常微分方程稳定性理论

许淞庆编著

上海科学技术出版社

常微分方程稳定性理論

許淞庆 編著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍运动稳定性理论的李雅普诺夫第二方法，并重点介绍近十几年来有关这方面的某些主要的研究成果。全书共分八章。第一章引言；第二章叙述李雅普诺夫第二方法的基本定理，并介绍了近代的若干补充；第三、四、五章讨论驻定运动；第六章讨论周期运动；第七章非驻定运动，讨论了李雅普诺夫问题的逆问题，以及关于稳定性问题的各种判别准则；第八章扼要地介绍了关于全局稳定的研究。可作高等学校有关课程的专门化教材或教学参考用书，也可供工程技术人员作参考。

常微分方程稳定性理论

许 淞 庆 编 著

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 12.75 字数 302,000

1962年6月第1版 1980年12月第4次印刷

印数 6,001—9,100

统一书号 13119·463 定价：（科四）1.45 元

序　言

稳定性理論是微分方程的一个重要分支，是由研究运动問題而发展起来的。俄国著名数学家李雅普諾夫經过长期深入的钻研，首先給稳定性概念下了严格的数学定义，并建立了一系列极为丰富的理論，在 1892 年发表了他的經典著作«运动稳定性的一般問題»，从而奠定了运动稳定性理論的基础。近来由于科学技术特别是自动調节发展的需要，稳定性理論的研究工作日趋蓬勃，不断出現新的支派和成果，并引起广大数学工作者和工程技术人員的密切注意和研究兴趣。本书就是为了适应国內对稳定性理論学习和研究上的需要而編写的。

本书是在中山大学数学力学系微分方程专門化两年来讲授稳定性理論的教材的基础上經过补充加工而写成的。除了系統介紹經典理論中尙在继續发展的李雅普諾夫第二方法以外，并重点介紹关于这方面近二十多年来特别是近年来的研究成果，同时拟訂了适量的例題与习題，希望能对学习这門科学的讀者有所帮助。但由于材料多，篇幅有限，所以有些认为較重要的成果也只能述而不証，只注明文献名称，以便讀者需要进一步研究时的参考。至于用

李雅普諾夫泛函V解决时滞方程稳定性的工作，克拉索夫斯基在著作[5]已有詳細論述，这里不作介紹了。編著者主观上虽力图将古典和近代理論加以适当配合安排，使本书具有一定的特色，同时满足初学者和研究工作者的需要，但受科学水平所限，恐难达到預期目的，至于叙述和論証上的缺点与錯誤更在所难免，誠恳地希望讀者給予批評指正。

本书是在教研組集体协助下写成的，本人不过总其成而已。书中第六、七、八章和附录的初稿主要是由黎百恬同志写的，周之銘、黃友川二同志分别参加了第六、八两章的个别节目的編写工作，他們幷和王高雄同志等参加全稿的討論修正校对工作，祝兴宇同志为本书部分誊稿。特别要感謝的是，胡金昌教授对本书的編著工作自始至終給以热情的关怀和支持，幷在审查稿件过程中提供不少宝貴的指导意見。沒有諸同志的大力协作，本书是难以完成的。此外，編著者还要感謝导师巴索夫(Басов В. П.)在本学科方面所給予的教益。

最后，对于上海科学技术出版社对本书出版工作的积极安排和提出一些修改方面的具体意見表示深切的謝意。

許淞庆于广州中山大学
1961年10月

目 录

第一章

引　　言

§1 稳定性問題的提出和定义

在动力学問題中，质点組运动总可被表示成下列形式的微分方程組

$$\frac{dy_s}{dt}=Y_s(t;\, y_1,\, \cdots,\, y_n) \quad (s=1,\, \cdots,\, n), \tag{1.1}$$

其中 y_s 为广义坐标，表示与运动有关之量，t 表示时間，Y_s 为 $t;\, y_1,\, \cdots,\, y_n$ 的实函数，定义于域

$$t\geqslant t^*, \quad (y_1,\, \cdots,\, y_n)\in R, \tag{1.2}$$

此处 t^* 为常数，R 为 n 維区域；并假定 Y_s 在域 (1.2) 中連續且滿足微分方程組解的唯一性条件。

显然对于每一組初值 $t_0,\, y_1^{(0)},\, \cdots,\, y_n^{(0)}$，确定組 (1.1) 的唯一一个解，即对应于一个运动。

設考虑的一个特解为

$$y_s=f_s(t) \quad (s=1,\, \cdots,\, n), \tag{1.3}$$

其中 $f_s(t)$ 定义于 $t\geqslant t^*$ 且不超出区域 R。

解 (1.3) 对应的运动称为**未被扰动运动**，其他一切解所对应的

运动称为**扰动运动**。

取运动开始时間 $t_0 \geqslant t^*$，則(1.3)的初値显然为

$$y_s^{(0)} = f_s(t_0) \quad (s=1, \cdots, n).$$

如果改变取初始条件为

$$y_s^{(0)} = f_s(t_0) + \eta_s \quad (s=1, \cdots, n), \tag{1.4}$$

其中 η_s 为任意常数，使点 $f_s(t_0)+\eta_s$ 不超出 R，則由(1.4)所确定的(1.1)的解

$$y_s = y_s(t;\ \eta_1, \cdots, \eta_n) \equiv y_s(t, \eta_i)$$

就对应于质点組的扰动运动。

数 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 称为质点組的**初始扰动**或簡称**扰动**，它是未被扰动运动改变为扰动运动的根源。

在具体問題中，我們往往考虑 $|\eta_s|$ 相当小的情形。所謂扰动运动接近于未被扰动运动，就意味着 $|\eta_s|$ 足够小。

让我們考虑差值

$$y_s(t, \eta_i) - f_s(t) \quad (s=1, \cdots, n), \tag{1.5}$$

易見

$$y_s(t, 0) - f_s(t) \equiv 0,$$

而当 η_i 不全为零时，这差值为 t 之函数。

自然产生这样一个問題：可否适当选定任何充分小的 $|\eta_i|$，例如 $|\eta_i| < \delta$，使差值(1.5)的絕对值当一切 $t \geqslant t_0$ 时小于任意預先給定的正数？这里所指的一切 $t \geqslant t_0$，应該特别强調包括 t 无限增大 $(t \to \infty)$ 时的情形，因为不管 T 为怎样大的給定的正数，根据解对初值的連續依賴性，总可以选定足够小的 $|\eta_s|$ 值使当 $t \in [t_0;\ T]$ 时，差值(1.5)的絕对值小于任意給定的正数。当微分方程組已給定时，这个問題的答案显然决定于特解的选取，所以問題的答案深刻地描述出未被扰动运动 (1.3) 的一种特性——稳定的或不稳定的特性。为了进一步应用数学工具研究这一特性，我們引入数学

上严格的定义如下：

定义 1 如果对于任意給定的 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$ 存在，使当 η_i 满足条件

$$|\eta_i|\leqslant\delta$$

时，对于一切 $t\geqslant t_0$，所有扰动运动满足不等式

$$|y_s(t, \eta_i)-f_s(t)|<\varepsilon \quad (s=1, \cdots, n),$$

则未被扰动运动称为**稳定**(关于量 y_s)，否则称为**不稳定**。

定义 2 如果未被扰动运动为稳定，且存在那样的正数 $\delta'>0$，使当任何扰动 η_i 满足不等式

$$|\eta_i|\leqslant\delta'$$

时，有

$$\lim_{t\to+\infty}(y_s(t, \eta_i)-f_s(t))=0 \quad (s=1, \cdots, n),$$

则未被扰动运动称为**漸近稳定**。

可能发生这样的一种情形：对于任意的 η_i，不能找到定义 1 中所要求的数值 δ，可是如果 η_i 满足如下形式的某些条件

$$\varphi_j(\eta_1, \cdots, \eta_n)=0 \text{ 或 } \varphi_j(\eta_1, \cdots, \eta_n)\geqslant 0,$$
$$\varphi_j(0, \cdots, 0)=0 \qquad (j=1, \cdots, m; 1\leqslant m<n)$$

时，可以求得所需要的 δ，则未被扰动运动称为**条件稳定**。

〔注〕 稳定性問題还可以提得更为广泛一些。我們可以考虑某些与坐标有关的量的稳定性問題，例如考虑广义速率 $\sqrt{\dot{y}_1^2+\cdots+\dot{y}_n^2}$ 的稳定問題。

設 $\Phi_s=\Phi_s(y_1,\cdots,y_n)$ 为 $y_1, \cdots, y_n$ 的給定的連續实函数($s=1,\cdots,k$)。

对于未被扰动运动，即以函数 $f_s(t)$ 代入 $\Phi_1, \cdots, \Phi_k$ 中的 y_s，这些函数将化为 t 的已知函数，表为

$$F_s(t)\equiv\Phi_s(f_1(t), \cdots, f_n(t)) \quad (s=1, \cdots, k).$$

对于任一个扰动运动 $y_s=y_s(t, \eta_i)$，这些函数将化为

$$G_s(t)\equiv\Phi_s(y_1(t, \eta_i), \cdots, y_n(t, \eta_i))$$
$$\equiv G_s(t, \eta_1, \cdots, \eta_n) \quad (s=1, \cdots, k),$$

它是量 $t, \eta_1, \cdots, \eta_n$ 的函数。

显然当 $\eta_1=\cdots=\eta_n=0$ 时，对于一切 $t\geqslant t_0$，所有差值

$$G_s(t)-F_s(t)\equiv 0 \quad (s=1, \cdots, k),$$

而当 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 非零或不全为零时，差值

$$G_s(t)-F_s(t) \quad (s=1, \cdots, k)$$

为 t 的函数。

自然产生同样的問題：可否給 $|\eta_s|$ 指出足够小的上限，以保証 $|G_s(t)-F_s(t)|$ 对于一切 $t\geqslant t_0$，小于任意指定的正数？由于这一考虑，我們規定如下的定义：

定义 設 $L_1, \cdots, L_k$ 为任意給定的正数，不管它怎样小，总可以选出正数 $E_1, \cdots, E_n$，使当任何 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 满足条件

$$|\eta_s|\leqslant E_s \quad (s=1, \cdots, n)$$

时，对一切 $t\geqslant t_0$，产生不等式

$$|G_s(t)-F_s(t)|<L_s \quad (s=1, \cdots, k),$$

則称未被扰动运动 $y_s=f_s(t)$ 关于变量 $\Phi_1, \cdots, \Phi_k$ 为稳定的，否則称为不稳定的。

【例 1】 作为例子，我們来研究单摆的振动。如所周知，它是由下列微分方程表示的

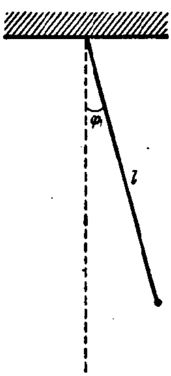

图 1

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi, \tag{1.6}$$

或者引入新变数 ψ，化为下列方程組

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\varphi}{dt}=\psi,\\&\frac{d\psi}{dt}=-\frac{g}{l}\sin\varphi,\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

其中 l 表示摆长，φ 表示摆与鉛垂方向之間的角度(見图 1)。我們考察下面两个运动关于 φ 及 $\dot{\varphi}=\dfrac{d\varphi}{dt}=\psi$ 的稳定性問題：

1° 平衡位置 $\varphi\equiv 0$ 关于 φ 及 $\dot{\varphi}$ 的稳定性。

2° 由初始条件 $\varphi(t_0)=\alpha>0$, $\dot{\varphi}(t_0)=0$ 所决定的运动

$$\varphi=f(t),\ f(t_0)=\alpha,\ f'(t_0)=0 \tag{1.8}$$

的稳定性,其中 $f(t)$ 是一周期函数,周期为 T.

我們不打算严格討論这两个問題，現在只从力学中所熟知的結論来說明上述的定义。

在情形 1°，我們来說明解 $\varphi\equiv 0$ 关于 φ 及 $\dot{\varphi}$ 是稳定的平衡。因为只要适当地选擇系統离开平衡位置的初始偏差和初始速度所容許的界限，就可以使这些偏差和速度的絕对值总是小于任何預先給定的正数,这样就满足了 $\varphi\equiv 0$ 为稳定的定义的条件。

在情形 2°，我們来說明运动 (1.8) 关于 φ 与 $\dot{\varphi}$ 是不稳定的。为此,我們只需考虑任何由初始条件

$$\varphi(t_0)=\alpha+\delta,\ \dot{\varphi}(t_0)=0$$

所决定的扰动运动,其中 δ 是无論怎么小的正数。我們知道,单摆振动的周期与初始条件有关;而在初速度为零时,如果初始振幅愈大，則运动的周期愈长，因此扰动振动的周期 T' 将大于未被扰动振动的周期 T，而在两种振动中的 φ 角的差值在开始时等于 δ，經过时間 T' 后将略有增加。如果 δ 愈小，这个差值也愈小；不过无論 δ 怎样小，經过足够长的时間后，φ 角的差值逐漸增大而变得例如大于 α，因此未被扰动运动是不稳定的。

关于情形 1°, 2° 的結論,我們以后还将严格論証。

【例 2】 考虑

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+2y=0$$

或与它等价的一阶方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt}&=y_2,\\ \frac{dy_2}{dt}&=-2y_1-2y_2.\end{aligned}\right\}$$

求得通解

$$y_1=e^{-t}[y_1^{(0)}\cos t+(y_1^{(0)}+y_2^{(0)})\sin t],$$
$$y_2=e^{-t}[y_2^{(0)}\cos t-(2y_1^{(0)}+y_2^{(0)})\sin t],$$

其中 $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$ 表 $t=0$ 时 y_1, y_2 的初值。

設取 $y_1^{(0)}=0$, $y_2^{(0)}=1$, 得特解对应于未被扰动运动

$$y_1=e^{-t}\sin t,\quad y_2=e^{-t}(\cos t-\sin t). \tag{1.9}$$

現在改取初始条件为

$$y_1|_{t=0}=y_1^{(0)}=\eta_1,\quad y_2|_{t=0}=y_2^{(0)}=1+\eta_2,$$

則得对应于扰动运动的解

$$y_1(t,\ \eta_i)=e^{-t}[\eta_1\cos t+(1+\eta_1+\eta_2)\sin t],$$
$$y_2(t,\ \eta_i)=e^{-t}[(1+\eta_2)\cos t-(2\eta_1+\eta_2+1)\sin t];$$

而
$$y_1(t,\ \eta_i)-f_1(t)=e^{-t}[\eta_1\cos t+(\eta_1+\eta_2)\sin t],$$
$$y_2(t,\ \eta_i)-f_2(t)=e^{-t}[\eta_2\cos t-(2\eta_1+\eta_2)\sin t].$$

显見这些差値对于一切 $t\geqslant 0$, 一致地为 η_1, η_2 的連續函数, 因而未被扰动运动 (1.9) 为稳定。此外, 由上面的差値, 易見

$$\lim_{t\to\infty}(y_s(t,\ \eta_i)-f_s(t))=0\quad(s=1,\ 2),$$

故未被扰动运动 (1.9) 是漸近稳定的。

【例 3】 考虑微分方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt}&=-2y_1-4y_2+1+4t,\\ \frac{dy_2}{dt}&=-y_1+y_2+\frac{3}{2}t^2.\end{aligned}\right\}$$

容易驗証这个組有特解

$$\left.\begin{aligned}y_1&=e^{2t}+t^2+t=f_1(t),\\ y_2&=-e^{2t}-\frac{1}{2}t^2=f_2(t);\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

它的初始条件为

$$y_1|_{t=0}=y_1^{(0)}=1,$$

$$y_2|_{t=0}=y_2^{(0)}=-1.$$

现在,研究特解 (1.10) 所对应的未被扰动运动的稳定性。

取初值为

$$y_1^{(0)}=1+\eta_1,\quad y_2^{(0)}=-1+\eta_2,$$

其中 η_1, η_2 为初始扰动。

不难計算这組初值所确定的解,所对应的扰动运动为

$$y_1(t,\ \eta_i)=\frac{\eta_1-4\eta_2+5}{5}\,e^{2t}+\frac{4(\eta_1+\eta_2)}{5}\,e^{-3t}+t^2+t,$$

$$y_2(t,\ \eta_i)=-\frac{\eta_1-4\eta_2+5}{5}\,e^{2t}+\frac{\eta_1+\eta_2}{5}\,e^{-3t}-\frac{1}{2}t^2.$$

由此得

$$y_1(t,\ \eta_i)-f_1(t)=\frac{\eta_1-4\eta_2}{5}\,e^{2t}+\frac{4(\eta_1+\eta_2)}{5}\,e^{-3t},$$

$$y_2(t,\ \eta_i)-f_2(t)=-\frac{\eta_1-4\eta_2}{5}\,e^{2t}+\frac{\eta_1+\eta_2}{5}\,e^{-3t}.$$

显見,对于任意給定的正数 ε,不管选得 δ 怎样小,总有 η_1, η_2 滿足条件 $|\eta_s|<\delta$,而不能保証 $|y_s(t,\ \eta_i)-f_s(t)|<\varepsilon$,因为 e^{2t} 随着 t 的增大而无限增大,故未被扰动运动 (1.10) 为不稳定。

但是当 η_1, η_2 滿足条件

$$\eta_1-4\eta_2=0$$

时,差值 $y_s(t,\ \eta_i)-f_s(t)$ 不含 e^{2t} 之項,因而所要求的 δ 可以求得,故在条件 $\eta_1-4\eta_2=0$ 之下未被扰动运动 (1.10) 为条件稳定。

§2 扰动运动的微分方程組

为了簡化未被扰动运动的形式,引入新变数 x_s,令

$$x_s = y_s - f_s(t) \quad (s=1, \cdots, n), \tag{2.1}$$

于是未被扰动运动的稳定性問題就化为研究 $t \geqslant t_0$ 时量 x_s 的問題。

在变换 (2.1) 之下,方程 (1.1) 化为如下形式:

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t; x_1, \cdots, x_n) \quad (s=1, \cdots, n), \tag{2.2}$$

其中
$$\begin{aligned} X_s &= Y_s(t; x_1+f_1(t), \cdots, x_n+f_n(t)) - \frac{df_s(t)}{dt} \\ &= Y_s(t; x_1+f_1(t), \cdots, x_n+f_n(t)) \\ &\quad - Y_s(t; f_1(t), \cdots, f_n(t)) \quad (s=1, \cdots, n), \end{aligned}$$

显見满足条件

$$X_s(t; 0, \cdots, 0) \equiv 0 \quad (s=1, \cdots, n). \tag{2.3}$$

(2.2) 称为**扰动运动微分方程組**或**扰动方程**。

考虑到 (2.3),显見 (2.2) 有一平凡解或零解

$$x_1 = \cdots = x_n = 0. \tag{2.4}$$

零解 (2.4) 显然对应于組 (1.1) 的特解 (1.3),所以由变换 (2.1) 所得到的扰动微分方程的零解 (2.4) 对应于未被扰动运动。

如果取初始条件为

$$x_s\big|_{t=t_0} = x_s^{(0)} \quad (s=1, \cdots, n), \tag{2.5}$$

其中 $x_s^{(0)}$ 表任意常数,但使点 $(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ 不超出函数 X_s 的定义区域,則显然有

$$x_s^{(0)} = y_s\big|_{t=t_0} - f(t_0) = \eta_s,$$

故对于扰动微分方程 (2.2) 来說,$x_s^{(0)}$ 就是扰动。

組 (2.2) 有满足初始条件 (2.5) 的唯一解

$$x_s = x_s(t) \quad (s=1, \cdots, n).$$

这些解所确定的运动就是扰动运动，如果 $x_s^{(0)}$ 不全为零的話。

这样一来，对于組 (2.2) 有和組 (1.1) 相对应的定义：

定义 1 如果对于任意給定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$（δ 一般与 ε 及 t_0 有关），使当

$$|x_s^{(0)}|\leqslant\delta \quad (s=1,\ \cdots,\ n) \tag{2.6}$$

时，对于一切 $t\geqslant t_0$，所有扰动运动满足不等式

$$|x_s(t)|<\varepsilon \quad (s=1,\ \cdots,\ n),$$

则 (2.2) 的未被扰动运动 $x_s=0(s=1,\ \cdots,\ n)$ 称为**稳定**。

如果对于某个給定的 $\varepsilon>0$，求不到相应的 $\delta>0$，即不管 $\delta>0$ 怎样小，总有一組值 $x_s^{(0)}$ 满足条件

$$|x_s^{(0)}|\leqslant\delta,$$

而以它为初值所确定的解 $x_s(t)$，当 $t\geqslant t_0$ 取某一值时，至少产生一些等式

$$|x_s(t)|=\varepsilon \quad s\in\{1,\ \cdots,\ n\},$$

则未被扰动运动称为**不稳定**。

定义 2 如果未被扰动运动为稳定，且存在这样的 $\delta'>0$，使当任何一組初值 $x_s^{(0)}$ 满足不等式

$$|x_s^{(0)}|\leqslant\delta' \quad (s=1,\ \cdots,\ n)$$

时，均有

$$\lim_{t\to+\infty}x_s(t)=0 \quad (s=1,\ \cdots,\ n),$$

则未被扰动运动 $x_s=0$ 称为**漸近稳定**。

域 $|x_s|<\delta'$ 称为**吸引域**或**漸近稳定域**。

定义 3 如果对于任意的 $x_s^{(0)}$，不存在满足稳定条件的 δ，但对于由某些关系式

$$\varphi_j(x_1^{(0)},\ \cdots,\ x_n^{(0)})=0 \text{ 或 } \varphi_j(x_1^{(0)},\ \cdots,\ x_n^{(0)})\geqslant 0$$
$$(j=1,\ \cdots,\ m;1\leqslant m\leqslant n),$$

且

$$\varphi_j(0,\ \cdots,\ 0)=0$$