

随机振动的 理论及实例分析

庄表中 陈乃立 编著

- 第一章 变换方法
- 第二章 随机变量幅域和时域的描述
以及可靠性设计
- 第三章 回归方法与相关分析
- 第四章 频率分析与谱密度
- 第五章 振动系统动态特性的描述
- 第六章 受平稳随机激励的线性时不
变系统之响应计算
- 第七章 损坏理论
- 第八章 非线性随机振动
- 第九章 随机振动理论与信号处理技
术相结合的工程问题

地震出版社

随机振动的理论及 实例分析

庄表中 陈乃立 编著

地震出版社

1985

内 容 简 介

本书在阐明线性随机振动基本理论的基础上, 通过大量例题, 系统地介绍了这些理论的应用及随机振动解题的基本方法。书中还配有各种类型的习题, 可供练习之用。

对于学习随机振动课程的大学生、研究生、自学者以及对随机振动感兴趣的机械、建筑、地震、航天、兵器、船舶、自动化及其它领域的科技人员, 本书是一本合适的参考资料。

随机振动的理论及实例分析

庄表中 陈乃立 编著

责任编辑: 裴 申

地 震 出 版 社 出 版

北京复兴路63号

北京丰华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

950 × 1168 1/32 12 1/4 印张 327千字

1985年3月北京第一版 1985年3月北京第一次印刷

印数 0001—6,000

统一书号: 13180·251

定价: 3.75 元

前 言

近三十年来，随机振动已日益成为一个重要的研究课题。随机振动与通常所说的确定性振动不同，其振动过程既不能预知，也不重复。对于随机振动，确定性的数学处理方法已经失效，必须用概率论和数理统计的方法加以研究。

当今科学技术的突飞猛进，赋予这个新课题以强大的生命力。一方面，由于现代机械和设备向着高速、高效、高精度的方向发展，要求进一步优化产品和缩短产品设计周期，按过去假定的确定性激励引起的振动进行分析，已远远不能满足要求，必须用随机振动理论来处理，才能更接近真实情况；另一方面，快速付里叶变换算法和电子计算机技术的应用，使数据分析速度在短短几年内提高了好几个量级，“实时”分析的愿望已经实现，为随机振动理论的实际应用创造了良好的条件。因此，随机振动这门学科，不仅越来越引起科技界的兴趣，越来越广泛地应用于诸如交通运输、结构抗震、噪声消除、宇宙航行、兵器装备、自动控制、资源勘探、信息分析处理等方面的研究，而且远远超出了通常的工程领域，渗入到经济、医疗、公安等部门。

必须而且可以按随机振动处理的问题主要有以下几种：

一、量大面广、经济效益显著的。

例如汽车、拖拉机、坦克、装甲车、工程机械、行走机械及舰艇等在其行驶过程中，由于路面或海面的随机激励，都会引起随机振动。其行驶速度常因机械本身或乘坐者不能承受过大的振动而难以提高。应用随机振动理论，设计优化的悬挂减振系统，将收到较大的经济效益，而且在国防上也有重要意义。此外，加工设备（如各种机床、冶金压延设备、造纸机械等）振动特性的合理选择，将大大提高工效和产品的精度，也属于这一类问题。

二、特别重要或昂贵的工程设备或产品，必须首次成功或保证安全可靠的。

例如武器（导弹、枪、炮等）发射时受到环境随机振动的影响，但要求首发命中或及早命中；宇航设备（宇宙飞船、航天飞机、人造卫星等）在大气层中飞行时，受大气湍流作用而作随机振动，但要求其中的仪表和设备万无一失；原子能发电站、高压输电线、大型发电机等重要设备的破坏将造成重大事故，必须要求它们在强烈地震时仍能正常工作。

三、机理不清楚的。

如人体工程、生物工程中的脑电波、心电波，脉搏波动等，其作用机理不清，但在医疗中可根据其功率谱的异常变化诊断疾病；又如齿轮箱、滚珠轴承等发出噪声的机械在运转过程中的故障诊断、监察，损坏前的信息预报；再如控制机构的操纵性、灵敏度等等。

要用随机振动理论解决问题，往往会遇到较多的概念，要求有较广的知识面，涉及到理论力学、材料力学、概率论、机械振动、动态测试方法与技术以及有关方面的专业知识，这常使初学者感到困难。作者试图通过本书，使读者简略地重温随机振动理论的基本结论和描述随机振动的各域信息的物理意义及其在工程上的应用，而重点在于提高解决随机振动问题的能力。

本书的许多素材来源于国内几次随机振动讲习班的讲稿、学术交流会的论文、研究生教学中积累的资料以及广大科技工作者提供的典型材料。许多例题是根据这些素材自行设计的，融合了作者多年来在这方面探索中的点滴心得体会；部分例题和习题，是参考国外有关著作、论文，再经选择和改造的。例题和习题力求结合工程实际；解题过程力求条理清晰、繁简得当；例题中还考虑到一题多解的情况，或附有讨论，以开拓眼界；习题均经精心选择，通常是典型的理论与实际相联系的问题，旨在使读者得到基本训练。掌握了例题中的要领，对于求解习题和科研中的问

题，将有不小的帮助。

全书共有九章，第一章介绍了随机振动问题求解中常用的付里叶变换、拉普拉斯变换、 Z 变换、沃尔什变换等方法。第二至第四章介绍随机变量在四个域（时域、幅域、时差域、频域）的描述方法。第五章以后着重于随机振动理论的实际应用，如系统动态特性的识别、线性时不变系统响应的计算，使用寿命的设计、信号处理技术等，还涉及到工程上颇感棘手的非线性随机振动问题。为便于读者学习和解题时查找，书末备有八个附录。

本书的题目曾由研究生傅博、葛森、高瞻、谭明安通过练习的形式作了校对。

由于作者水平所限，本书的缺点和错误在所难免，如蒙读者批评指正，将不胜感激。

作者

于浙江大学

目 录

第一章 变换方法	(1)
一、内容提要	(2)
1. 付里叶级数	(2)
2. 付里叶变换	(2)
3. 拉普拉斯变换	(3)
4. Z 变换	(4)
5. 沃尔什变换	(5)
6. 用变换方法求解问题的步骤	(5)
二、例题	(5)
第一章习题	(47)
第二章 随机变量幅域和时域的描述以及可靠性设计	(53)
一、内容提要	(54)
1. 幅域的描述	(54)
2. 时域的描述	(56)
3. 概率特征值的计算方法	(58)
4. 随机变量的代数运算	(58)
5. 可靠性设计及其准则	(60)
二、例题	(60)
第二章习题	(101)
第三章 回归方法与相关分析	(109)
一、内容提要	(110)
1. 直线回归方程	(110)
2. 自相关函数	(110)
3. 互相关函数	(111)
4. 计算相关函数的步骤	(112)
二、例题	(113)

第三章习题	(138)
第四章 频率分析与谱密度	(145)
一、内容提要	(145)
1. 自功率谱密度函数	(145)
2. 互功率密度函数	(146)
二、例题	(146)
第四章习题	(173)
第五章 振动系统动态特性的描述	(176)
一、内容提要	(176)
1. 频率响应函数	(176)
2. 脉冲响应函数	(177)
二、例题	(178)
第五章习题	(208)
第六章 受平稳随机激励的线性时不变系统之响应计算	(216)
一、内容提要	(217)
1. 响应信息间的关系	(217)
2. 单输入单输出系统	(217)
3. 多输入多输出系统	(219)
4. 计算响应的步骤	(222)
二、例题	(222)
第六章习题	(276)
第七章 损坏理论	(287)
一、内容提要	(287)
1. 可靠度概念	(287)
2. 损坏的两种类型	(288)
3. 平稳、正态、窄带随机过程在幅域中的概率特征	(288)
二、例题	(289)
第七章习题	(301)
第八章 非线性随机振动	(304)

一、内容提要	(305)
1. FPK法	(305)
2. 统计线性化方法	(306)
3. 摄动法(小参数法)	(307)
二、例题	(307)
第八章习题	(338)
第九章 随机振动理论与信号处理技术相结合的工程问题	
.....	(343)
一、内容提要	(344)
1. 信号处理与信息的各域描述	(344)
2. 平稳随机过程各域信息间的一些关系	(345)
二、实例分析	(346)
第九章习题	(384)
附录 1. Z 变换特性和 Z 变换表	(387)
附录 2 按序数排列的一组沃尔什函数	(389)
附录 3 典型信号的自相关函数、自功率谱函数、概率	
密度函数和累积概率分布函数的示意图	(390)
附录 4 累积概率值和安全概率值	(392)
附录 5 人体机械振动模型及各部分的固有频率	(393)
附录 6 人体感受曲线	(394)
附录 7 单自由度系统的增益因子 $ H(\omega) $	(396)
附录 8 詹姆斯公式表	(396)

第一章 变换方法

在研究随机振动问题时，变换是常用的手段，它可以简化数学关系并使解法简单和更有规律性，或者将时域函数变为各不同域内的信息函数，获得更多有用的信息，更全面、深刻地提供分析振动问题的识别资料。

变换的种类很多，如：对数变换、付里叶变换、拉普拉斯变换、 Z 变换、沃尔什变换等等。

以付里叶变换来说，在随机振动中，时域信号经过付里叶变换，就得到频域函数；时差域的相关函数经过付里叶变换，就得到频域的谱密度；描述振动系统动态特性时，时域的脉冲响应函数经过付里叶变换，就得到频率响应函数；在振动信号处理技术中，时域的截断函数经过付里叶变换，就得到频域的谱窗函数，等等。

以拉普拉斯变换来说，它可以将求解振动微分方程的运算变换为在复平面内求解代数方程的问题，从而可以十分方便地用代数方法或图解方法获得系统的动态特性：如传递函数、动刚度、动柔度等。

以 Z 变换来说，在振动信号处理技术中，时域的离散信号经过 Z 变换，就得到复平面内的连续函数。对于激励或响应以序列形式表示的振动问题，将描述激励、系统和响应三者关系的差分方程进行 Z 变换，即可非常方便地从解连续函数的代数运算中，获得系统动态特性（如传递函数）和响应。

以沃尔什变换来说，它把一个时域振动信号分解为各个沃尔什波（幅值在 -1 到 $+1$ 之间的矩形波）的组合，得到二进制的跨频次数域的连续函数。显然，每个沃尔什波当然也是一组正弦波的组合。所以沃尔什变换归根到底也很象付里叶变换。

一、内 容 提 要

1. 付里叶级数

设 $f(t)$ 是时域的周期函数, 其周期为 T , 则存在付里叶级数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

或

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n),$$

式中, $\omega_0 = 2\pi/T$ 是基频, n 为正整数,

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt,$$

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \text{ 为一周期内的平均值。}$$

上述各式中的积分域, 也可以是 $-\frac{T}{2}$ 到 $\frac{T}{2}$;

$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, c_n 与频率 $n\omega$ 的关系图表示各谐波振幅与各倍频率之间的关系, 称为振幅离散谱;

$\varphi_n = \text{tg}^{-1} \frac{b_n}{a_n}$, φ_n 与频率 $n\omega$ 的关系图表示各谐波相位与各倍频率之间的关系, 称为相位离散谱。

2. 付里叶变换

设 $f(t)$ 为时域的非周期函数 (习惯上又称波形或时间历程), 且满足存在付里叶变换的收敛条件: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$, 则有付

里叶变换对:

$$\begin{cases} F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \\ f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \end{cases}$$

式中 $F(\omega)$ 是频域的复函数, 也可记作:

$$F(\omega) = A(\omega) + iB(\omega) = |F(\omega)| e^{i\varphi(\omega)},$$

这里 $A(\omega)$, $B(\omega)$ 是 ω 的实函数。 $\varphi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$ 。

$|F(\omega)|$, $\varphi(\omega)$, $A(\omega)$, $B(\omega)$ 分别称为幅频函数, 相频函数, 实频函数和虚频函数。

要完整地描述复函数 $F(\omega)$, 可绘出 $|F(\omega)|$ 和 $\varphi(\omega)$, 或 $A(\omega)$ 和 $B(\omega)$ 随 ω 变化的曲线, 它们分别称为幅频、相频、实频、虚频特性曲线。另外, 以 ω 为参变量, 可用复平面上的一个点同时表示上述四个函数值, 这些点连成的曲线称为幅相频率特性曲线, 即著名的奈奎斯特图, 又称矢端图。

若不用圆频率记号 ω , 而用频率记号 f (单位赫兹) 表示, 则付里叶变换对成为:

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i2\pi f t} dt, \\ h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{i2\pi f t} df. \end{aligned}$$

3. 拉普拉斯变换

设 $f(t)$ 为时域函数, 且 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$, 则存在拉普拉斯变换对:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \\ \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\beta-i\omega)}^{(\beta+i\omega)} F(s) e^{st} ds = f(t), \end{cases}$$

式中, $\mathcal{L}$ 为拉普拉斯变换记号,

$\mathcal{L}^{-1}$ 为逆拉普拉斯变换记号,

$s = \beta + i\omega$ 是复数, 实部为 β , 虚部就是圆频率 ω ,

$F(s)$ 是复函数。

在实际运算中, 通常不必计算具体函数的正、逆拉普拉斯变换, 有关书上均有专门的表可查。

在振动问题中, 若输出和输入过程分别用 $y[t]$ 和 $x[t]$ 来表示, 则两者拉普拉斯变换之比定义为传递函数 $H(s)$, 即

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}[y[t]]}{\mathcal{L}[x[t]]} = \frac{\text{输出的拉普拉斯变换}}{\text{输入的拉普拉斯变换}}$$

在输入是力、输出是位移时, $H(s)$ 的倒数定义为动刚度 $K(s)$,

$$K(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{\mathcal{L}[x(t)]}{\mathcal{L}[y(t)]} = \frac{\text{力输入的拉普拉斯变换}}{\text{位移输出的拉普拉斯变换}}$$

传递函数和动刚度都是复函数。

4. Z 变换

设序列为 f_n , 它的 Z 变换对为

$$\begin{cases} \mathcal{Z}[f_n] = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \\ \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c z^{n-1} F(z) dz \end{cases} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

式中, $\mathcal{Z}$ 是 Z 变换记号,

$\mathcal{Z}^{-1}$ 是逆 Z 变换记号,

z 是复数, 实部为 β , 虚部为 ω ,

n 是序数,

$F(z)$ 是复函数,

c 是积分路线, 它围住 $F(z)$ 的所有奇点。

Z 变换的运算性质, 在有关书上有专门的表格说明。

Z 变换和付里叶变换都可看作拉普拉斯变换的特殊情况: Z 变换是等时间步长离散后的拉普拉斯变换, 而付里叶变换则是复数 s 的实部为零时的拉普拉斯变换。

5. 沃尔什变换

若 $f(t)$ 为可积函数, 则可用沃尔什变换对表示为

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k) \text{WAL}(k, t),$$

$$F(k) = \int_0^1 f(t) \text{WAL}(k, t) dt,$$

式中, k 为跨过零的次数,

$F(k)$ 为跨越次数域的函数,

WAL 是沃尔什波的记号。

6. 用变换方法求解问题的步骤

(1) 把原始问题变换成简易的问题,

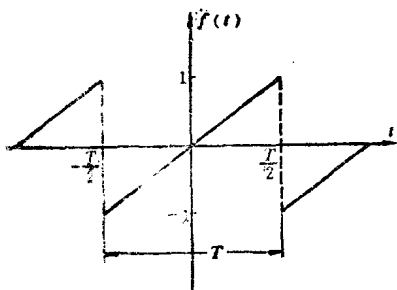
(2) 在变换域中解出较简易的问题,

(3) 对此解进行反变换, 把变换域中的解还原到原始域中的解。

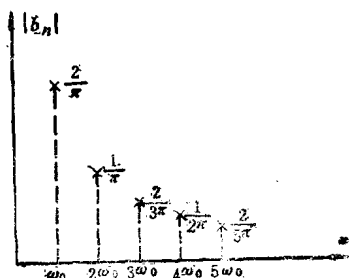
二、例 题

例题 1-1 求图示锯齿形波的付里叶级数, 并绘出它的频谱曲线。

解: (1) 该锯齿形波的周期为 T , 它在 $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ 内可用时



例题图 1-1-1



例题图 1-1-2

域函数表示为:

$$f(t) = \frac{2}{T}t \quad \left(-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}\right), \quad (1)$$

它是 t 的奇函数。

(2) 由于 $f(t)$ 是周期函数, 基频为 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, 所以可以展开为包含基频和各种倍频成分的付里叶级数, 即

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right), \quad (2)$$

其中

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2}{T} t dt = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2}{T} t \cos \frac{2\pi n t}{T} dt = 0 \quad (\because f(t) \text{ 是奇函数}),$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2}{T} t \sin \frac{2\pi n t}{T} dt = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1};$$

或

$$b_n = \begin{cases} -\frac{2}{n\pi} & (n \text{ 为偶数}), \\ \frac{2}{n\pi} & (n \text{ 为奇数}), \end{cases}$$

$$\therefore f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin \frac{2n\pi t}{T}. \quad (3)$$

又因

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

故

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin n\omega_0 t. \quad (4)$$

对应于频率 $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ 的谐波的振幅分别为 $\frac{2}{\pi}, \frac{1}{\pi}, \frac{2}{3\pi}, \dots$, 见例题图 1-1-2。由图可见, 幅值谱是离散的。

(3) 付里叶变换

如果 $f_1(t)$ 的表达式为:

$$f_1(t) = \begin{cases} \frac{2}{T}t & \left(-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}\right), \\ 0 & \text{(其它)}, \end{cases} \quad (5)$$

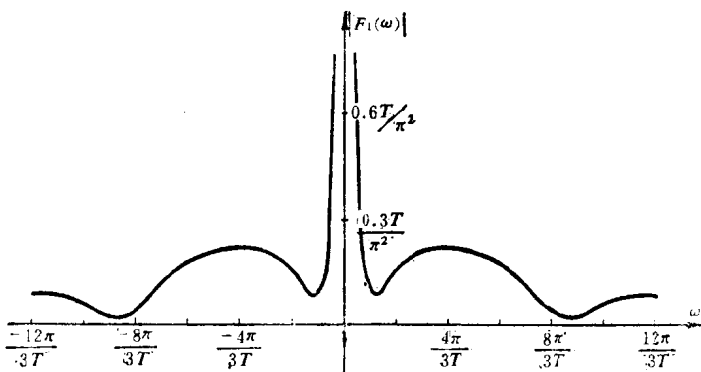
由于 $f_1(t)$ 是非周期函数, 不能展成付里叶级数, 但可进行付里叶变换:

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2}{T} t e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2}{T} \cdot \frac{1}{-i\omega} \left(e^{-i\omega t} \cdot t \right) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega t} dt \right] \\ &= \frac{i}{\pi T \omega} \left(T \cos \frac{\omega T}{2} + \frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \right) \\ &= \frac{i}{\pi \omega} \cos \frac{\omega T}{2} - \frac{2i}{\pi \omega^2 T} \sin \frac{\omega T}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

由上式可见, $F_1(\omega)$ 为连续谱, 如例题图 1-1-3 所示。

讨论: (1) 当原周期性锯齿波 $f(t)$ 在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 以外的部分被“截断”后, 就变成一个单脉冲的非周期信号 $f_1(t)$, 相应的频谱也由离散变为连续。

(2) 如果将 $f_1(t)$ 延伸为周期函数 $f(t)$, 则(6)式中的 $\frac{2}{T}t$ 可用(4)式代替, 积分限也延伸为 $(-\infty, \infty)$, 即(6)式变为:



例题图 1-1-3

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin n\omega_0 t \cdot e^{-i\omega t} dt. \quad (7)$$

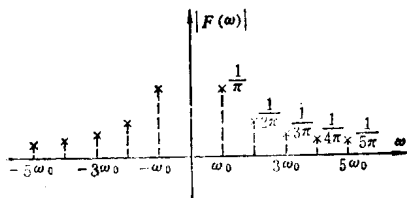
利用付里叶变换的对偶定理，不难证明：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a \sin n\omega_0 t \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{ai}{2} [\delta(\omega + n\omega_0) - \delta(\omega - n\omega_0)], \quad (8)$$

故(7)式的结果是

$$F(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i(-1)^{n+1}}{n\pi} [\delta(\omega + n\omega_0) - \delta(\omega - n\omega_0)]. \quad (9)$$

由(9)式确定的 $|F(\omega)|-\omega$ 曲线如例题图 1-1-4 所示。该图与例题图 1-1-2 的区别仅在于双边谱代替了原来的单边谱而已。



例题图 1-1-4

由此可见，周期函数的频谱图，既可从付里叶级数直接得出，也可从付里叶变换得出。付里叶级数与付里