 1 设N是全体自然数的集，"$\leqslant$"为两个整数间的整除关系，即$m\leqslant n\Longleftrightarrow m|n$，则$(N,\leqslant)$是偏序集。

例 2 R是一切实数的集，"$\leqslant$"表示实数间小于或等于关系，则$(R,\leqslant)$是全序集。

例 3 在$P(U)$中，令$A\leqslant B\Leftrightarrow A\subset B$，则$(P(U),\subset)$是偏序集。

最大(小)元、极大(小)元 设$(U,\leqslant)$是偏序集，若$\exists a\in U$，且$\forall u\in U$，都有$u\leqslant a$，则称a为U的最大元；设$c\in U$，若$\forall u\in U$：$c\leqslant u\Rightarrow c=u$，则称$c$为$U$的极大元。类似地可定义最小元与极小元。

显然，最大(小)必是极大(小)元，但极大(小)元不一定是最大(小)元。若U有最大(小)元存在，则必唯一。然而，U中可能有多个极大(小)元。

对于任意集U，$(P(U),\subset)$是半序集，$\varnothing$是最小元，U是最大元。

例 4 $X=\{a,b,c,d,e\}$，若$R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(d,c),(e,c),(c,a),(c,b),(d,a),(d,b),(e,a),(e,b)\}$（图1.2—1），则$(X,R)$是偏序集，且$a,b$是极大元，$d,e$是极小元，无最大元与最小元。

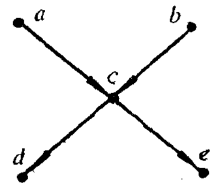


图 1.2—1

上确界、下确界 设$(U,\leqslant)$是偏序集，$A\subset U$，若$\exists a\in U$，使得对任意$u\in A$，都有$u\leqslant a$，则称a为A(在U中)的上界。若在上界中存在a_0，使得a_0小于或等于A的所有上界，则称a_0为A的上确界，记为$a_0=\sup A$。对偶地可定义下界与下确界，A的下确界记为$\inf A$。

在例4中，设$A=\{a,b\}$，则c,d,e都是A的下界，c是A的下确界。但是，A没有上界。又设$B=\{d,e\}$，则a,b,c都是B的上界，且c是B的上确界，但是，B没有下界。

例 5 设$X=\{a,b,c,d\}$，$R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(c,b),(c,a),(d,b),(d,a)\}$，其中，若$a\leqslant b$，则意味着$(a,b)\in R$，于是$(X,R)$是偏序集（图1.2—2）。

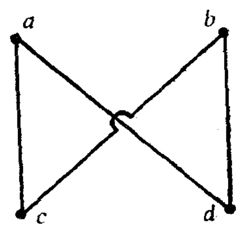


图 1.2—2

设$A=\{a,b\}$，则c,d是A的下界，但没有下确界，且A无上界。又设$B=\{c,d\}$，则a,b是B的上界，但没有上确界，且B无下界。

§1.3 格

定义 1.3.1 设在非空集L上定义了二元运算“$\vee$”、“$\wedge$”，