

The cover features a yellow background with horizontal lines. A large blue shape, resembling a stylized 'C' or a pen nib, is on the left. Several yellow pushpins are pinned to the yellow background. A blue pen nib is also visible.

高等数学新编

许品芳 王锦华 编

上册

上海交通大学出版社

013
X82-2

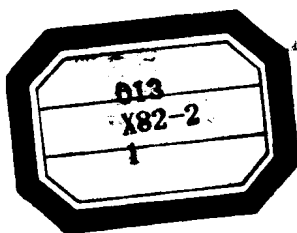
447950

高等数学新编

(上册)

许品芳 王锦华 编

上海交通大学



图书在版编目(CIP)数据

高等数学新编 上册/许品芳,王锦华编. —上海:上海交通大学出版社,1999

ISBN 7-313-02291-3

I. 高… II. ①许… ②王… III. 高等数学 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 43426 号

高等数学新编

(上册)

许品芳 王锦华 编

上海交通大学出版社出版发行

上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030

电话 64281208 传真 64683798

全国新华书店经销

立信会计常熟市印刷联营厂·印刷

开本:850×1168(mm)1/32 印张:11.25 字数:290 千字

版次:1999 年 10 月 第 1 版

印次:1999 年 10 月 第 1 次

ISBN 7-313-02291-3/O · 153

定价(上、下册): 36.50 元

(本册定价:16.50 元)

本书任何部分文字及图片,如未获得本社书面同意,
不得用任何方式抄袭、节录或翻印。

(本书如有缺页、破损或装订错误,请寄回本社更换。)

前 言

本教材的作者是即将退休的教师. 在高等数学与工程数学的教学中, 教过“工农兵”、用过“樊映川”, 也各自编过几套高等数学的教材. “摸爬滚打”几十年, 深感我国的工科教学无论是教学内容, 教学体系还是教学要求, 几十年基本没变, 太不正常了. 与 20 世纪科技的飞速发展太不相衬. 为此, 在 1990 年自发组织了一个教学研究小组进行调研探讨. 搜集了国内外的一些教材与教改文章. 同时也开展调查: 向本校毕业生们发卷调查; 请工程技术专家教授开座谈会调查. 大家一同来探讨: 工程技术人员应该具备怎样的数学素质? 当前工程数学的教学有什么问题? 结论是: 一、要用的未必学到, 学到的未必用到; 二、文献看不懂, 现代数学的术语、符号成了拦路虎; 三、迫切需要学习建模与数值计算的知识. 由此可知, 工科数学的改革必须是“大手术”, 并且要多管齐下, 还得分阶段实施.

我们觉得, 进行工科数学教学改革, 应该采取新观点、建立新体系、运用新技术. 只是鉴于人力有限, 我们只从工科大学生必学的高等数学、线性代数与数值计算方法入手, 提出用现代数学观点统一组织这三门课的内容, 构成新体系. 要求确保基本知识, 注重应用, 强化建模, 加强计算机应用. 新体系要“博、新、浅”, 即知识面要广博, 内容要新颖, 要求要浅显的精神, 渗透现代数学观点和方法, 为进一步学习现代数学知识提供接口. 新体系还要充分考虑到采用现代化教学手段——投影仪、电视录像、计算机辅助教学等, 要加大课堂信息量, 压缩授课时数.

必须指出, 本教材与我们设想的目标还有一点距离, 如数值计

算仅仅在数学实验课中有所体现,这因为受到学生学习的顺序性限制,动作太大,对其他课程影响大,牵涉面太多,难以一步到位。

本教材保留了高等数学与线性代数的经典内容:函数、极限、连续、导数、微分、各类积分、微分方程、级数、场论三度、行列式、矩阵、线性方程组、线性变换、二次型等.但线性代数与空间解析几何在 R^n 空间的前提下统一处理了.一元函数、多元函数、矢值函数、向量函数(即变换)及它们的极限、连续、导数也统一起来了.按照“以集合论为基础,充分使用代数构造语言来处理分析问题”的现代数学方式,本教材引入向量空间、内积、欧氏空间、度量空间的概念,介绍了集合、关系、映射、笛卡尔乘积、向量函数,补充定义了数量对向量的导数—— n 维空间的梯度,向量对向量的导数——雅可比矩阵,还引进了海赛矩阵.再借助于多元泰勒公式及二次型正定理论,使多元极值问题有了完整的讨论结果.从而,把微积分从三维推向更高维.

我们开设数学实验课作为我们改革的一部分.由于“数学软件”的使用引入了数学,从而使降低微积分符号运算成为可能.因为繁琐的符号运算完全可以用计算机来完成,于是可省出时间用于概念的理解,建模训练和知识应用.这样使工科数学的教学与实际联系更加紧密,充分体现数学现代化.

本教材第1、2、3、4、5、6章由许品芳老师编写,第7、8、9、10、11、12章由王锦华老师编写,数学实验由许春根老师编写,还有欧景昭、裘慧君老师也做了不少工作.

本教材适合于工科本科生使用,约需250学时,我们曾在各种类型工科专业试用过四届,反映良好,无接受困难.

本教材在出版过程中,得到了江苏省教委的大力支持,被列入“江苏省普通高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”重点项目.还得到南京理工大学教务处与应用数学系领导的大

力支持,得到各有关专业的领导与同学的积极配合,还有上海交通大学出版社的帮助.在此一并致谢.

由于编者水平有限,加上教学任务又重,编写时推敲不够,错误缺点难免,衷心欢迎批评指教.

编 者

1999 年 8 月

目 录

第 1 章 R^n 空间	(1)
§ 1.1 行列式	(1)
1 ⁰ 行列式定义	(1)
2 ⁰ 行列式性质	(4)
3 ⁰ 克莱姆法则	(7)
4 ⁰ 乘法公式	(9)
习题 1-1	(10)
§ 1.2 R^3 空间	(13)
1 ⁰ 空间直角坐标系	(13)
2 ⁰ 空间两点间距离公式	(14)
3 ⁰ 向量及其线性运算	(15)
4 ⁰ 向量的坐标表示	(18)
5 ⁰ 数量积	(20)
6 ⁰ 向量积	(23)
7 ⁰ 混合积	(25)
习题 1-2	(26)
§ 1.3 面与线	(27)
1 ⁰ 平面方程	(27)
2 ⁰ 直线方程	(29)
3 ⁰ 线面关系	(31)
4 ⁰ 曲面方程	(33)
5 ⁰ 曲线方程	(36)
6 ⁰ 二次曲面	(38)
习题 1-3	(41)

§ 1.4 R^n 空间	(44)
1° n 维向量与 R^n 向量空间 同构	(44)
2° 内积与 R^n 欧氏空间	(46)
3° 向量的线性相关性	(47)
习题 1-4	(50)
§ 1.5 矩阵	(51)
1° 矩阵及其运算	(51)
2° 矩阵的秩与矩阵的初等变换	(55)
3° 满秩线性方程组与逆矩阵	(62)
4° 分块矩阵	(70)
习题 1-5	(72)
§ 1.6 线性方程组的通解结构	(75)
1° 齐次线性方程组的通解结构	(75)
2° 非齐次线性方程组的通解结构	(78)
习题 1-6	(83)
 第 2 章 函数与极限	 (86)
§ 2.1 集合与映射	(86)
1° 集合	(86)
2° 关系	(87)
3° 上确界与下确界	(89)
4° 映射	(90)
习题 2-1	(92)
§ 2.2 一元函数	(92)
1° 一元函数概念	(92)
2° 反函数	(95)
3° 函数的四种特性	(96)
4° 函数的运算	(97)
5° 初等函数	(99)

习题 2-2	(99)
§ 2.3 无穷小与无穷大	(100)
1° 常量与变量	(100)
2° 无穷小量	(101)
3° 无穷大量	(104)
4° 无穷小与无穷大的关系	(106)
5° 用 ∞ 表示的过程	(106)
6° 无穷小运算	(107)
习题 2-3	(108)
§ 2.4 一元极限	(109)
1° 一元极限定义	(109)
2° 一元极限性质	(112)
3° 极限运算法则	(114)
4° 一元极限存在准则	(117)
习题 2-4	(119)
§ 2.5 无穷小比较	(120)
1° 两个重要极限	(120)
2° 无穷小的比较	(124)
习题 2-5	(126)
§ 2.6 数项级数	(127)
1° 数项级数敛散性定义	(127)
2° 级数性质	(129)
3° 正项级数敛散性判别	(131)
4° 变号级数敛散性判别	(138)
习题 2-6	(141)
§ 2.7 n 维欧氏空间 R^n 中的点集	(143)
1° 距离空间	(143)
2° R^n 空间的形象化	(144)
3° R^n 中点集的一般概念	(144)

习题 2-7	(147)
§ 2.8 函数与极限的一般概念	(147)
1° 函数的一般定义	(147)
2° 多元函数	(148)
3° 矢值函数	(149)
4° 向量函数	(150)
5° 向量序列(点列)的极限	(150)
6° 函数极限的一般定义	(151)
7° 多元函数的极限	(152)
8° 矢值函数的极限	(153)
9° 向量函数的极限	(153)
10° 极限的性质与运算法则	(153)
习题 2-8	(154)
§ 2.9 函数的连续性	(154)
1° 一元函数的连续性	(154)
2° 间断点	(156)
3° 连续的一般概念	(157)
4° 有界闭区域上连续函数的性质	(157)
5° 初等函数的连续性	(159)
习题 2-9	(161)
第 3 章 导数与微分	(162)
§ 3.1 导数概念	(162)
1° 实例	(162)
2° 导数定义	(164)
3° 可导与连续的关系	(166)
4° 导函数	(166)
习题 3-1	(168)
§ 3.2 求导法则与导数基本公式	(170)

1 ⁰	函数的和差积商的求导法则	(170)
2 ⁰	反函数的求导法则	(172)
3 ⁰	复合函数求导法则	(173)
4 ⁰	导数基本公式	(174)
	习题 3-2	(176)
§ 3.3	偏导数与梯度	(177)
1 ⁰	偏导数	(177)
2 ⁰	梯度	(180)
	习题 3-3	(180)
§ 3.4	微分	(181)
1 ⁰	一元函数的微分	(181)
2 ⁰	多元函数的微分——全微分	(186)
3 ⁰	矢值函数的微分、曲线的切线与法平面	(188)
4 ⁰	向量函数的微分	(191)
	习题 3-4	(194)
§ 3.5	链法则	(196)
1 ⁰	全导数公式	(196)
2 ⁰	多元复合函数求导法则	(198)
3 ⁰	向量复合函数求导法则	(200)
4 ⁰	一阶微分形式不变性	(201)
	习题 3-5	(202)
§ 3.6	隐函数及其求导法则	(203)
1 ⁰	逆映射存在定理	(203)
2 ⁰	一个方程所确定的隐函数存在定理及求导法则 ..	(205)
3 ⁰	由方程组所确定的隐函数组的存在定理及求导 法则	(208)
	习题 3-6	(210)
§ 3.7	高阶导数	(211)
1 ⁰	一元函数的高阶导数	(211)

2°	由参数方程所确定的函数的高阶导数	(213)
3°	矢值函数的高阶导数	(214)
4°	高阶偏导数	(214)
5°	海赛矩阵	(216)
6°	隐函数的高阶导数与高阶偏导数	(217)
	习题 3-7	(219)

第 4 章 中值定理与导数应用 (221)

§ 4.1 中值定理 (221)

1°	函数的极值点 费马引理	(221)
2°	罗尔定理	(222)
3°	柯西定理	(222)
4°	拉格朗日定理	(223)
5°	函数的增减性判别	(224)
6°	多元函数的拉格朗日定理	(225)
	习题 4-1	(226)

§ 4.2 洛必大法则 (227)

1°	$\frac{0}{0}$ 型未定式	(227)
2°	$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	(229)
3°	其他类型未定式	(230)
	习题 4-2	(232)

§ 4.3 泰勒公式 (232)

1°	一元泰勒公式	(232)
2°	几个常用的麦克劳林公式	(235)
3°	多元泰勒公式	(237)
	习题 4-3	(238)

§ 4.4 一元函数图形研究 (239)

1°	函数取极值的条件	(239)
----	----------------	-------

2 ⁰	一元函数的凹凸性与拐点	(241)
3 ⁰	渐近线	(243)
4 ⁰	函数作图	(245)
	习题 4-4	(246)
§ 4.5	曲率	(247)
1 ⁰	曲率定义	(247)
2 ⁰	曲率公式	(249)
3 ⁰	曲率圆	(250)
	习题 4-5	(252)
§ 4.6	曲面的切平面与法线	(253)
	习题 4-6	(255)
§ 4.7	方向导数	(256)
	习题 4-7	(258)
第 5 章 线性空间与线性变换		(260)
§ 5.1	线性空间	(260)
1 ⁰	线性空间的概念	(260)
2 ⁰	基底与坐标	(262)
3 ⁰	基变换与坐标变换	(265)
4 ⁰	线性子空间	(268)
5 ⁰	同构	(271)
	习题 5-1	(271)
§ 5.2	线性变换	(274)
1 ⁰	线性变换的概念	(274)
2 ⁰	线性变换的运算	(275)
3 ⁰	线性变换的矩阵表示	(277)
4 ⁰	$V \rightarrow V$ 的线性变换对于不同基底的矩阵	(282)
5 ⁰	特征值与特征向量	(284)
	习题 5-2	(288)

§ 5.3 正交变换	(290)
1 ⁰ 向量的正交性	(290)
2 ⁰ 标准正交基	(293)
3 ⁰ 正交变换	(296)
习题 5-3	(298)
§ 5.4 二次型	(300)
1 ⁰ 二次型及其矩阵表示	(300)
2 ⁰ 二次型化法式	(301)
3 ⁰ 用正交变换将二次型化为法式	(304)
4 ⁰ 惯性律与正定二次型	(307)
习题 5-4	(311)
 第 6 章 多元极值与最值	 (313)
§ 6.1 多元函数极值的判定	(313)
习题 6-1	(316)
§ 6.2 最值问题	(317)
习题 6-2	(318)
§ 6.3 条件极值	(319)
习题 6-3	(321)
 习题答案	 (323)

第 1 章 R^n 空间

演戏需要舞台,人要正常生活离不开社会,数学的研究也有背景,它必须在空间之中进行.本章介绍一种最常用的空间—— R^n 欧氏空间.组成空间的元素是点或向量.它们间最简单的关系是线性关系,用线性方程组表示.线性方程组有着巨大的实用价值.行列式与矩阵是研究线性方程组的重要工具,现也广泛地用于数学科学的各个领域之中.

§ 1.1 行列式

1⁰ 行列式定义

我们知道二元一次方程组(又称二元线性方程组)

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时有唯一解

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (1.2)$$

为了便于记忆,引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

称为二阶行列式.它包含两行、两列,横的称行,竖的称列.其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为行列式的元素.请注意:二阶行列式表示 $2! = 2$ 项的代数之和,而每一项是两个分别来自不同行与不同列的元素之乘积.

利用行列式符号,解式(1.2)可写成

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad (1.2)$$

其中 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

类似地,在求解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1.3)$$

时,引入三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

请注意:三阶行列式是 $3! = 6$ 项的代数和,每一项是三个分别来自不同行与不同列的元素之乘积.若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

则不难验证,当 $D \neq 0$ 时方程组(1.3)有唯一解:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}.$$

考察三阶行列式的定义,不难发现它与二阶行列式有如下关系:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

模仿它,可以定义四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \triangleq a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

它是 $4! = 24$ 项之代数和,每项是四个分别来自不同行不同列的元素之乘积.

以此类推,当已经定义了 $n-1$ 阶行列式之后,可以定义 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \triangleq (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}.$$

用数学归纳法可知: n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和,每一项是 n 个来自不同行不同列的元素之积.

为了简化 n 阶行列式定义中展开式的书写,我们引入代数余子式的概念.在 n 阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列的全部元素后,剩下的元素构成一个 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij} ,而称 $(-1)^{i+j} M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij} ,即有

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

于是, n 阶行列式 D_n 可简单地写成

$$D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^n a_{1k}A_{1k}.$$