计算流体力学

刘顺隆 郑 群 编著

哈尔滨工程大学出版社

计算流体力学

刘顺隆　郑　群　编著

哈尔滨工程大学出版社

内 容 简 介

全书分 15 章系统地介绍了计算流体力学的理论、方法及应用。第 1 章叙述偏微分方程数学理论基础;第 2 章～10 章阐述流体力学数值模拟的基础理论,如离散格式、基本方程组、曲线坐标系、网格生成等内容;第 11 章～15 章讨论特定流动,如无粘流、边界层流,可压及不可压粘性流相应的求解途径和方法。本书的特点是深入浅出,理论与应用并重,方法与分析结合。

本书可作为高等学校有关专业的研究生和高年级本科生的教材,也可供从事力学、航空、造船、动力、水利、海洋、气象和环境科学等领域工作的科技人员参考。

计算流体力学
JISUAN LIUTILIXUE
刘顺隆 郑 群 编著
责任编辑 宋旭东

*

哈尔滨工程大学出版社出版发行
新 华 书 店 经 销
哈 尔 滨 工 业 大 学 印 刷 厂

*

开本 787×1 092 mm 1/16 印张 22.75 字数 538 千字
1998 年 5 月第 1 版 1998 年 5 月第 1 次印刷
印数:1～1 000 册

ISBN 7-81007-813-5
O·57 定价:24.00 元

前　言

随着计算技术的发展，计算机性能的提高，计算方法的不断改进，计算流体力学已成为建立在经典理论和实验流体力学基础之上的一门新型独立学科。同时，计算流体力学又兼有理论性和实践性的双重特点，建立和开创了颇多的理论和方法，对流体流动的分析研究取得了重大的进展，为现代科学中许多复杂流体力学问题提供了有效的计算技术。今天，数值模拟方法已成为研究流体力学各种物理现象及工程设计的重要手段。计算流体力学是流体力学与数学物理方程理论、计算数学、数值方法和计算机科学等多学科交叉的学科。计算流体力学的各种方法既十分丰富，也非常繁杂。为使读者在经过不长时间的学习后，能较好地掌握流体力学数值计算的基本理论，并具备一定的研究和开发能力，本书对计算流体力学的各种方法进行了系统的研究、分析、归纳和整理，从而给出了特定流动问题的计算技术和方法。本书是在我们多年来讲授计算流体力学课程的体会及长期从事流体力学数值计算科研工作经验的基础上而形成的。我们在撰写本书时力求深入浅出，根据数学和物理的基本原理，遵循理论与应用、方法和分析相结合的途径，对计算流体力学进行较系统和严密的论述。

本书的内容分两部分，第一部分是数值方法的基础理论，第二部分是特定流动的求解途径和适当的方法。

为了深入展开对流体力学数值方法的讨论，第 1 章简要地叙述偏微分方程的形式、分类、适定问题的初边值条件提法及其传统解法等数学理论。

第 2 章是有限差分近似及其数学性质。第 3 章引入加权余量法，研究和比较有限元法、有限体积法和谱方法等不同的离散方法。第 4 章讨论离散代数方程组的各种解法。

第 5 章阐述粘性流动的最简单模型扩散方程的离散格式及多维问题经济有效的分裂格式。第 6、7 章分别讨论了线性和非线性对流问题及其有效的数值预测方法。我们选取代表复杂流体力学方程组的模型方程，分析其数学物理性质和数值方法的特性，比较各种方法的优劣，减少和修正某些伪物理效应，从而构成物理上合理，数学性质优良的离散格式。

为了便于流体力学数值模拟的实际应用，第 8 章～10 章给出了流体力学的基本方程组、曲线坐标系、坐标变换及各种计算网格的生成技术。

由于实际流动的复杂性，各种简化前提下的算法仍有一定意义，并且也是构造完整算法的基础。第 11 章讨论了无粘流计算方法，包括强激波计算的 FCT 格式、TVD 格式等等。第 12 章为边界层流动计算，着重讨论了 Dorodnitsyn 变换等算法。第 13 章的内容包括 NS 方程简化的基础，构造空间推进算法的技术及 RNS 方程在内流、外流计算上的应用。

第 14 章分析了非定常和定常不可压粘性流动原参数方程的各种解法及涡量流函数法。

第 15 章阐述了可压粘性流动问题的解法，包括适定边界条件的提法、薄层假设、各种显隐格式及数值耗散和强激波计算问题。

本书引言及第 1 章～8 章由刘顺隆完成；第 9 章～15 章由郑群完成。

由于水平有限，书中若有不当之处，恳请读者批评指正，我们深表感谢。

作　者

1997 年 8 月

目　　录

引言…………………………………………………………………………………… 1
1　偏微分方程 ………………………………………………………………………… 3
　1.1　基础知识 …………………………………………………………………… 3
　1.2　双曲型偏微分方程…………………………………………………………… 13
　1.3　抛物型偏微分方程…………………………………………………………… 15
　1.4　椭圆型偏微分方程…………………………………………………………… 17
　1.5　传统解法……………………………………………………………………… 18
2　有限差分近似及其数学性质……………………………………………………… 22
　2.1　模型方程的差分近似………………………………………………………… 22
　2.2　相容性………………………………………………………………………… 26
　2.3　离散误差……………………………………………………………………… 26
　2.4　收敛性………………………………………………………………………… 31
　2.5　稳定性………………………………………………………………………… 33
　2.6　数值解的精度………………………………………………………………… 40
3　加权余量法………………………………………………………………………… 43
　3.1　典型的加权余量法…………………………………………………………… 43
　3.2　有限体积法…………………………………………………………………… 48
　3.3　有限元法和插值……………………………………………………………… 51
　3.4　有限元法与斯图姆－刘维尔方程…………………………………………… 56
　3.5　有限元法的应用……………………………………………………………… 61
　3.6　谱方法………………………………………………………………………… 66
4　定常问题…………………………………………………………………………… 72
　4.1　非线性定常问题……………………………………………………………… 73
　4.2　线性代数方程组的直接解法………………………………………………… 75
　4.3　迭代法………………………………………………………………………… 81
　4.4　时间推进法…………………………………………………………………… 93
5　扩散方程…………………………………………………………………………… 95
　5.1　一维扩散方程………………………………………………………………… 95
　5.2　初边值条件…………………………………………………………………… 99
　5.3　线法 ………………………………………………………………………… 102
　5.4　多维扩散方程 ……………………………………………………………… 109
6　线性对流问题 …………………………………………………………………… 117
　6.1　一维线性对流方程 ………………………………………………………… 117
　6.2　数值耗散和频散 …………………………………………………………… 124

6.3 定常对流扩散方程 …… 129
6.4 一维输运方程 …… 132
6.5 二维输运方程 …… 139
7 非线性对流问题 …… 144
7.1 一维 Burgers 方程 …… 144
7.2 方程组 …… 153
7.3 组合有限元法 …… 155
7.4 二维 Burgers 方程 …… 156
8 流体力学基本方程 …… 160
8.1 流体的物理性质 …… 160
8.2 可压流基本方程 …… 161
8.3 不可压流基本方程 …… 165
8.4 边界层方程 …… 172
9 曲线坐标系 …… 178
9.1 变换关系式 …… 178
9.2 变换参数的计算 …… 182
9.3 典型方程在曲线坐标系中的形式 …… 186
10 网格生成 …… 190
10.1 网格及区域的物理特征 …… 190
10.2 用微分方程生成网格 …… 195
10.3 代数映射法生成网格 …… 205
11 无粘流 …… 212
11.1 面元法 …… 212
11.2 超音速无粘流 …… 217
11.3 跨音速无粘流 …… 234
12 边界层流 …… 240
12.1 简单边界层流 …… 240
12.2 复杂边界层流 …… 242
12.3 Dorodnitsyn 变换 …… 244
12.4 三维边界层流 …… 248
13 简化的 Navier-Stokes (RNS)方程 …… 253
13.1 方程简化的基础 …… 253
13.2 内流问题 …… 260
13.3 外流问题 …… 268
14 不可压粘性流 …… 280
14.1 非定常不可压流动-原参数方程 …… 280
14.2 定常流动-原参数方程 …… 291
14.3 涡量流函数法 …… 300
14.4 三维流动的涡方法 …… 310

15　**可压缩粘性流** ······ 313
15.1　控制方程及其边界条件 ······ 313
15.2　物理上的简化 ······ 314
15.3　显格式 ······ 319
15.4　隐格式 ······ 321
15.5　曲线坐标系的应用 ······ 331
15.6　数值耗散 ······ 338
参考文献 ······ 345

引　言

流体力学作为宏观力学的一个重要分支，它的发展历史悠久，因此理论分析和实验研究都比较成熟。随着高速电子计算机的出现和现代计算技术的发展，已可用电子计算机作为模拟和实验的手段，数值地求解流体力学中各种各样的问题。这就由流体力学理论、计算机技术和数值方法等交叉产生了一门应用基础学科——计算流体力学。由于理论分析、实验测量和数值模拟各有特点，并且各有其适用的范畴，因此，由这三种方法组成了研究流体力学问题的完整体系。

理论分析的优点在于所得结果具有普遍性，各种影响因素清晰可见，它也是指导实验研究和验证新的数值计算方法的理论基础。但是，它的研究对象在物理性质上必须简化，在几何表现上必须规律，而且常常是针对线性的控制方程的。即，只有高度简化或线性化的某些理想化问题才能得到封闭解，得到流体运动的一般规律。对于非线性的情况，只有少数流动才能给出解析结果。

关于一个物理过程的最可靠的资料常常是由实验测量给出的，实验结果真实可信，它是理论分析和数值方法的基础，其重要性不容低估。然而，实验往往受到模型尺寸、流场扰动、人身安全和测量精度的限制。此外，实验还会遇到经费投入、人力和物力的巨大耗费及周期长等许多困难。

人类在维持生命、开发能源、预防灾害等生产实践中，提出了越来越多迫切需要解决的流体力学问题。由于计算机科学技术和近代数学的发展，为清楚地了解物理本质并可用数学模型来表达各种复杂流动问题的数值计算提供了可能性。从 1946 年的 ENICAC 计算机，到今天的 Cray Y-MP，运算速度从每秒 1 000 次提高到数亿次，直到 160 亿次浮点运算。速度按指数增长，而其体积、能耗和价格却按指数下降。现在计算机已能计算出飞机的全机压力分布，并可取得不可能从风洞试验中得到的数据(Chapman，1979)。对粘性不很重要的其它气体运动，如核爆炸冲击波的传播、绕射等，数值计算已成为取得动态模拟的主要手段。在从飞行器、导弹设计到大气和海洋的大范围模拟的广泛领域中，可以利用计算机进行各种流动现象的数值模拟。数值计算突出的长处是费用少、计算速度快、能给出详细和完整的资料，很容易模拟(特殊尺寸、高温、有毒、易燃等)真实条件和(实验中只能接近的)理想条件。但是，数值计算的离散化处理不仅在数量上影响计算的精度，而且在性质上还会改变流动的特征。例如，产生数值粘性和频散等伪物理效应。此外，数值计算不仅要依赖于计算机的能力、计算的可能性及其结果的准确性，而且还决定于合理的数学模型和有效的数值方法。

数值解法是一种离散近似的计算方法。因此，各种各样的流体力学问题必须首先从给定的微分方程或基本定律出发，建立在物理上合理、在数学上适定、适合于在计算机上进行计算的离散的有限数学模型，才能在计算机上求解。而将流体的连续流动用多个质点、离散涡元或有限波系的运动来近似。大多数数值方法的基本思想可以归结为：把原来在时间、空间坐标中连续的物理量的场(如速度场、温度场等)，用有限个离散点上的值的集合来代替，按一定方式建立起关于这些值的代数方程组并求解，以获得物理量场的近似解。同一物理

问题的不同数值解法间的主要区别，在于子区域的划分与节点的确定、离散方程的建立及其求解这几个步骤上。计算流体力学所采用的主要数值求解方法有：有限差分法、有限元法、边界元法、有限分析法、谱方法等。近年来，这些数值方法有很大的发展。如古老的差分方法继续得到创造性的开发和应用，Harten 等提出的 TVD 格式以及各类变种，对于克服数值耗散引起的光滑效果和数值频散引起的寄生振荡问题取得了不同程度的进展；多重网格法(MG)和预处理共轭斜量法(PCG)的应用，加速了数值解的收敛性。有限元法(FEM)与边界元法(BEM)日趋成熟，在实际应用中取得了空前的进展和创新。在激波问题、跨音速绕流、多相流、流固耦合、自由面、活动边界等多种困难课题上都有新的突破。有限元与边界元互相渗透、结合，具有更显著的应用效果。谱方法具有"任意阶"的总体光滑性，不形成有限元法的质量矩阵，并具有自适应的后验精度估计等优点，使之在计算流体力学中得到越来越广泛的应用和发展。数学模型的研究，是计算流体力学的奠基性工作，近二十多年来，建模研究有了长足的进步。如，不同的简化 NS 方程模型、燃烧湍流的 k-ϵ-g 和 ESCIMO 模型、地下石油模型和地下水流模型、飞机的整机气动力分析模型、气候模型等。一旦建立了实际物理问题的合理数学模型，数值计算就可以发挥很大的作用。

尽管流体力学方程是非线性的，难于进行理论分析，然而制约它的物理规律却比较简单，相对地讲，流体力学的非线性方程组形式上并不十分复杂，通常它们的类型都很标准，因此，很适合于数值计算。如，位势流是拉普拉斯方程、定常亚音速流是椭圆型方程、非定常粘性流是抛物型方程、定常超音速流和非定常可压缩无粘流是双曲型方程，非定常不可压无粘流一般为非标准型。但是，它们可能有各阶的数学奇点以及未知的或无穷远的边界。现有的非线性问题的数值解法的数学理论还很不完备，至今尚无严格的稳定性分析、误差分析和收敛性证明，对于实际问题一般也难于确定解的存在性和唯一性。因此，解决计算流体力学问题仍然需要借助比较简单的线性问题的严格数学分析，并依靠物理直观、力学实验的启发和在计算机上的数值试验来进行。

计算流体力学是不同于理论流体力学和实验流体力学的一门独立的学科，理论分析、实验研究及数值计算各有其适用范围，把三种方法巧妙地结合起来可以收到互相补充相得益彰的作用，这也是研究流体力学问题的理想而有效的手段。

1 偏微分方程

流体力学控制方程一般是含有空间坐标的一阶、二阶导数和时间的一阶导数的偏微分方程。其中,时间导数是线性的,而空间导数往往是非线性的。除势流以外,流动问题都由联立的控制方程组描述,而非单一方程。本章按椭圆型、抛物型或双曲型分类讨论偏微分方程,从数学和物理两种观点来考察偏微分方程的不同型式,指出它们的主要特征和相关的流动现象。

1.1 基础知识

二个独立自变量 x 和 y 的二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0 \tag{1.1}$$

式中 a_{ij}, b_i, c 和 f 只是 x 和 y 的实函数,并常假定它们为连续可微的;u_{xx}, u_{xy} 等分别表示 u 相应的偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$。偏微分方程(1.1)可以划分成三类,它们是

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0 \quad 椭圆型$$

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 \quad 抛物型$$

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0 \quad 双曲型$$

显然,分类仅与未知函数的高阶导数项有关。

对于可压缩无粘流体定常无旋流动的速度势方程可写成如下形式

$$(a^2 - \varphi_x^2)\varphi_{xx} + (a^2 - \varphi_y^2)\varphi_{yy} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} = 0 \tag{1.2}$$

式中 φ 是速度势;a 是当地音速。这是一个非线性偏微分方程,仍然可按上述方法分类,其判别式为

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = a^2\left(\frac{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}{a^2} - 1\right) = a^2(M^2 - 1)$$

由此可见,对于亚音速流动 $M<1$,方程(1.2)属于椭圆型;对于音速流动 $M=0$,方程为抛物型;对于超音速流动 $M>1$,方程为双曲型。这就是说,在流场的不同计算域中,控制方程的类型可能发生变化。方程类型的不同是与相应流场物理性质的不同相联系的。在跨音速流中,控制方程类型的变化,造成了流场分析的复杂化。

若来流速度为 $V_\infty \boldsymbol{i}$,对只产生弱扰动的细薄物体来说,二维绕流的速度势方程(1.2)简化为小扰动方程,

$$(1 - M_\infty^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \tag{1.3}$$

这是一线性方程。若来流为亚音速,即来流马赫数 $M_\infty<1$,方程(1.3)是椭圆型的,这时它可以变换为拉普拉斯(Laplace)方程,因此它与 $M_\infty \to 0$ 的不可压缩流动具有类似的特征。若来流为超音速 $M_\infty>1$,方程是双曲型的。该问题描述了一种比较简单的流动,但同样指出了控制方程可能会发生类型的变化。

如果方程能写成式(1.1)的形式，那么可以用上述方法确定方程类型。如果不可能，例如，偏微分方程组，为了确定方程组的准确类型，通常必须用特征线方法进行分类(见 1.1.3 节)。

1.1.1 适定性

在解决实际流动问题中，通常需要求一个解，它不仅要满足微分方程，而且还要满足某些附加条件，例如初始条件或边值条件。因此，对与偏微分方程有关的物理问题，我们必须考察给出方程的合理性，同时要考虑对附加条件提法的要求。这样，就需要研究偏微分方程定解问题在数学上的适定性。

1920 年，阿达玛(Hadamard)着重指出，只有在一定的意义下偏微分方程初值问题或边值问题才是适定的(well - posed)。这就是解必须存在、唯一、并且连续依赖于数据(连续性)。如果发现一个具有物理来源的数学问题是不适定的，那么，这往往表明它的表述是不正确的。

第一，解的存在性问题是研究在一定的定解条件下，方程的解是否存在。如果从物理意义上来看，对于合理地提出的问题，解的存在性似乎是不成问题的，因为自然现象本身就给出了这问题的解答(例如速度场、温度场等)。但是，由于对实际流动问题建立数学模型时，总要经过一些近似或提出一些附加要求。我们只能说定解问题反映了流动问题，而不能说两者完全等同，因此完全有必要从量的角度来研究解的存在性，以确定归结出的定解问题的合理性，不至于提出过多或不足的要求。此外，存在性的研究往往也同时是一个提供求解方法的过程。

解的存在性的证明是一件极为困难的事，往往由纯粹数学家在代表性的情况下去完成。作为计算流体工作者，总是根据纯粹数学家们的这些工作去对力学问题作出数学表述，并且总希望问题的这种表述是适定的。

第二，解的唯一性问题是研究在已给的定解条件下，问题的解是否只有一个，这表示附加条件与偏微分方程的匹配是否完备。例如，对于 Navier - Stokes(以后简写成 NS)方程，在固壁面上合理的边界条件是明确的，而远场边界条件的正确选取就有一定的灵活性。又如不可压缩流体的无粘流动，一般情况是一种非标准型的方程，由于数学性质的复杂性，如何给出适定的边界条件就是一个困难而复杂的问题。通常，边界条件过多在物理上不合理，因而得不到解；边界条件不足将会出现多解。有些流动问题在物理域中可能存在多解，例如从层流到湍流的过渡区的流动常常会产生这种情况，这样的问题难于从数学上判断其适定性，只能在充分理解流动的物理机理的基础上来进行鉴别。

第三，解的连续性问题是指当定解条件如果稍有变化(扰动)，解仍应存在且仍为唯一，这个扰动后的唯一解与扰动前的解应相差无几，当扰动趋于零时，解的改变量也应趋于零，这就是微分问题的连续性。

解的连续性问题的产生也是很自然的，因为我们在研究物理现象时需通过测量，而测量就不免有误差，如果定解条件的细小误差会引起解的重大变化，那么这个定解问题的归结也是缺乏基础的，在数学上无法保证所获得的解是实际上所需的解的近似。相反，如果定解问题满足连续性，那么描述一个具体物理问题的偏微分方程相应的初边值条件稍有出入，我们仍能得到物理问题的正确近似解。

下面给出二个实例，以说明适定性对偏微分方程求解的重要性。

一维波动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \tag{1.4}$$

若给出初值 $u(x,0)=s(x)$ 和 $u_t(x,0)=T(x)$，这是双曲型方程的柯西(Cauchy)问题，其解是著名的达朗贝尔(D'Alembert)公式(1.63)。显然柯西问题的提法是适定的。但是，若对波动方程提出狄利克莱(Dirichlet)问题就不一定有解。这就是说，定解问题的提法受到适定性的限制。

再考察拉普拉斯方程的混合问题

$$u_{tt} + u_{xx} = 0, \quad (t \geqslant 0) \tag{1.5}$$

$$u(x,0) = 0 \tag{1.6a}$$

$$u_t(x,0) = \frac{1}{n^k}\sin nx, \quad (n\ 为奇数) \tag{1.6b}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \tag{1.6c}$$

这个问题的解可以用分离变量法解出，其解为

$$u_n(x,t) = \frac{1}{n^{k+1}}\sin nx\ \mathrm{sh} nt \tag{1.7}$$

上式满足拉普拉斯方程，也满足初边值条件，因此，解是唯一存在的。但是，这样的定解问题却不是连续依赖于数据的。若令 $n\to\infty$，上述初边值条件都趋于零，其解为 $u_0(x,t)\equiv 0$。按理在 $n\to\infty$ 时，解 $u_n(x,t)$ 也应趋于零，实际上，u_n 和 u_0 的差的振幅却趋于无穷。不仅如此，它们差的平均模

$$\begin{aligned}\| u_n - u_0 \|^2 &= \int_0^t\int_0^\pi \left(\frac{1}{n^{k+1}}\sin nx\ \mathrm{sh} nt\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{8n^{2k+3}}(\mathrm{sh}2nt - 2nt)\end{aligned} \tag{1.8}$$

当 $n\to\infty$ 时也趋于无穷。这就是著名的阿达玛例子。它说明拉普拉斯方程混合问题尽管解存在并且唯一，但无解对数据的连续依赖性，也就是说，问题是不适定的。

微分问题的适定性并不能保证离散近似问题的适定。我们简单地提出适定性计算的类似要求：计算解的存在性(可解性)、计算解的唯一性、计算解对于附加数据的连续依赖性(连续性)。

可解性是指离散近似问题要求可以解得出来；唯一性是指要求在误差足够小的精度内重复计算应该有相同的结果；连续性是指当初边值或离散方程的参数稍有改变，解的结果应保持李普希茨(Lipschitz)连续性，即解的改变量等于参数改变量乘上李普希茨常数(不应太大)。这些特性很难从理论上证明，常常用事后验证来减少不必要的错误。此外，利用纯粹数学的推测、近似方法的合理选择和近似方程性质的研究都有助于计算解为物理问题的适当近似解。

在证明问题表述的适定性时，应利用纯粹数学的知识去描述或推测解的各种性质。例如，对于双曲型方程，它的解可能有弱间断面或强间断面(激波)，其中强间断面出现在非线性方程中。对于椭圆型方程，它们的解总是极为光滑的，有无穷多阶导数，甚至是解析的。如果我们先研究这些解的性质，就会在直觉上对判断问题的适定性和求解方程有很大的帮

助。

选择计算方法必须符合控制方程的典型结构，必须保证代替适定问题微分方程组的近似代数方程组也是适定的。对于近似方程，往往有一个表征其近似程度的参数 h（如差分法的网格尺寸，有限元的最大有限元直径），当 $h \to 0$ 时，必须满足近似解有界；近似解趋于精确解（即具有收敛性）；对于有限的 h，近似解具有一定的精度。

1.1.2 边界和初始条件

初边值条件是描述物体所处的外界状况和起始状况的数学条件。适定性问题和适定性计算的讨论明确指出，在某种意义上，特别是对于输运问题，附加数据是获得内部解的起始点。如果把时间和空间作为独立变量而不加以区别，那么边界上特定的附加数据由计算方法推进，以获得区域内的解。不同类型的偏微分方程，初边值条件的合理提法是不同的，并且还会导致求解方法的不同。对于非线性偏微分方程组，在不同的局部区域上，方程组的类型可能会发生变化，因而附加边界条件的选取要与方程组类型的改变相适应。附加边界条件有如下三种：

第一类边界条件，在边界 ∂D 上，函数 $u|_{\partial D} = f$ 是已知的，对应这种边界条件的定解问题称为狄利克莱问题。

第二类边界条件，在边界上的外法向导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = f$ 或切向导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{\partial D} = g$ 是已知的，对应这种边界条件的定解问题称为牛曼（Neumann）问题。

第三类边界条件，在边界上 $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + ku\right)\right|_{\partial D} = f$ 是已知的，其中 $k > 0$。对应这种边界条件的定解问题称为混合问题或洛平（Robin）问题。在数学上，这是更为普遍的边界条件。

对于大多数流动，要求以原参数表示的 NS 方程求解，至少在流动边界上给定一个速度分量，这就对速度场提出了第一类边界条件。对于无粘可压缩的速度势方程，在物面上给出 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 的条件是第二类边界条件。第三类边界条件在流体力学中应用很少，而常见于对流热传导中。在计算中，只要 f 是解析的，就可以正确应用第一类边界条件，而第二类和第三类边界条件一般会带来误差。

1.1.3 特征理论分类

设函数 u 在某一个 n 维区域内除去一个 $n-1$ 维光滑曲面（$n=2$ 时它是曲线）s 外处处满足某偏微分方程，而在此曲面上除方程中出现的最高阶导数有第一类间断外，函数本身及其所有低阶导数都是连续的，则称这样的函数 u 为该方程的弱间断解，而称曲面（曲线）s 为此解的弱间断曲面（曲线），即特征曲面（曲线）。沿特征曲面（曲线），偏微分控制方程可简化为一个内算子。偏微分方程可以通过考察其特征进行分类，通常可分为椭圆型、抛物型或双曲型方程三类。

二个独立自变量的一阶偏微分方程

$$au_t + bu_x = c \tag{1.9}$$

假如函数 $u(x,t)$ 被限制为连续函数，其全微分可写为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=u_t+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}u_x,\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}u_t+u_x \tag{1.10}$$

在 $x-t$ 平面内,经过每一点都有一条实特征曲线,该曲线斜率,即特征方向满足如下特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{b}{a}\quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{a}{b} \tag{1.11}$$

沿特征曲线,方程(1.9)简化为全微分方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{c}{a},\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{c}{b} \tag{1.12}$$

二个自变量的一阶偏微分方程(1.9)有一族实特征曲线,它是双曲型的。沿特征曲线,函数 u 满足全微分方程(1.12),只要给定非特征线上的初始值就可以沿特征线对方程(1.12)积分。

n 个自变量的二阶偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+H=0 \tag{1.13}$$

式中 H 包含了函数 u 及其一阶导数项,a_{ij} 可以是 x_i 的函数,我们常取 $a_{ij}=a_{ji}$。

设 $n-1$ 维特征曲面 s 的方程为

$$x_i=g_i(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1}) \tag{1.14}$$

或

$$s(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \tag{1.15}$$

为保证曲面 s 参数表示的正则性,我们假定矩阵 $(\frac{\partial g_i}{\partial \xi_\alpha})$ 的秩数为 $n-1$。显然有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial \xi_\alpha}=0,\qquad(\alpha=1,2,\cdots,n-1) \tag{1.16}$$

其中 $\lambda_i=\frac{\partial s}{\partial x_i}$ 是曲面 s 的法线方向数,它们不全为零。沿特征曲面 s,$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$ 有第一类不连续点,而 u 和 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 均是连续函数。沿 s

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\varphi_i(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1}),\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

为已知函数,于是有

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_\alpha}=\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_j}{\partial \xi_\alpha},\quad(i=1,\cdots,n;\ \alpha=1,\cdots,n-1)$$

因而得知沿 s,有

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial g_j}{\partial \xi_\alpha}=\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_\alpha},\quad(i=1,\cdots,n;\ \alpha=1,\cdots,n-1) \tag{1.17}$$

根据特征曲面性质可知,在区域内特征曲面是物理扰动分界面,设其两侧的解为 u_1,u_2,那么 $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i\partial x_j}$ 和 $\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i\partial x_j}$ 都满足式(1.13)和(1.17)。因此,若把式(1.13)和(1.17)看成关于 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$ 的线性代数方程组,至少有二个不同的解。为使此事可能实现,必须对应的齐次方程组

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial g_j}{\partial \xi_\alpha} = 0, \quad (i = 1, \cdots, n;\ \alpha = 1, \cdots, n-1) \tag{1.18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \tag{1.19}$$

有非零解。由式(1.18)和(1.16)可见,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = L_i \lambda_j = L_j \lambda_i$$

式中 L_i 为适当的函数。由此可见 $L_i/\lambda_i = L_j/\lambda_j = \sigma \neq 0$,于是有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sigma \lambda_i \lambda_j \tag{1.20}$$

将上式代入式(1.19),得到特征方程

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_i \lambda_j = 0 \tag{1.21}$$

方程(1.13)的性质,决定于二次型

$$A(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_i \lambda_j \tag{1.22}$$

的代数性质。$A(\lambda)$中的系数 a_{ij} 可以确定一个 $n \times n$ 的矩阵 A,其特征根 λ 满足如下方程

$$\det(A - \mathrm{I}\,\lambda) = 0 \tag{1.23}$$

式中 I 是单位矩阵。那么 n 个自变量的二阶偏微分方程(1.13)可作如下分类:

(1)椭圆型方程,$A(\lambda)$为正定或负定情况,n 个特征根λ 均为同号,这时不存在实特征曲面。

(2)抛物型方程,$A(\lambda)$为退化情况,λ 有零根,这时有 $\nu(1 \leqslant \nu < n)$个特征曲面。

(3)双曲型方程,$A(\lambda)$既不为退化又不是正定或负定,λ 有 $n-1$ 个同号,有一个异号,这时有 n 个实特征曲面。

(4)超双曲型方程,$A(\lambda)$既不为退化又不是正定或负定,λ 至少有二个为正,有二个为负。

多自变量二阶偏微分方程相应类型的标准形式是

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + H = 0 \qquad \text{(椭圆型)} \tag{1.24a}$$

$$\sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + H = 0, \quad (0 < m < n) \qquad \text{(抛物型)} \tag{1.24b}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + H = 0, \qquad \text{(双曲型)} \tag{1.24c}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + H = 0, \quad (1 < m < n-2)$$

(超双曲型) (1.24d)

二个自变量的二阶偏微分方程

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + H = 0 \tag{1.25}$$

根据式(1.21),其特征方程可写为

$$a_{11} \lambda_x^2 + 2a_{12} \lambda_x \lambda_y + a_{22} \lambda_y^2 = 0$$

相应的特征线是 $s(x,y)=0$,特征线斜率 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=-s_x/s_y=-\lambda_x/\lambda_y$。因此,特征方程可改写为

$$a_{11}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2a_{12}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_{22}=0 \tag{1.26}$$

方程(1.25)的系数矩阵 A 的特征根满足式(1.23),其展开式为

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda-(a_{12}^2-a_{11}a_{22})=0$$

解出 λ,得

$$\lambda=\frac{1}{2}\left[(a_{11}+a_{22})\pm\sqrt{(a_{11}+a_{22})^2+4(a_{12}^2-a_{11}a_{22})}\right]$$

方程(1.25)的类型由判别条件可知,

(1)椭圆型方程,二个特征根 λ 为同号,必须有 $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$。

(2)抛物型方型,有特征根 $\lambda=0$,必然有 $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$。

(3)双曲型方程,二个特征根 λ 异号,则 $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$。

这三种情况分别相应特征方程(1.26)无实特征线,只有一族特征线,有二族实特征线。

在区域中沿某一曲线的切线方向有如下关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_x)=u_{xx}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}u_{xy},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_y)=u_{xy}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}u_{yy}$$

代入方程(1.25),得到

$$u_{xy}\left[a_{11}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2a_{12}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_{22}\right]-\left\{\left[a_{11}\frac{\mathrm{d}(u_x)}{\mathrm{d}x}+H\right]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_{22}\frac{\mathrm{d}(u_y)}{\mathrm{d}x}\right\}=0 \tag{1.27}$$

若所取曲线为特征线,应满足特征方程(1.26),则式(1.27)可简化为$\dfrac{\mathrm{d}(u_x)}{\mathrm{d}x}$和$\dfrac{\mathrm{d}(u_y)}{\mathrm{d}x}$之间的简单关系

$$\left[a_{11}\frac{\mathrm{d}(u_x)}{\mathrm{d}x}+H\right]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_{22}\frac{\mathrm{d}(u_y)}{\mathrm{d}x}=0 \tag{1.28}$$

也就是说,沿特征线方向,方程(1.25)简化为相容性方程(1.28),其中 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 由式(1.26)确定。

若在 $x-y$ 平面内引入任意曲线坐标系(ξ,η),其变换关系式为 $\xi=\xi(x,y)$和 $\eta=\eta(x,y)$,并假定变换关系的雅可比(Jacobi)行列式$\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\neq0$。坐标变换后,偏微分方程(1.25)可由新的独立变量表示为

$$a_{11}'u_{\xi\xi}+2a_{12}'u_{\xi\eta}+a_{22}'u_{\eta\eta}+H'=0 \tag{1.29}$$

其中二阶导数的系数为

$$a_{11}'=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2 \tag{1.30a}$$

$$a_{12}'=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y \tag{1.30b}$$

$$a_{22}'=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2 \tag{1.30c}$$

显然有如下关系

$$(a_{12}')^2-a_{11}'a_{12}'=(a_{12}^2-a_{11}a_{12})(\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x)^2$$

由此可以得到一个重要的结论:偏微分方程在坐标变换时方程类型不变。

1.1.4 方程组的分类

流体力学控制方程常常是一些方程组,而非单一方程。n 个自变量的一阶偏微分方程组可写为

$$\sum_{k=1}^{n} A^k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_k} = \boldsymbol{E} \tag{1.31}$$

式中未知矢量函数 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_m)^{\mathrm{T}}$;右端项矢量 $\boldsymbol{E}=(E_1,E_2,\cdots,E_m)^{\mathrm{T}}$;系数矩阵 $A^k=(a_{ij}^k)$是 $m\times m$ 阶矩阵。

对方程组(1.31)进行线性组合,

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{L} \cdot A^k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_k} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{E} \tag{1.32}$$

式中 $\boldsymbol{L}=(L_1,L_2,\cdots,L_m)^{\mathrm{T}}$ 是适当的矢量函数。令特征法线矢量为 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,则沿特征面应满足

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{L} \cdot A^k \lambda_k = 0$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} (A^k \lambda_k)^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{L} = 0 \tag{1.33}$$

为使 $\boldsymbol{L}$ 有非零解的充要条件是系数矩阵的行列式为零,即

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n} A^k \lambda_k\right) = 0 \tag{1.34}$$

式(1.34)称为特征方程,其中 λ_k 是特征法线的方向数。

偏微分方程组(1.31)的性质决定于特征方程(1.34)的解 $\lambda_k(k=1,2,\cdots,n)$。

(1)如果 n 个特征根 λ_k 全部是实根,方程组是双曲型的。

(2)如果有 $\nu(1\leqslant\nu\leqslant n-1)$个实根,并且没有复数根,方程组是抛物型的。

(3)如果没有实根,方程组是椭圆型的。在未知函数较多的方程组,往往既有实根又有复数根的混合型,如果有复数根出现,我们就认为这是椭圆型的。

三个自变量的一阶偏微分方程组可写为

$$A \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + C \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} = \boldsymbol{E} \tag{1.35}$$

根据式(1.34),其特征方程可写为

$$\det(A\lambda_x + B\lambda_y + C\lambda_z) = 0 \tag{1.36}$$

二个自变量的一阶偏微分方程组

$$A \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} = \boldsymbol{E} \tag{1.37}$$

的特征方程可简化为

$$\det(A\lambda_x + B\lambda_y) = 0 \tag{1.38}$$

这时 $\boldsymbol{\lambda}=\lambda_x\boldsymbol{i}+\lambda_y\boldsymbol{j}$ 是特征线的法线。若令特征线方程为 $s(x,y)=0$,则特征线斜率 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=-s_x/s_y=-\lambda_x/\lambda_y$,将此关系代入式(1.38),得到常见二维一阶偏微分方程组的特征方程

$$\det\left(A\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - B\right) = 0 \tag{1.39}$$