高等数学新编

许品芳 王锦华 编

上册

上海交通大学出版社

高等数学新编

（上册）

许品芳　王锦华　编

上海交通大学

图书在版编目(CIP)数据

高等数学新编　上册/许品芳,王锦华编. 一上海:上海交通大学出版社,1999

ISBN 7-313-02291-3

Ⅰ.高…　Ⅱ.①许…　②王…　Ⅲ.高等数学　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 43426 号

高等数学新编

(上册)

许品芳　王锦华　编

上海交通大学出版社出版发行

上海市番禺路 877 号　邮政编码 200030

电话　64281208　传真　64683798

全国新华书店经销

立信会计常熟市印刷联营厂·印刷

开本:850×1168(mm)1/32　　印张:11.25　字数:290 千字

版次:1999 年 10 月　　第 1 版

印次:1999 年 10 月　　第 1 次

ISBN 7－313－02291－3/O·153

定价(上、下册):36.50 元

(本册定价:16.50 元)

前　言

本教材的作者是即将退休的教师.在高等数学与工程数学的教学中,教过“工农兵”、用过“樊映川”,也各自编过几套高等数学的教材.“摸爬滚打”几十年,深感我国的工科教学无论是教学内容,教学体系还是教学要求,几十年基本没变,太不正常了.与20世纪科技的飞速发展太不相衬.为此,在1990年自发组织了一个教学研究小组进行调研探讨.搜集了国内外的一些教材与教改文章.同时也开展调查:向本校毕业生们发卷调查;请工程技术专家教授开座谈会调查.大家一同来探讨:工程技术人员应该具备怎样的数学素质?当前工程数学的教学有什么问题?结论是:一、要用的未必学到,学到的未必用到;二、文献看不懂,现代数学的术语、符号成了拦路虎;三、迫切需要学习建模与数值计算的知识.由此可知,工科数学的改革必须是“大手术”,并且要多管齐下,还得分阶段实施.

我们觉得,进行工科数学教学改革,应该采取新观点、建立新系体、运用新技术.只是鉴于人力有限,我们只从工科大学生必学的高等数学、线性代数与数值计算方法入手,提出用现代数学观点统一组织这三门课的内容,构成新体系.要求确保基本知识,注重应用,强化建模,加强计算机应用.新体系要“博、新、浅”,即知识面要广博,内容要新颖,要求要浅显的精神,渗透现代数学观点和方法,为进一步学习现代数学知识提供接口.新体系还要充分考虑到采用现代化教学手段——投影仪、电视录像、计算机辅助教学等,要加大课堂信息量,压缩授课时数.

必须指出,本教材与我们设想的目标还有一点距离,如数值计

算仅仅在数学实验课中有所体现.这因为受到学生学习的顺序性限制,动作太大,对其他课程影响大,牵涉面太多,难以一步到位.

本教材保留了高等数学与线性代数的经典内容:函数、极限、连续、导数、微分、各类积分、微分方程、级数、场论三度、行列式、矩阵、线性方程组、线性变换、二次型等.但线性代数与空间解析几何在 R^n 空间的前提下统一处理了.一元函数、多元函数、矢值函数、向量函数(即变换)及它们的极限、连续、导数也统一起来了.按照"以集合论为基础,充分使用代数构造语言来处理分析问题"的现代数学方式,本教材引入向量空间、内积、欧氏空间、度量空间的概念,介绍了集合、关系、映射、笛卡尔乘积、向量函数,补充定义了数量对向量的导数—— n 维空间的梯度,向量对向量的导数——雅可比矩阵,还引进了海赛矩阵.再藉助于多元泰勒公式及二次型正定理论,使多元极值问题有了完整的讨论结果.从而,把微积分从三维推向更高维.

我们开设数学实验课作为我们改革的一部分.由于"数学软件"的使用引入了数学,从而使降低微积分符号运算成为可能.因为繁琐的符号运算完全可以用计算机来完成,于是可省出时间用于概念的理解,建模训练和知识应用.这样使工科数学的教学与实际联系更加紧密,充分体现数学现代化.

本教材第1、2、3、4、5、6章由许品芳老师编写,第7、8、9、10、11、12章由王锦华老师编写,数学实验由许春根老师编写,还有欧景昭、裘慧君老师也做了不少工作.

本教材适合于工科本科生使用,约需250学时,我们曾在各种类型工科专业试用过四届,反映良好,无接受困难.

本教材在出版过程中,得到了江苏省教委的大力支持,被列入"江苏省普通高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"重点项目.还得到南京理工大学教务处与应用数学系领导的大

力支持,得到各有关专业的领导与同学的积极配合,还有上海交通大学出版社的帮助.在此一并致谢.

由于编者水平有限,加上教学任务又重,编写时推敲不够,错误缺点难免,衷心欢迎批评指教.

编　者

1999 **年** 8 **月**

目　　录

第 1 章　R^n 空间

演戏需要舞台，人要正常生活离不开社会，数学的研究也有背景，它必须在空间之中进行. 本章介绍一种最常用的空间——R^n 欧氏空间. 组成空间的元素是点或向量. 它们间最简单的关系是线性关系，用线性方程组表示. 线性方程组有着巨大的实用价值. 行列式与矩阵是研究线性方程组的重要工具，现也广泛地用于数学科学的各个领域之中.

§1.1　行列式

1^0　行列式定义

我们知道二元一次方程组(又称二元线性方程组)

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时有唯一解

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为了便于记忆，引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12},$$

称为二阶行列式. 它包含两行、两列，横的称行，竖的称列. 其中 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 称为行列式的元素. 请注意：二阶行列式表示 $2!=2$ 项的代数和，而每一项是两个分别来自不同行与不同列的元素之乘积.

利用行列式符号，解式(1.2)可写成

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D},\tag{1.2}$$

其中 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$，$D_x=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}$，$D_y=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}$.

类似地，在求解三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases}\tag{1.3}$$

时，引入三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\triangleq a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

请注意：三阶行列式是 $3!=6$ 项的代数和，每一项是三个分别来自不同行与不同列的元素之乘积. 若记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_x=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$D_y=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_z=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}.$$

则不难验证，当 $D\neq0$ 时方程组(1.3)有唯一解：

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D},\quad z=\frac{D_z}{D}.$$

考察三阶行列式的定义，不难发现它与二阶行列式有如下关系：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.$$

模仿它，可以定义四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

它是 $4!=24$ 项之代数和，每项是四个分别来自不同行不同列的元素之乘积.

以此类推，当已经定义了 $n-1$ 阶行列式之后，可以定义 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \triangleq (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}.$$

用数学归纳法可知：n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，每一项是 n 个来自不同行不同列的元素之积.

为了简化 n 阶行列式定义中展开式的书写，我们引入代数余子式的概念. 在 n 阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列的全部元素后，剩下的元素构成一个 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，而称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}，即有

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

于是，n 阶行列式 D_n 可简单地写成

$$D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}.$$