

198
人大版考研

经济学硕士入学考试

数学 复习指南

主编
严守权

中国人民大学出版社



404135

经济学硕士入学考试 数学复习指南

主 编 严守权

撰稿人 严守权 张学贞 褚永增

中国人民大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

经济学硕士入学考试数学复习指南/严守权主编

北京: 中国人民大学出版社, 1997.5

ISBN 7-300-02390-8/G · 360

I. 经...

II. 严...

III. 高等数学-研究生-入学考试-学习参考资料

IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (97) 第 06471 号

DV69/04

经济学硕士入学考试

数学复习指南

主编 严守权

出版发行: 中国人民大学出版社

(北京海淀路 175 号 邮码 100872)

经 销: 新华书店

印 刷: 北京市丰台印刷厂

开本: 850×1168 毫米 1/32

印张: 17.375

1997 年 5 月第 1 版 1997 年 5 月第 1 次印刷

字数: 434 000

定价: 20.00 元

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

前 言

应报考经济学硕士研究生考生的需要,我们编写并于1992年开始出版了这本《经济学硕士入学考试数学复习指南》。根据历年考研大纲的修定,命题内容和特点的变化,以及考研辅导和评卷经验的积累,本书先后经过了五次较大的修改重版,内容不断充实完善,更好地体现了研究生入学考试复习指南的功能和特点。本书自出版后受到历届考生的欢迎。已成为许多考研辅导班选用的教材和考生复习时必备参考书。

本书有如下特点。

全书的结构安排上能适应考生系统复习考研数学的需要。书中不仅完整地介绍了考研大纲所划定的内容、题型和必备公式,还提供了近五年统考试题及其解析,使考生明确考试的要求和命题的特点,书中主要部分通过精选大量例题和练习帮助考生系统地复习掌握所需知识,提高解题能力,书中最后部分还有四套模拟仿真试题,考生可以对复习效果进行自测检查,巩固复习成果。可以说一书在手,便能实现复习的全过程。

为了贴近考试,在选题方面,全书严格按大纲的要求来编写。既注意内容的覆盖面,又突出了重点类型,尤其针对考生较为薄弱的环节,加强了标准化试题、综合性试题、经济应用试题和证明题等有关内容的解析训练,而且难易适度,比较适应实际应试要求。

根据多年命题的特点和大纲的要求,在进行例题解析时,本书十分注意对基本概念、基本定理、基本公式和基本类型的准确

理解、表述和应用，强调考生理清思路、把握脉络。以往考生往往偏重于超出大纲的偏题、难题和怪题，而忽视大纲的基本要求，以至遇到一些基本题时，似懂非懂，似会非会，该得分的不得分，这是考生应该尽量避免的。

由于数学考试大纲的基本内容与国家教委审定的财经类专业核心课程“经济数学基础”教学大纲基本相同，因此，本书不失作为高等院校财经类专业本科生学习“经济数学基础”课的一本较好的参考书。

汪洲教授仔细审阅了全部书稿，张南岳教授、王新民教授、莫颂清副教授帮助审阅了部分书稿，李赛时、刘力、蔡明、王建生老师参加了部分初稿的编写，中国人民大学出版社的有关同志为本书出版做了大量工作，在此，我们向他们表示衷心的感谢，同时，我们也要向对于本书出版给以厚爱和积极建议的广大考生读者表示深深的谢意。

由于我们水平有限，书中难免有疏漏和错误，欢迎读者批评指正。

编 者

1997.4

目 录

第一篇 经济学硕士入学考试数学考试大纲 的内容和要求

第一章 微积分	1
一、函数、极限、连续	1
二、一元函数微分学	15
三、一元函数积分学	43
四、多元函数微积分学	78
* 五、无穷级数	112
* 六、常微分方程	130
* 七、差分方程初步	144
第二章 线性代数	154
一、行列式	154
二、矩阵	172
三、向量	189
四、线性方程组	203
五、矩阵的特征值和特征向量	223
* 六、二次型	241
第三章 概率论与数理统计初步	256
一、随机事件及其概率	256
二、随机变量及其概率分布	279
三、随机变量的数字特征	313
四、二维随机变量及其分布与数字特征	330

* 五、大数定律与中心极限定理·····	363
* 六、数理统计初步·····	373

第二篇 数学四、五 1993 年—1997 年 统考试题分类解析

第四章 填空题·····	398
一、微积分·····	398
二、线性代数·····	403
三、概率论·····	407
第五章 选择题·····	411
一、微积分·····	411
二、线性代数·····	416
三、概率论·····	420
第六章 计算题·····	425
一、微积分·····	425
二、线性代数·····	436
三、概率论·····	449
第七章 论证题·····	454
一、微积分·····	454
二、线性代数·····	461
第八章 应用题·····	464
一、微积分·····	464
二、概率论·····	478

第三篇 模 拟 试 题

模拟试题一·····	484
数学三·····	484
数学四·····	488

模拟试题二.....	492
数学三.....	492
数学四.....	496
模拟试题三.....	500
数学三.....	500
数学四.....	504
模拟试题四.....	508
数学三.....	508
数学四.....	511
参考答案与提示.....	516
附录 1997 年全国攻读经济学硕士入学考试	
数学试题及参考解答.....	527

第一篇 经济学硕士入学考试数学考试 大纲的内容和要求

第一章 微 积 分

一、函数、极限、连续

(一)内 容 提 要

1. 函数概念.

函数的几何特性:

有界性 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义, 如果存在一个正常数 M , 使得对任意 $x \in D$, 恒有 $|f(x)| < M$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界, 否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

单调性 设函数 $f(x)$ 在某区间 D 上有定义, 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in D$, 且 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$) 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加 (或单调减少). 单调增加与单调减少函数统称单调函数.

周期性 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义, 如果存在正常数 T , 使得对任意 $x \in D$, 恒有 $f(x+T) = f(x)$ 成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, 满足上式的最小正数 T_0 称为 $f(x)$ 的周期.

奇偶性 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义, 且 D 关于原点对称; 若对任意 $x \in D$, 恒有 $f(x) = f(-x)$ (或 $f(x) = -f(-x)$), 则称函数 $f(x)$ 为偶函数 (或奇函数).

反函数、复合函数、隐函数、分段函数.

基本初等函数与初等函数:常数函数,幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数称为基本初等函数(定义域、主要性质和图形从略).由基本初等函数经有限次四则运算或有限次复合生成的函数称为初等函数.

简单的经济函数:在生产和经营活动中,成本、收入、利润关于产品的产量或销量 x 的函数关系分别称为总成本函数,记为 $C(x)$;总收入函数,记为 $R(x)$;总利润函数,记为 $L(x)$.一般地说, $C(x)$ = 固定成本 + 可变成本; $R(x) = px$, 其中 p 为产品的销售单价, x 为销量; $L(x) = R(x) - C(x)$. 商品的市场需求量 Q_d 和市场供给量 Q_s 相对商品价格 p 的函数关系,分别称为商品的需求函数 $f_d(p)$ 和供给函数 $f_s(p)$.

2. 极限概念.

设有数列 $\{u_n\}$ 和常数 A , 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 总有不等式 $|u_n - A| < \epsilon$ 成立, 则称常数 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = A$ 或 $u_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$.

设有函数 $f(x)$ 和常数 A , 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在正数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 总有不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$ 成立, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$$

如果自变量 x 仅限从 x_0 右侧(或左侧)趋向 x_0 时, $f(x) \rightarrow A$, 则称 A 为 $x \rightarrow x_0^+$ (或 $x \rightarrow x_0^-$) 时, 函数 $f(x)$ 的右极限(或左极限). 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$). 类似地可定义 $x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow A$ 的极限概念.

函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x)$ 存在且等于 A 的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+ (+\infty)} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^- (-\infty)} f(x) = A.$$

无穷小与无穷大 极限为零的变量称为无穷小量. 在自变量的某个变化趋势下, 若函数 $f(x)$ 的绝对值无限地增大, 则称 $f(x)$ 为无穷大量. 有限个无穷小量的和仍为无穷小量. 有限个无穷小量的积仍为无穷小量. 无穷小量与有界变量之积仍为无穷小量. 无穷小量除以极限不为零的变量, 其商仍为无穷小量. 若 α, β 为同一变化趋势下的无穷小量, 且 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \rho$, 则当 $\rho = 0$ 时, 称 β 为比 α 高阶的无穷小量, 当 $\rho = \infty$ 时, 称 β 为比 α 低阶的无穷小量, 当 $\rho = c \neq 0$ 时, 称 β 为与 α 同阶的无穷小量, 特别地当 $\rho = 1$ 时, 称 β 为与 α 等价的无穷小量, 记作 $\alpha \sim \beta$.

$\lim f(x) = A$ 的充分必要条件是, 函数 $f(x)$ 可表示为常数 A 与无穷小量 α 之和.

如果极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在, 则有运算法则:

$$\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$$

$$\lim [f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \quad (\lim g(x) \neq 0)$$

两个重要的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e, \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

3. 函数的连续性.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 若有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 称 x_0 为 $f(x)$ 的连续点; 如果函数 $f(x)$ 在某区间内每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在该区间内连续. 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处, 或者无定义, 或者无极限, 或者极限不等于函数值 $f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断, 称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

初等函数在其定义区间内连续.

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则

(1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取到最大值和最小值(最值定理);

(2) $f(a) \neq f(b)$ 时, 对介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任一实数 c , 必存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = c$ (介值定理).

(二) 例题解析

1. 填空.

(1) 已知 $f(e^x - 1) = x^2 + 1$, 则 $f(x)$ 的定义域为_____.

(2) 设函数 $y = \cos x$ 在 $(-\pi, 0)$ 有定义, 则其反函数为_____.
(用反三角函数表示)

(3) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 若 $f(x) = \frac{px^2 - 2}{x^2 + 1} + 3qx + 5$ 为无穷大量, 则 p 为_____, q 为_____, 若 $f(x)$ 为无穷小量, 则 p 为_____, q 为_____.

(4) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\operatorname{tg}x} - 1}{\ln(1+x)} = 100$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____.

(5) 已知函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $x \neq 0$ 时, $f(x) = \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x)\ln(1+x)}$, 则 $f(0) =$ _____.

(6) 设 $f(x) = \ln(1 - e^{1-x})$, 则曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线为_____, 连续区间为_____.

答(1) $(-1, +\infty)$ (2) $x = \arccos(-y) - \pi$ (3) p 为任意常数, q 为非零常数; $p = -5, q = 0$ (4) 200 (5) $\frac{3}{2}$ (6) $x = 1; (1 + \infty)$.

解析: (1) 求函数 $f(x)$ 的定义域时, 一般应先求出 $f(x)$ 的解析式. 为此, 令 $u = e^x - 1$, 或 $x = \ln(1+u)$, 可得 $f(x) = \ln^2(x+1) + 1$, 故 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$.

(2) $y = \cos x$ 在 $(-\pi, 0)$ 内严格单调增, 存在反函数, 由于 $\arccos x$ 的值域为 $(0, \pi)$, 若要用 $\arccos x$ 表示 $y = \cos x$ 在 $(-\pi, 0)$ 内的反函数, 需先作变换. $x \in (-\pi, 0)$ 时, $y = \cos x = -\cos(x + \pi)$, 由 $0 < x + \pi < \pi$ 可得 $x = \arccos(-y) - \pi$.

(3) 通分得 $f(x) = \frac{3qx^3 + (p+5)x^2 + 3qx + 3}{x^2 + 1}$, 于是, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 若 $q \neq 0$, 则 $f(x)$ 为无穷大量, 若 $q = 0$ 且 $p = -5$, 则 $f(x)$ 为无穷小量.

(4) 因为 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) \sim x$, $(1+f(x)\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}f(x) \cdot \operatorname{tg}x$, 所以由已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}f(x)\operatorname{tg}x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}f(x) = 100$. 即得 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 200$.

(5) 由连续性概念, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, 又因 $x \rightarrow 0$ 时 $1 + \cos x \rightarrow 2$, $\ln(1+x) \sim x$, 所以 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{2x} = \frac{3}{2}$.

(6) 因为 $x \rightarrow 1^+$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 所以 $x = 1$ 为铅直渐近线, 又因为 $f(x)$ 为初等函数, 连续区间即为 $f(x)$ 的定义域 $(1, +\infty)$.

2. 选择题(每小题给出的四个选项中, 只有一项正确).

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$
则 $x \leq 0$ 时, $f[g(x)] = ()$.

(A) $2x$ (B) x^2 (C) $4x^2$ (D) $-4x^2$

(2) $f(x) = \begin{cases} \cos x - x, & -\pi \leq x < 0 \\ \cos x + x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ 在其定义域内为 ().

(A) 无界函数 (B) 偶函数 (C) 单调函数

(D) 周期函数

(3) 设 $f(x)$ 处处可导, 则 ().

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$

(B) 当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

(C) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$

(D) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(4) 设 $f(x) = \int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt$, $g(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 ().

(A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小 (D) 同阶但非等价无穷小

(5) 下列函数中, () 在其定义域内连续.

(A) $\begin{cases} x+1 & x < 0 \\ x-1 & x > 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

答: (1) C (2) B (3) D (4) B (5) A

解析: (1) 处理分段函数的一般方法是, 先处理各分段开区间, 然后再单独讨论分段点. 在本题中, 当 $x < 0$ 时, $g(x) = -2x > 0$, 故对应于 $f(x) = x^2$, 有 $f[g(x)] = [g(x)]^2 = 4x^2$, 又 $g(0) = 0$, $f[g(0)] = 0^2 = 0$, 综上所述, 当 $x \leq 0$ 时, $f[g(x)] = 4x^2$.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $[-\pi, \pi]$, $f(x)$ 在闭区间 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 故为有界函数; 设 $x \in (0, \pi]$, 则 $f(x) = \cos x + x$, $-x \in [-\pi, 0)$; $f(-x) = \cos(-x) - (-x) = \cos x + x = f(x)$.

同理, $x \in [-\pi, 0)$ 时, 亦有 $f(x) = f(-x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数; 由定义易知, $f(x)$ 既不是单调函数, 也不是周期函数.

(3) 由反例: $x \rightarrow -\infty$ 时, $x^3 \rightarrow -\infty$, 但 $(x^3)' = 3x^2 \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -\infty$ 时, $(x^2)' = 2x \rightarrow -\infty$, 但 $x^2 \rightarrow +\infty$; 及 $x \rightarrow +\infty$ 时, $x \rightarrow +\infty$ 时, $x \rightarrow +\infty$, 但 $(x)' = 1 \rightarrow 1$. 可知 (A), (B), (C) 均不成立, 由排除

法可得(D)正确. 事实上, 由 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f'(x) \rightarrow +\infty$ 知, 总存在一个 $x_0 > 0$, 使 $x > x_0$ 时, 有 $f'(x) > M$. 于是当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 总有 $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)x > f(x_0) + Mx \rightarrow +\infty$.

$$(4) \text{ 由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)^2 \sin x}{x^4 + x^5} = 0, \text{ 知(B)正确.}$$

(5) 所给函数均为分段函数, 且分段点均为间断点, 其中仅有(A)的分段点不在定义域内, (A)正确.

3. 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2x^2 + \cdots + 100x^{100}}{x + x^2 + \cdots + x^{100}} \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2)e^{\frac{1}{x}} - x]$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{(1+2+\cdots+n)-1})$$

解: (1) $\frac{x + 2x^2 + \cdots + 100x^{100}}{x + x^2 + \cdots + x^{100}}$ 为初等函数, 且在 $x=1$ 处有定义, 连续. 即有

$$\text{原极限} = \frac{1+2+\cdots+100}{1+1+\cdots+1} = 50.5$$

(2) “ $\infty - \infty$ ”型极限. 先变换化为“ $\frac{0}{0}$ ”型极限与一个有限极限之和, 即有

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow \infty} [x(e^{\frac{1}{x}} - 1) + 2e^{\frac{1}{x}}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{\frac{1}{x}} = 3$$

(3) “ $\infty - \infty$ ”型极限, 先变换化为“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型, 即有

$$\text{原极限} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+2+\cdots+n} + \sqrt{1+2+\cdots+n-1}} = 0$$

以上例子说明, 求极限时, 首先要分析极限的类型特征. 一般地说, 若函数 $f(x)$ 是初等函数, 且 x_0 在定义域内, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. 若极限式中含有有界变量, 则应该考虑设法利用无穷小量与有界变量乘积仍为无穷小量的性质. 若极限为未定式, 一般要化

为“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型,设法消去零因子或无穷大因子,再利用极限运算法则或两个重要极限或用等价无穷小代换等方法定值,下一节将介绍用罗必塔法则对未定式定值,往往更为简便.

4. 检查下列运算是否正确,若不正确,写出正确运算过程.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctg x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4x}{1-x^2} - \frac{1+x}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x}{1-x^2} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x}{1-x} = \infty - \infty = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2+3}{x^2-3x+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2+3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-3x+2)} = \frac{11}{0} = \infty$$

$$(4) \text{ 因为 } \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}} = [\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)]^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}} = 1^\infty = 1$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\csc x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x \sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{\sin x}} = e$$

$$(7) \text{ 因为 } \sin x \sim x, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$$

答: (1) 错. $x \rightarrow \infty$ 时, $\arctg x$ 极限不存在, 不能用运算法则. 正确解法是: 由于 $|\arctg x| < \frac{\pi}{2}$, 且当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 为无穷小量, 故原极限 $= 0$.

(2) 错. $x \rightarrow 1$ 时, 和式 $\frac{4x}{1-x^2}, \frac{1+x}{1-x}$ 的极限均不存在, 不能运用极限运算法则, 而且两个无穷大量之差也不一定为无穷小. 正确的解法是, 先通分, 化为“ $\frac{0}{0}$ ”型再定值. 即

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(1-x)^2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(1-x)}{1+x} = 0$$

(3) 错. 极限式分母为零, 不能运用极限运算法则. 若要用法

则,正确做法是:首先由

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 3)} = \frac{0}{11} = 0$$

得出 原极限 $= \infty$

(4)错. 一般情况下,等式 $\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{x+1}{x-2}$ 不成立. 正确的解法是,根据极限概念, $x \rightarrow 1$ 时, $x \neq 1$, 因此,在极限号下分子分母可消去 $(x-1)$ 因子,即有

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2$$

(5)错. 极限式是幂指函数形式,无此极限运算法则,正确解法是,先取对数再求极限,即由

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} = 0 \cdot 1 = 0$$

得出 原极限 $= e^0 = 1$

(6)错. 极限过程所有变量应同步变化,不能将其中某个部分先变,正确解法同(6),即由

$$\lim_{x \rightarrow 0} \csc x \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$$

得出 原极限 $= e^1 = e$

(7)错. 在计算和差形式的极限时,不能用等价无穷小代换,正确的做法是:用罗必塔法定值或在使用一次罗必塔法则后,分子用等价无穷小代换定值. 即

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0}}{\frac{1-\cos x}{3x^2}} \xrightarrow{1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

以上讨论的是在求极限过程中经常犯的错误. 说明在利用已知求极限的方法时,要十分注意使用的前提条件,不能在允许的条件之外想当然地进行极限运算.