

常微分方程稳定性理论

许淞庆编著

上海科学技术出版社

常微分方程稳定性理論

許淞庆 編著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍运动稳定性理论的李雅普诺夫第二方法，并重点介绍近十几年来有关这方面的某些主要的研究成果。全书共分八章。第一章引言；第二章叙述李雅普诺夫第二方法的基本定理，并介绍了近代的若干补充；第三、四、五章讨论驻定运动；第六章讨论周期运动；第七章非驻定运动，讨论了李雅普诺夫问题的逆问题，以及关于稳定性问题的各种判别准则；第八章扼要地介绍了关于全局稳定的研究。可作高等学校有关课程的专门化教材或教学参考用书，也可供工程技术人员作参考。

2002/15

常微分方程稳定性理论

许淞庆 编著

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 12.75 字数 302,000

1962年6月第1版 1980年12月第4次印刷

印数 6,001—9,100

统一书号 13119·463 定价：(科四) 1.45 元

序 言

穩定性理論是微分方程的一個重要分支，是由研究運動問題而發展起來的。俄國著名數學家李雅普諾夫經過長期深入的鑽研，首先給穩定性概念下了嚴格的數學定義，並建立了一系列極為豐富的理論，在 1892 年發表了他的經典著作《運動穩定性的一般問題》，從而奠定了運動穩定性理論的基礎。近來由於科學技術特別是自動調節發展的需要，穩定性理論的研究工作日趨蓬勃，不斷出現新的支派和成果，並引起廣大數學工作者和工程技術人員的密切注意和研究興趣。本書就是為了適應國內對穩定性理論學習和研究上的需要而編寫的。

本書是在中山大學數學力學系微分方程專門化兩年來講授穩定性理論的教材的基礎上經過補充加工而寫成的。除了系統介紹經典理論中尚在繼續發展的李雅普諾夫第二方法以外，並重點介紹關於這方面近二十多年來特別是近年來的研究成果，同時擬訂了適量的例題與習題，希望能對學習這門科學的讀者有所幫助。但由於材料多，篇幅有限，所以有些認為較重要的成果也只能述而不證，只注明文獻名稱，以便讀者需要進一步研究時的參考。至於用

李雅普諾夫泛函 V 解决时滯方程稳定性的工作, 克拉索夫斯基在著作[5]已有詳細論述, 这里不作介紹了。編著者主观上虽力图将古典和近代理論加以适当配合安排, 使本书具有一定的特色, 同时滿足初学者和研究工作者的需要, 但受科学水平所限, 恐难达到預期目的, 至于叙述和論証上的缺点与錯誤更在所难免, 誠愚地希望讀者給予批評指正。

本书是在教研組集体协助下写成的, 本人不过总其成而已。书中第六、七、八章和附录的初稿主要是由黎百恬同志写的, 周之銘、黄友川二同志分别参加了第六、八两章的个别节目的編写工作, 他們并和王高雄同志等参加全稿的討論修正校对工作, 祝兴宇同志为本书部分眷稿。特别要感謝的是, 胡金昌教授对本书的編著工作自始至終給以热情的关怀和支持, 并在审查稿件过程中提供不少寶貴的指導意見。沒有諸同志的大力协作, 本书是难以完成的。此外, 編著者还要感謝导师巴索夫(Басов В. П.)在本学科方面所給予的教益。

最后, 对于上海科学技术出版社对本书出版工作的积极安排和提出一些修改方面的具体意見表示深切的謝意。

許崧庆于广州中山大学

1961年10月

目 录

序言

第一章 引言	1
§ 1 稳定性问题的提出和定义	1
§ 2 扰动运动的微分方程组	8
§ 3 关于解决稳定性问题的方法	13
§ 4 稳定性理论的实用意义和发展概略	13
第二章 李雅普诺夫第二方法的基本定理	19
§ 1 几点注意	19
§ 2 关于函数 V 的几个定义	21
§ 3 函数定号性及变号性的准则	24
§ 4 定号函数的几何解释	29
§ 5 李雅普诺夫关于稳定的定理	30
§ 6 上述定理的几何解释	35
§ 7 李雅普诺夫关于不稳定的定理	38
§ 8 例题	41
§ 9 切塔耶夫关于不稳定的定理	56
§ 10 切塔耶夫定理的应用	62
§ 11 关于第二方法基本定理的若干补充	66
第三章 驻定运动的研究——一般情形	72
§ 1 常系数线性微分方程组的基本理论	72
§ 2 派生行列式及其根	79
§ 3 关于李雅普诺夫函数 V 的构造的定理	82
§ 4 按第一近似方程判断稳定性的法则	87
§ 5 霍维茨定理	88
§ 6 例题	90
第四章 驻定运动的研究——第一临界情形	94
§ 1 方程组的化简变换	94

§ 2	方程組的又一次化簡变换	97
§ 3	一般情形稳定性的研究	101
§ 4	輔助定理	109
§ 5	特殊情形稳定性的研究	111
§ 6	特殊情形稳定性另一研究方法	121
§ 7	方法总结及例題	126
第五章	駐定运动的研究——第二临界情形	137
§ 1	微分方程組的化簡变换	137
§ 2	方程組的又一次化簡变换	144
§ 3	問題的分类, 滿足扰动方程的級数的結構	150
§ 4	一般情形, 扰动方程組的化簡	156
§ 5	特殊情形, 扰动方程的化簡	159
§ 6	級数收敛性的研究	161
§ 7	一般情形中稳定性的研究	169
§ 8	特殊情形中稳定性的研究	174
§ 9	原扰动运动微分方程的稳定問題的直接判定法	176
§ 10	正則积分与特殊情形的关系	185
§ 11	可求得正則积分的若干特殊情形	198
§ 12	方法总结及例題	201
第六章	周期运动的稳定性	217
§ 1	具有周期系数的綫性方程組的特征方程	218
§ 2	周期运动的可化性, 解的解析形式	222
§ 3	按第一近似方程判断稳定性的法則	227
§ 4	临界情形	229
§ 5	一般情形中周期运动稳定性的其他研究方法	244
§ 6	关于特征方程的計算問題	254
第七章	非駐定运动的研究	265
	第一部分 有关第二方法的一些問題	
§ 1	几种最简单的情形	266
§ 2	关于李雅普諾夫函数的若干問題	275
§ 3	关于李雅普諾夫漸近稳定与稳定的逆定理問題	292

第二部分 关于稳定性问题的各种判别准则	
§ 4 贝尔曼引理及其应用	309
§ 5 加甫里洛夫行列式判别法	316
§ 6 柯士青判别法	323
§ 7 扰动运动微分方程组的解的估值	329
§ 8 一类非线性方程组的稳定问题(儒波夫)	332
§ 9 冻结法	336
§ 10 定解方法	338
第八章 全局稳定的研究	342
§ 1 定义与基本定理	343
§ 2 艾瑞尔曼问题	359
§ 3 鲁里叶问题	378
附录 矩阵函数 e^A 的定义、性质及计算	381
参考文献	391
索引	396

第一章

引 言

§ 1 稳定性问题的提出和定义

在动力学问题中,质点组运动总可被表示成下列形式的微分方程组

$$\frac{dy_s}{dt} = Y_s(t; y_1, \dots, y_n) \quad (s=1, \dots, n), \quad (1.1)$$

其中 y_s 为广义坐标,表示与运动有关之量, t 表示时间, Y_s 为 $t; y_1, \dots, y_n$ 的实函数,定义于域

$$t \geq t^*, \quad (y_1, \dots, y_n) \in R, \quad (1.2)$$

此处 t^* 为常数, R 为 n 维区域;并假定 Y_s 在域 (1.2) 中连续且满足微分方程组解的唯一性条件。

显然对于每一组初值 $t_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$, 确定组 (1.1) 的唯一一个解,即对应于一个运动。

设考虑的一个特解为

$$y_s = f_s(t) \quad (s=1, \dots, n), \quad (1.3)$$

其中 $f_s(t)$ 定义于 $t \geq t^*$ 且不出区域 R 。

解 (1.3) 对应的运动称为未被扰动运动,其他一切解所对应的

运动称为扰动运动。

取运动开始时间 $t_0 \geq t^*$, 则(1.3)的初值显然为

$$y_s^{(0)} = f_s(t_0) \quad (s=1, \dots, n).$$

如果改变取初始条件为

$$y_s^{(0)} = f_s(t_0) + \eta_s \quad (s=1, \dots, n), \quad (1.4)$$

其中 η_s 为任意常数, 使点 $f_s(t_0) + \eta_s$ 不超出 R , 则由(1.4)所确定的(1.1)的解

$$y_s = y_s(t; \eta_1, \dots, \eta_n) \equiv y_s(t, \eta_t)$$

就对应于质点组的扰动运动。

数 η_1, \dots, η_n 称为质点组的初始扰动或简称扰动, 它是未被扰动运动改变为扰动运动的根源。

在具体问题中, 我们往往考虑 $|\eta_s|$ 相当小的情形。所谓扰动运动接近于未被扰动运动, 就意味着 $|\eta_s|$ 足够小。

让我们考虑差值

$$y_s(t, \eta_t) - f_s(t) \quad (s=1, \dots, n), \quad (1.5)$$

易见

$$y_s(t, 0) - f_s(t) \equiv 0,$$

而当 η_t 不全为零时, 这差值为 t 之函数。

自然产生这样一个问题: 可否适当选定任何充分小的 $|\eta_t|$, 例如 $|\eta_t| < \delta$, 使差值(1.5)的绝对值当一切 $t \geq t_0$ 时小于任意预先给定的正数? 这里所指的一切 $t \geq t_0$, 应该特别强调包括 t 无限增大 ($t \rightarrow \infty$) 时的情形, 因为不管 T 为怎样大的给定的正数, 根据解对初值的连续依赖性, 总可以选定足够小的 $|\eta_t|$ 值使当 $t \in [t_0, T]$ 时, 差值(1.5)的绝对值小于任意给定的正数。当微分方程组已给定时, 这个问题的答案显然决定于特解的选取, 所以问题的答案深刻地描述出未被扰动运动(1.3)的一种特性——稳定的或不稳定的特性。为了进一步应用数学工具研究这一特性, 我们引入数学

上严格的定义如下:

定义 1 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 有 $\delta > 0$ 存在, 使当 η_i 满足条件

$$|\eta_i| \leq \delta$$

时, 对于一切 $t \geq t_0$, 所有扰动运动满足不等式

$$|y_s(t, \eta_i) - f_s(t)| < \varepsilon \quad (s=1, \dots, n),$$

则未被扰动运动称为稳定(关于量 y_s), 否则称为不稳定。

定义 2 如果未被扰动运动为稳定, 且存在那样的正数 $\delta' > 0$, 使当任何扰动 η_i 满足不等式

$$|\eta_i| \leq \delta'$$

时, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (y_s(t, \eta_i) - f_s(t)) = 0 \quad (s=1, \dots, n),$$

则未被扰动运动称为渐近稳定。

可能发生这样的一种情形: 对于任意的 η_i , 不能找到定义 1 中所要求的数值 δ , 可是如果 η_i 满足如下形式的某些条件

$$\begin{aligned} \varphi_j(\eta_1, \dots, \eta_n) &= 0 \quad \text{或} \quad \varphi_j(\eta_1, \dots, \eta_n) \geq 0, \\ \varphi_j(0, \dots, 0) &= 0 \quad (j=1, \dots, m; 1 \leq m < n) \end{aligned}$$

时, 可以求得所需要的 δ , 则未被扰动运动称为条件稳定。

[注] 稳定性问题还可以提得更为广泛一些。我们可以考虑某些与坐标有关的量的稳定性问题, 例如考虑广义速率 $\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dots + \dot{y}_n^2}$ 的稳定问题。

设 $\Phi_s = \Phi_s(y_1, \dots, y_n)$ 为 y_1, \dots, y_n 的给定的连续实函数 ($s=1, \dots, k$)。

对于未被扰动运动, 即以函数 $f_s(t)$ 代入 Φ_1, \dots, Φ_k 中的 y_s , 这些函数将化为 t 的已知函数, 表为

$$F_s(t) \equiv \Phi_s(f_1(t), \dots, f_n(t)) \quad (s=1, \dots, k).$$

对于任一个扰动运动 $y_s = y_s(t, \eta_i)$, 这些函数将化为

$$\begin{aligned} G_s(t) &\equiv \Phi_s(y_1(t, \eta_i), \dots, y_n(t, \eta_i)) \\ &\equiv G_s(t, \eta_1, \dots, \eta_n) \quad (s=1, \dots, k), \end{aligned}$$

它是量 t, η_1, \dots, η_n 的函数。

显然当 $\eta_1 = \dots = \eta_n = 0$ 时, 对于一切 $t \geq t_0$, 所有差值

$$G_s(t) - F_s(t) \equiv 0 \quad (s=1, \dots, k),$$

而当 η_1, \dots, η_n 非零或不全为零时, 差值

$$G_s(t) - F_s(t) \quad (s=1, \dots, k)$$

为 t 的函数。

自然产生同样的问题: 可否给 $|\eta_s|$ 指出足够小的上限, 以保证 $|G_s(t) - F_s(t)|$ 对于一切 $t \geq t_0$, 小于任意指定的正数? 由于这一考虑, 我们规定如下的定义:

定义 设 L_1, \dots, L_k 为任意给定的正数, 不管它怎样小, 总可以选出正数 E_1, \dots, E_n , 使当任何 η_1, \dots, η_n 满足条件

$$|\eta_s| \leq E_s \quad (s=1, \dots, n)$$

时, 对一切 $t \geq t_0$, 产生不等式

$$|G_s(t) - F_s(t)| < L_s \quad (s=1, \dots, k),$$

则称未被扰动运动 $y_s = f_s(t)$ 关于变量 $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ 为稳定的, 否则称为不稳定的。

【例 1】作为例子, 我们来研究单摆的振动。如所周知, 它是由下列微分方程表示的

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi, \quad (1.6)$$

或者引入新变数 ψ , 化为下列方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \psi, \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{g}{l} \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

其中 l 表示摆长, φ 表示摆与铅垂方向之间的角度(见图 1)。我们考察下面两个运动关于 φ

及 $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \psi$ 的稳定性问题:

1° 平衡位置 $\varphi \equiv 0$ 关于 φ 及 $\dot{\varphi}$ 的稳定性。

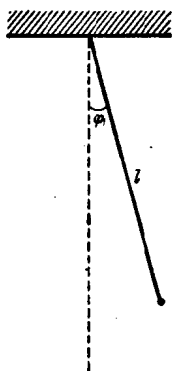


图 1

2° 由初始條件 $\varphi(t_0) = \alpha > 0$, $\dot{\varphi}(t_0) = 0$ 所決定的運動

$$\varphi = f(t), f(t_0) = \alpha, f'(t_0) = 0 \quad (1.8)$$

的穩定性, 其中 $f(t)$ 是一週期函數, 週期為 T .

我們不打算嚴格討論這兩個問題, 現在只從力學中所熟知的結論來說明上述的定義。

在情形 1°, 我們來說明解 $\varphi \equiv 0$ 關於 φ 及 $\dot{\varphi}$ 是穩定的平衡。因為只要適當地選擇系統離開平衡位置的初始偏差和初始速度所容許的界限, 就可以使這些偏差和速度的絕對值總是小於任何預先給定的正數, 這樣就滿足了 $\varphi \equiv 0$ 為穩定的定義的條件。

在情形 2°, 我們來說明運動 (1.8) 關於 φ 與 $\dot{\varphi}$ 是不穩定的。為此, 我們只需考慮任何由初始條件

$$\varphi(t_0) = \alpha + \delta, \dot{\varphi}(t_0) = 0$$

所決定的擾動運動, 其中 δ 是無論怎麼小的正數。我們知道, 單擺振動的週期與初始條件有關; 而在初速度為零時, 如果初始振幅愈大, 則運動的週期愈長, 因此擾動振動的週期 T' 將大於未被擾動振動的週期 T , 而在兩種振動中的 φ 角的差值在開始時等於 δ , 經過時間 T' 後將略有增加。如果 δ 愈小, 這個差值也愈小; 不過無論 δ 怎樣小, 經過足夠長的時間後, φ 角的差值逐漸增大而變得例如大於 α , 因此未被擾動運動是不穩定的。

關於情形 1°, 2° 的結論, 我們以後還將嚴格論證。

【例 2】考慮

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

或與它等價的一階方程組

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -2y_1 - 2y_2. \end{aligned} \right\}$$

求得通解

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-t} [y_1^{(0)} \cos t + (y_1^{(0)} + y_2^{(0)}) \sin t], \\ y_2 &= e^{-t} [y_2^{(0)} \cos t - (2y_1^{(0)} + y_2^{(0)}) \sin t], \end{aligned}$$

其中 $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}$ 表 $t=0$ 时 y_1, y_2 的初值。

設取 $y_1^{(0)}=0, y_2^{(0)}=1$, 得特解对应于未被扰动运动

$$y_1 = e^{-t} \sin t, \quad y_2 = e^{-t} (\cos t - \sin t). \quad (1.9)$$

現在改取初始条件为

$$y_1|_{t=0} = y_1^{(0)} = \eta_1, \quad y_2|_{t=0} = y_2^{(0)} = 1 + \eta_2,$$

則得对应于扰动运动的解

$$\begin{aligned} y_1(t, \eta_i) &= e^{-t} [\eta_1 \cos t + (1 + \eta_1 + \eta_2) \sin t], \\ y_2(t, \eta_i) &= e^{-t} [(1 + \eta_2) \cos t - (2\eta_1 + \eta_2 + 1) \sin t]; \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} y_1(t, \eta_i) - f_1(t) &= e^{-t} [\eta_1 \cos t + (\eta_1 + \eta_2) \sin t], \\ y_2(t, \eta_i) - f_2(t) &= e^{-t} [\eta_2 \cos t - (2\eta_1 + \eta_2) \sin t]. \end{aligned}$$

显見这些差值对于一切 $t \geq 0$, 一致地为 η_1, η_2 的連續函数, 因而未被扰动运动 (1.9) 为稳定。此外, 由上面的差值, 易見

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_s(t, \eta_i) - f_s(t)) = 0 \quad (s=1, 2),$$

故未被扰动运动 (1.9) 是漸近稳定的。

【例 3】考虑微分方程組

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -2y_1 - 4y_2 + 1 + 4t, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -y_1 + y_2 + \frac{3}{2}t^2. \end{aligned} \right\}$$

容易验证这个組有特解

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= e^{2t} + t^2 + t = f_1(t), \\ y_2 &= -e^{2t} - \frac{1}{2}t^2 = f_2(t); \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

它的初始条件为

$$\begin{aligned}y_1|_{t=0} &= y_1^{(0)} = 1, \\y_2|_{t=0} &= y_2^{(0)} = -1.\end{aligned}$$

现在, 研究特解 (1.10) 所对应的未被扰动运动的稳定性。

取初值为

$$y_1^{(0)} = 1 + \eta_1, \quad y_2^{(0)} = -1 + \eta_2,$$

其中 η_1, η_2 为初始扰动。

不难计算这组初值所确定的解, 所对应的扰动运动为

$$\begin{aligned}y_1(t, \eta_i) &= \frac{\eta_1 - 4\eta_2 + 5}{5} e^{2t} + \frac{4(\eta_1 + \eta_2)}{5} e^{-3t} + t^2 + t, \\y_2(t, \eta_i) &= -\frac{\eta_1 - 4\eta_2 + 5}{5} e^{2t} + \frac{\eta_1 + \eta_2}{5} e^{-3t} - \frac{1}{2} t^2.\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}y_1(t, \eta_i) - f_1(t) &= \frac{\eta_1 - 4\eta_2}{5} e^{2t} + \frac{4(\eta_1 + \eta_2)}{5} e^{-3t}, \\y_2(t, \eta_i) - f_2(t) &= -\frac{\eta_1 - 4\eta_2}{5} e^{2t} + \frac{\eta_1 + \eta_2}{5} e^{-3t}.\end{aligned}$$

显见, 对于任意给定的正数 ε , 不管选得 δ 怎样小, 总有 η_1, η_2 满足条件 $|\eta_i| < \delta$, 而不能保证 $|y_i(t, \eta_i) - f_i(t)| < \varepsilon$, 因为 e^{2t} 随着 t 的增大而无限增大, 故未被扰动运动 (1.10) 为不稳定。

但是当 η_1, η_2 满足条件

$$\eta_1 - 4\eta_2 = 0$$

时, 差值 $y_i(t, \eta_i) - f_i(t)$ 不含 e^{2t} 之项, 因而所要求的 δ 可以求得, 故在条件 $\eta_1 - 4\eta_2 = 0$ 之下未被扰动运动 (1.10) 为条件稳定。

§ 2 扰动运动的微分方程组

为了简化未被扰动运动的形式,引入新变数 x_s , 令

$$x_s = y_s - f_s(t) \quad (s=1, \dots, n), \quad (2.1)$$

于是未被扰动运动的稳定性问题就化为研究 $t \geq t_0$ 时量 x_s 的问题。

在变换 (2.1) 之下,方程 (1.1) 化为如下形式:

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t; x_1, \dots, x_n) \quad (s=1, \dots, n), \quad (2.2)$$

其中

$$\begin{aligned} X_s &= Y_s(t; x_1 + f_1(t), \dots, x_n + f_n(t)) - \frac{df_s(t)}{dt} \\ &= Y_s(t; x_1 + f_1(t), \dots, x_n + f_n(t)) \\ &\quad - Y_s(t; f_1(t), \dots, f_n(t)) \quad (s=1, \dots, n), \end{aligned}$$

显然满足条件

$$X_s(t; 0, \dots, 0) \equiv 0 \quad (s=1, \dots, n). \quad (2.3)$$

(2.2) 称为扰动运动微分方程组或扰动方程。

考虑到 (2.3), 显然 (2.2) 有一平凡解或零解

$$x_1 = \dots = x_n = 0. \quad (2.4)$$

零解 (2.4) 显然对应于组 (1.1) 的特解 (1.3), 所以由变换 (2.1) 所得到的扰动微分方程的零解 (2.4) 对应于未被扰动运动。

如果取初始条件为

$$x_s|_{t=t_0} = x_s^{(0)} \quad (s=1, \dots, n), \quad (2.5)$$

其中 $x_s^{(0)}$ 表任意常数, 但使点 $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ 不超出函数 X_s 的定义区域, 则显然有

$$x_s^{(0)} = y_s|_{t=t_0} - f(t_0) = \eta_s,$$

故对于扰动微分方程 (2.2) 来说, $x_s^{(0)}$ 就是扰动。

组 (2.2) 有满足初始条件 (2.5) 的唯一解

$$x_s = x_s(t) \quad (s=1, \dots, n).$$

这些解所确定的运动就是扰动运动,如果 $x_s^{(0)}$ 不全为零的话。

这样一来,对于组 (2.2) 有和组 (1.1) 相对应的定义:

定义 1 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ (δ 一般与 ε 及 t_0 有关), 使当

$$|x_s^{(0)}| \leq \delta \quad (s=1, \dots, n) \quad (2.6)$$

时, 对于一切 $t \geq t_0$, 所有扰动运动满足不等式

$$|x_s(t)| < \varepsilon \quad (s=1, \dots, n),$$

则 (2.2) 的未被扰动运动 $x_s = 0$ ($s=1, \dots, n$) 称为稳定。

如果对于某个给定的 $\varepsilon > 0$, 求不到相应的 $\delta > 0$, 即不管 $\delta > 0$ 怎样小, 总有一组值 $x_s^{(0)}$ 满足条件

$$|x_s^{(0)}| \leq \delta,$$

而以它为初值所确定的解 $x_s(t)$, 当 $t \geq t_0$ 取某一值时, 至少产生一些等式

$$|x_s(t)| = \varepsilon \quad s \in \{1, \dots, n\},$$

则未被扰动运动称为不稳定。

定义 2 如果未被扰动运动为稳定, 且存在这样的 $\delta' > 0$, 使当任何一组初值 $x_s^{(0)}$ 满足不等式

$$|x_s^{(0)}| \leq \delta' \quad (s=1, \dots, n)$$

时, 均有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_s(t) = 0 \quad (s=1, \dots, n),$$

则未被扰动运动 $x_s = 0$ 称为渐近稳定。

域 $|x_s| < \delta'$ 称为吸引域或渐近稳定域。

定义 3 如果对于任意的 $x_s^{(0)}$, 不存在满足稳定条件的 δ , 但对于由某些关系式

$$\begin{aligned} \varphi_j(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = 0 \quad \text{或} \quad \varphi_j(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \geq 0 \\ (j=1, \dots, m; 1 \leq m \leq n), \end{aligned}$$

且 $\varphi_j(0, \dots, 0) = 0$