

动态系统分析及其应用

—建模、滤波、预报、控制的新方法和程序库

邓自立 郭一新 著

辽宁科学技术出版社

73.5.11
834

动态系统分析及其应用

——建模、滤波、预报、控制的新方法和程序库

邓自立 郭一新 著

辽宁科学技术出版社

一九八五年·沈阳

内 容 简 介

本书用时间序列分析方法与状态空间方法相结合的新观点和方法论研究离散时间动态系统的建模、自适应滤波、预报和控制,系统地总结了作者近年来的一系列理论和应用的新方法和新结果,同时也介绍了国外有关的重要方法和结果。本书的重点是单变量和多变量 ARMAX 时间序列模型的建模,以及用这类模型描写的动态系统的自校正滤波、预报、平滑和控制及其应用。书中包含大量应用实例,所涉及的应用问题包括油田产量动态预报,炼油催化裂化生产过程工艺参数的预报,石油的勘探开发地震数据处理,分馏塔自校正控制,船舶动态定位,语音信号识别,数字传输系统的线性最佳接收机等;所涉及的应用领域包括石油、化工、通讯、冶金、电力、环境、水文、经济、制导等。书中还包含大量的数值仿真例子,以证明所提出的方法的有效性。为了应用方便,我们还给出了关于建模、预报和控制的程序库。

本书对象是信息和控制领域的教师、研究生、高年级大学生、科研人员及工程技术人员。对于相近的领域,例如系统工程、计算机、计量经济学、企业管理、生物工程等,也有较大的参考价值和实用价值。

DS79/1-2

动 态 系 统 分 析 及 其 应 用 ——建模、滤波、预报、控制的新方法和程序库 邓自立 郭一新 著

辽宁科学技术出版社出版 (沈阳市南京街6段1里2号)
辽宁省新华书店发行 沈阳七二一二工厂印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 29 字数: 700,000

1985年10月第1版 1985年10月第1次印刷

责任编辑: 李玉峰 张家笑 插图: 孙东权
封面设计: 孙东权 责任校对: 张家笑 李玉峰

印数: 1—3,000

统一书号: 15288·191 定价: 6.45元

(委托出版)

200010

序 言

系统的基本特征是它的状态、输入、输出和干扰。如果这些特征随时间变化，则称为动态系统。当时间以离散形式变化时，叫离散动态系统。离散动态系统的有关变量（例如状态变量、输入变量、输出变量、干扰变量等）可用时间序列来描写，时间序列记录了变量随时间演化的历史，它可以是确定性的，也可以是随机序列。“时间序列分析”是统计学的重要分支，传统的“时间序列分析”以时间序列为研究对象，分析的主要内容是时间序列的建模、预报和控制。基本的时间序列模型是自回归滑动平均（ARMA）模型，Box和Jenkins的书“Time Series Analysis, Forecasting and Control” (Holden Day, San Francisco, 1970) 是传统的时间序列分析的经典著作。

以动态系统为研究对象的现代控制论起始于60年代初的Bellman的动态规划，Pontryagin的极大值原理和Kalman的状态空间方法，同电子计算机的应用结合，二十几年来的进展可以说是爆炸性的，但它在许多学科和领域的应用还远未实现。现代控制论包括三个互相渗透的领域：系统辨识、状态估计理论和控制理论。它的方法论是状态空间方法，采用状态空间模型描写动态系统，并且为了估计系统的状态，还需要有状态观测模型。

现代科学发展的重要特点之一是各学科、各领域之间的相互渗透，从而形成这样或那样的边缘学科和领域。作者试图用时间序列分析方法与状态空间方法相结合作为方法论，开拓时间序列分析和现代控制论之间的边缘领域。

本书《动态系统分析及其应用》也可以叫做《现代时间序列分析》，以区别于传统的时间序列分析，因为它吸收了现代控制论的观点和方法，使传统的时间序列分析在内容、方法上都有较大的更新和突破。

就现代控制论观点而言，本书是论述有关离散时间动态系统的辨识、滤波、预报和控制的理论，但它具有时间序列分析的特色。主要研究用单变量和多变量ARMAX模型描写的系统的递推辨识，自校正和自适应滤波、预报及平滑，自校正和自适应控制器。

贯穿本书的中心是自校正和自适应原理及其应用。自校正原理适用于带未知常参数系统的自适应状态估计（预报、滤波和平滑）或控制问题，这一原理要求利用系统辨识方法在线校正状态估计器或控制器的参数，使之收敛到当系统参数已知时的最优状态估计器或最优控制器，自适应原理比自校正原理更普遍，它处理带未知时变参数系统的状态估计或控制问题，要求在线校正状态估计器或控制器的参数，使之适应于系统的变化或环境的干扰，收到好的状态估计或控制效果。

自从1973年Åström和Wittenmark提出自校正调节器以来，自校正原理已渗透到现代控制论的各个领域，先后提出了自校正预报器，自校正滤波器和平滑器，自校正控制器，并引起了广泛的理论和实际兴趣，“自校正”已成为现代控制论的新分支。

在绝大多数应用问题中，系统的参数是未知的。因此自适应和自校正理论与方法有明显的实用价值，在许多领域获得了广泛的应用。

本书是作者近年来在自动辨识机，自校正和自适应滤波、预报和控制方面的理论和应用

结果。为了理论上的系统，完整和严谨，书中也介绍了国外有关的基本理论和方法，特别是自校正理论的新近结果。

本书是从理论和应用相结合的观点来阐述的，内容有明显的实际背景，作者提出的一些方法和结果已用到实际问题中。为应用方便，书中给出了作者提出的AR模型、CAR模型、ARMAX模型自动辨识机的程序库。本书所涉及的应用领域包括：油田产量动态预报，石油炼制催化裂化系统的预报，油田勘探开发地震数据处理，海洋勘探船舶动态定位，语言声学信号识别，通讯系统线性最佳接收机，分馏塔的前馈自校正调节器等，特别是书中总结了作者在石油勘探、开发、炼制方面的实践经验，本书的内容和方法也适用于制导、航空、航天、海洋研究、能源、水文、气象、地质、经济、生物、医学、工业过程等应用领域。

为了验证作者提出的方法和结果的有效性，除应用实例外，书中还给出了作者在微型机上完成的大量的数值仿真例子。考虑到仿真的需要，书末附录E给出了正态 $N(0, 1)$ 白噪声的1500个采样数据。

全书共分八章，并且书末有附录A—G。

第一章动态系统自动辨识机介绍了作者研制的AR模型，CAR模型和ARMAX模型自动辨识机，包括程序库和数值仿真结果。

第二章最优滤波除了介绍Kalman滤波和平滑外，还增加了白噪声滤波器和平滑器的新内容及作者提出的稳态最优滤波新方法。

第三章自适应滤波除介绍Sage和Husa的结果和Mehra的结果外，还重点介绍了作者对Sage和Husa自适应Kalman滤波方法的各种推广工作及其应用。

第四章自校正滤波器和平滑器主要介绍作者对Hagander和Wittenmark的自校正滤波器和平滑器的各种推广工作及其应用。

第五章非自适应预报介绍了几种传统的预报方法，包括Box和Jenkins方法，Åström方法，Kolmogorov方法，Kalman方法，并给出了若干应用实例。

第六章自校正和自适应预报除了介绍Wittenmark的自校正预报器和Keyser等的自校正多步预报器外，还介绍了作者提出的多变量多步自校正递推预报器和自适应Kalman滤波预报器，及它们在油田产油量、产水量动态预报问题中的应用。

第七章隐式自校正控制器主要介绍国外的新近结果，其中包括Åström和Wittenmark的自校正调节器及其推广，Clarke和Gawthrop的自校正控制器及其推广，还给出了作者关于分馏塔前馈自校正调节器的应用实例。

第八章显式自校正控制器和自适应控制器介绍了作者的新近研究结果，其中包括理论结果和数值仿真结果。

本书探讨和研究的是现代控制论和时间序列分析之间的边缘领域。许多内容和方法是新的，许多问题有待于进一步研究。由于作者的水平和精力有限，缺点错误之处在所难免，望读者批评指正。

在本书写作过程中，得到刘豹教授的鼓励和帮助，对部分原稿提出了很宝贵的意见，在此表示谢意。

邓自立 郭一新

一九八四年十二月三十日

目 录

第一章 动态系统自动辨识机	1
§ 1 AR模型自动辨识机	2
1.1 引言	2
1.2 参数估计——非递推最小二乘法 (LS)	4
1.3 参数估计——递推最小二乘法 (RLS)	5
1.4 时变参数估计——指数 加权 RLS	6
1.5 参数估计——Yule-Walker方程	6
1.6 参数估计的强一致性	8
1.7 模型阶的F检验判决器	9
1.8 应用例子	10
1.9 AR模型自动辨识机 (带递推最小二乘估计器)程序清单	16
1.10 程序语句说明	29
§ 2 CAR模型自动辨识机	31
2.1 引言	31
2.2 RLS参数估计	33
2.3 模型阶 n 的F检验判决器	33
2.4 子阶和时滞的F检验判决器	34
2.5 数值仿真例子	35
2.6 应用例子——经济系统建模	37
2.7 CAR模型自动辨识机程序清单	40
2.8 语句说明	47
2.9 多输入单输出CAR模型自动辨识机	49
§ 3 多变量CAR模型自动辨识机	58
3.1 引言	58
3.2 RLS参数估计	59
3.3 子模型阶的确定	60
3.4 节省参数模型的时滞和阶的确定	60
3.5 数值仿真例子	62
3.6 程序清单	65
3.7 语句说明	73
§ 4 ARMAX模型的结构和参数的自动辨识机	76
4.1 引言	76
4.2 参数估计——递推增广最小二乘法 (RELS)	77
4.3 模型的阶 n 的F检验判决器	78
4.4 子阶和时滞的F检验判决器	78
4.5 数值仿真例子	80
4.6 ARMAX模型自动辨识机程序清单	82

4.7	语句说明	88
4.8	模型偏差的辨识——ARMAX模型自动辨识机的推广	90
§ 5	多变量ARMAX模型自动辨识机	102
5.1	引言	102
5.2	RELS法参数估计	103
5.3	子模型阶的决定	104
5.4	节省参数模型、子阶和时滞的决定	104
5.5	数值仿真例子	106
5.6	多变量ARMAX模型自动辨识机程序清单	108
5.7	语句说明	130
§ 6	AR模型的补偿偏差最小二乘法辨识——带有色观测噪声的AR模型的辨识	132
6.1	引言	132
6.2	最小二乘法估值的渐近偏差	133
6.3	补偿偏差最小二乘法收敛性证明(压缩映象原理)	135
6.4	数值仿真结果	137
6.5	应用实例——语言信号识别	138
§ 7	带白色观测噪声的ARMA($n, n-1$)模型的辨识	139
7.1	引言	139
7.2	ARMA(n, n)新息模型的辨识	140
7.3	原始ARMA($n, n-1$)的滑动平均(MA)参数的估计——Gevers和Wouters算法	144
7.4	带白色观测噪声的多变量ARMA($n, n-1$)的辨识	145
7.5	带白色观测噪声的多变量AR模型的辨识	147
第二章	最优滤波	151
§ 1	最优滤波和平滑	151
1.1	Kalman滤波的推导	151
1.2	单步最优平滑器	156
§ 2	递推最小二乘(RLS)算法与Kalman滤波的关系	158
§ 3	稳态Kalman滤波	159
3.1	滤波的稳定性	159
3.2	稳态Kalman滤波	160
§ 4	离散时间系统稳态最优滤波新方法	163
4.1	观测过程的ARMA新息模型	164
4.2	稳态最优滤波、预报和平滑	165
4.3	稳态Kalman滤波新算法	168
4.4	稳态Lindquist滤波器	170
4.5	四种稳态Kalman滤波算法的等价性	171
§ 5	带有色观测噪声系统的Kalman滤波	174
§ 6	Mendel的最优白噪声平滑器	177
§ 7	稳态最优白噪声滤波器和平滑器——应用于油田勘探地震数据去卷问题	178
§ 8	多维数字传输系统的线性最佳接收机	183
8.1	引言	183

8.2	ARMA新息模型	184
8.3	线性最佳接收机设计	185
8.4	数值仿真例子	186
第三章	自适应滤波	190
§ 1	Sage和Husa的自适应Kalman滤波方法	191
§ 2	带有色观测噪声系统的自适应Kalman滤波——Sage和Husa结果的推广	195
2.1	Q,R的极大后验估值器	196
2.2	Q,R的次优无偏MAP估值器和自适应滤波	198
2.3	时变噪声协方差的自适应估值器	201
2.4	噪声均值和协方差估值器	202
§ 3	多重时滞系统的自适应递推滤波器——Sage和Husa结果的推广	205
3.1	Tamura次优递推滤波器	205
3.2	噪声统计估值器和自适应递推滤波器	206
3.3	数值仿真例子	208
§ 4	带模型误差系统的自适应Kalman滤波	208
4.1	虚拟噪声补偿技术	209
4.2	数值仿真例子	210
§ 5	参数和状态估计的两段互耦自适应Kalman滤波算法	212
5.1	问题提出和解决	212
5.2	应用于油田产水量动态预报	215
§ 6	Mehra自适应Kalman滤波方法	216
6.1	稳态最优滤波的新息性质	216
6.2	稳态次优滤波的新息序列	217
6.3	Kalman滤波器的最优性检验	218
6.4	稳态最优滤波增益的估计	218
§ 7	稳态Kalman滤波增益的估计	218
7.1	ARMAX新息模型	221
7.2	稳态滤波增益的估计	221
§ 8	带有色观测噪声的稳态最优滤波增益的辨识	223
§ 9	应用自适应Kalman滤波的时变参数系统的辨识	224
9.1	问题阐述和解决	226
9.2	数值仿真例子	227
§ 10	带观测噪声的时变参数系统的辨识	229
10.1	参数和状态估计的两段互耦自适应滤波算法	229
10.2	仿真结果	232
第四章	自校正滤波器和平滑器	236
§ 1	Hagander和Wittenmark的自校正滤波器和平滑器——带白色 观测噪声的单变量ARMA过程情形	236
1.1	最优滤波器和平滑器	237
1.2	自校正滤波器和平滑器	239
§ 2	多变量自校正滤波器和平滑器——Hagander和Wittenmark结果的推广	240
2.1	多变量ARMA过程的最优滤波器	241

2.2	多变量自校正滤波器	244
2.3	最优固定滞后平滑器	245
2.4	多变量自校正固定滞后平滑器	248
§ 3	多变量ARMAX过程的自校正滤波器和平滑器——Hagander和 Wittenmark结果的进一步推广	249
3.1	稳态最优滤波器和平滑器	250
3.2	自校正滤波器和平滑器	253
§ 4	带有色观测噪声的ARMAX过程的自校正滤波器和平滑器 ——应用于语言声学	254
4.1	最优滤波器和平滑器	255
4.2	自校正滤波器和平滑器	258
4.3	应用于噪声环境中语言信号识别	259
§ 5	应用于船舶动态定位系统的自校正Kalman滤波器	260
5.1	多变量ARMA新息模型	261
5.2	稳态最优滤波器和平滑器	262
5.3	自校正Kalman滤波器和平滑器	264
§ 6	应用于地震数据去卷的自校正白噪声估值器	265
6.1	模型辨识	266
6.2	最优白噪声估值器	268
6.3	自校正白噪声滤波器和平滑器	270
第五章	非自适应预报	273
§ 1	时间序列模型的简单性质——相关函数、平稳性和可逆性	274
1.1	AR模型的性质	274
1.2	MA模型的性质	276
1.3	ARMA (p , q) 模型的性质	276
§ 2	Box-Jenkins递推预报方法	280
2.1	预报公式推导	280
2.2	数值例子	281
§ 3	Åström预报方法	284
§ 4	Kolmogorov预报方法	288
§ 5	基于Kalman滤波的预报方法	289
第六章	自校正和自适应预报	296
§ 1	Wittenmark的自校正预报器	296
1.1	线性最小方差预报	296
1.2	自校正预报器	297
§ 2	CAR过程的自校正预报器	299
§ 3	Wittenmark自校正预报器的变形和推广	302
§ 4	Keyser和Cauwenberghe的单变量自校正多步预报器 及其应用——自校正预报控制	304
4.1	超前k步预报器	305
4.2	自校正超前k步预报器	306
4.3	多步递推预报与自校正预报控制	307

4.4	自校正多步预报器	308
§ 5	多变量多步自校正递推预报器及其在油田产量、产水量预报 问题中的应用	309
5.1	第一类多步自校正预报器	309
5.2	第二类多步自校正预报器	311
5.3	应用于油田产量动态预报	312
§ 6	应用于催化裂化生产过程的自校正多步预报器	314
§ 7	带未知时变参数系统的自适应预报	318
7.1	时变参数和状态的自适应预报器	318
7.2	油田产油量、产水量自适应预报	319
§ 8	时变参数系统的两段预报器	320
§ 9	指数平滑预报方法	322
9.1	指数平滑预报公式的推导	322
9.2	高阶指数平滑预报公式	324
§ 10	自校正预报器的遗忘因子的优选——程序库及应用实例	325
10.1	遗忘因子优选概述	325
10.2	因子优选计算方法	326
10.3	油田产油量自校正优选预报器	326
10.4	油田产油量自校正优选预报器程序清单	328
10.5	语句说明	334
10.6	油田产水量自校正优选预报器	335
10.7	油田产水量自校正优选预报器程序清单	337
10.8	语句说明	343
第七章	隐式(直接的)自校正控制器	346
§ 1	Åström最小方差控制	347
§ 2	带前馈补偿的最小方差控制	349
§ 3	多变量最小方差控制	350
§ 4	Åström和Wittenmark的自校正调节器	352
4.1	隐式(直接)自校正原理	353
4.2	隐式(直接)自校正调节器算法	355
§ 5	复杂分馏塔的前馈自校正调节器	357
5.1	设备与工艺情况	357
5.2	系统的控制方案	358
5.3	子系统的自校正调节器	359
5.4	子系统自校正调节器的离线试验	360
5.5	结论	362
5.6	程序清单	362
5.7	语句说明	367
§ 6	Clarke和Gawthrop的自校正控制器	368
6.1	带已知参数系统的控制器设计	368
6.2	自校正控制器	370
§ 7	多变量自校正最小方差控制	371

§ 8 多变量自校正控制器	373
第八章 显式(间接的)自校正控制器和自适应控制器	378
§ 1 带未知时滞和阶的系统的自校正控制器	378
1.1 显式自校正控制器设计	379
1.2 数值仿真例子	381
1.3 单输入单输出CAR过程显式自校正控制器程序清单	382
1.4 语句说明	386
§ 2 多变量系统的自校正自适应控制器	387
2.1 自校正控制器设计	387
2.2 仿真例子	389
2.3 结论	391
2.4 双输入双输出CAR过程显式自校正控制器程序清单	392
2.5 语句说明	399
§ 3 显式自校正控制器	402
3.1 显式自校正控制器设计	402
3.2 数值仿真例子	405
3.3 ARMAX过程显式自校正控制器程序清单	406
3.4 语句说明	409
§ 4 多变量显式自校正控制器	411
4.1 自校正控制器设计	411
4.2 数值仿真例子	413
4.3 双输入双输出ARMAX过程显式自校正控制器程序清单	415
4.4 语句说明	428
§ 5 时变参数系统的自适应控制器	430
5.1 引言	430
5.2 问题阐述	430
5.3 时变参数系统的辨识	431
5.4 自适应控制器	432
5.5 仿真例子	433
5.6 结论	435

附 录

附录A 状态空间模型与时间序列模型的相互关系	436
附录B 矩阵微分运算	439
附录C 估计理论基础——射影定理和公式, 新息方法	442
附录D 矩阵求逆引理, Fadeeva公式, Söderström 引理 (Ergodicity)	443
附录E 正态 $N(0, 1)$ 白噪声采样数据1500个(表)	444
附录F F分布表	451
附录G 程序库一览表	454

第一章 动态系统自动辨识机

动态系统分析的基础是根据实验或观测的数据建立描写动态系统的时间序列模型,分析的前提是时间序列的建模,时间序列的动态预报、滤波和平滑及控制理论都是基于一定类型的时间序列模型而言的,因此建模或系统辨识引起了广泛兴趣,系统辨识已成为现代控制论的十分活跃的领域^[1]。

本章主要讨论时间序列受控的自回归滑动平均模型(CARMA)的建模问题。CARMA模型在文献中也叫带外生变量的自回归滑动平均模型(ARMAX),这类模型是动态系统分析的基本模型,建模由三部分组成:(i)模型的参数估计;(ii)模型阶的确定,其中也包括子阶的确定,即自回归(AR)部分的阶、滑动平均(MA)部分的阶和受控(C或X)部分的阶;(iii)模型的时滞的确定。

传统的时间序列分析主要考虑单变量的自回归滑动平均(ARMA)模型的建模问题,例如Box和Jenkins^[2]主要讨论单变量ARMA(p, q)的建模问题,他们基于极大似然法建模,计算量较大,而且决定模型阶(p, q)的方法是通过考察时间序列的相关图定阶的经验方法。因此从系统辨识观点,Box和Jenkins的建模方法不是令人满意的。吴贤铭和Pandit^[3]主要讨论了单变量ARMA($n, n-1$)的建模问题,参数估计采用非线性最小二乘法,计算量仍较大;用F检验法定阶比Box和Jenkins的经验法定阶简单、方便,他们的一个基本观点是一般的时间序列都可用ARMA($n, n-1$)描写,因而代替ARMA(p, q)可用ARMA($n, n-1$)对时间序列统一建模,这使得定阶问题大大简化。然而吴贤铭和Pandit观点并不是在任何情况下都成立的,在许多领域,例如通讯系统,语言声学,信号和数据处理,经济系统等,仍经常遇到ARMA(p, q)模型,甚至还常常遇到ARMA(n, n), ARMA(n, m), $n < m$,因而吴贤铭和Pandit的建模方法是有局限性的。

节省原理^[4](Parsimony Principle)对建模是十分重要的,这一原理是说我们应当用尽可能少的参数模型描写动态系统。当模型的阶增加时,如果相应的残差平方和的变化是不显著的(通常用F检验法^[10], AIC准则^[24]等判定),人们宁愿用低阶、参数少的模型作为合适的模型,因此模型的定阶法体现了节省原理。作者认为节省原理还应体现在从被接受的合适的模型中,进一步去掉那些不显著异于零的参数,从而最终得到一个节省参数模型即用最少的参数模型描写系统。吴贤铭和Pandit^[3]已开始注意到这点。他们在已被接受的合适的ARMA($n, n-1$)中,又进一步去掉MA部分中尾部不显著异于零的参数,而得到包含更少参数的低阶ARMA(n, m)模型, $m < n-1$ 。

本章将改进和推广传统的时间序列分析建模方法,提出单变量和多变量CARMA模型的一种完整而又计算简单的辨识方法,参数估计采用计算简单的递推最小二乘法(REL)或递推增广最小二乘法(RELS),并提出了联立决定模型的阶、子阶和时滞的F检验判别器,最后得到节省参数模型。

在现有的CARMA模型建模的文献中,完整的建模方法报道很少,有的文章仅给出一般定阶法,但没有进一步给出决定子阶的方法,有的文章只给出这样或那样的参数估计方法;

很少有文章给出模型时滞的判定法^[26],特别是关于多变量CARMA模型结构和参数的辨识,目前还是引起很大兴趣和注意的课题。

本章提出的CARMA模型建模方法可克服流行文献中的上述缺点和局限性,有如下特点:(i)参数估计采用递推最小二乘法或递推增广最小二乘法,计算简单,计算量和存储量小,便于在微型机上实现。比传统的极大似然法,非线性最小二乘法有明显的优越性,并且理论和实际应用或数值仿真都证明了RLS算法和RELS算法有良好的收敛性,可得到未知参数的一致估计。(ii)带有决定模型子阶和时滞的F检验判决器。(iii)可得到节省参数的CARMA模型。(iv)模型的阶、子阶和时滞的判决统一归结为用F检验法判别模型中某些参数是否显著异于零的统计假设检验问题,并自然引出节省参数模型。

在叙述上我们将由特殊到一般,从AR模型建模过渡到CAR模型建模,最后过渡到CARMA模型建模,并且分别从单变量情形过渡到多变量情形。

本章也讨论了带观测噪声的ARMA模型建模问题,这种情形常常出现在通讯、语言学、地震勘探数据处理等领域。

考虑到实际工作者的需要和方便,每节我们都给出用BASIC语言实现的自动建模程序库,其功能是只要把观测或实验数据输入计算机,则建模过程可由计算机自动完成,并打印出合适的节省参数模型的参数、阶、子阶和时滞。在这种意义上,我们称之为AR模型或CAR模型或CARMA模型的自动辨识机。

自动辨识机建模的更迭过程如框图1.1所示。

此外,应用自适应Kalman滤波方法的时变参数系统的辨识将在第三章讨论。

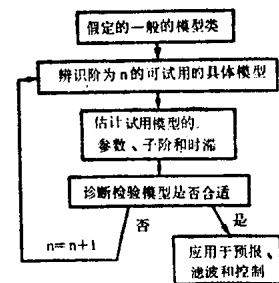


图1.1 建模的更迭处理阶段

§ 1 AR模型自动辨识机

1.1 引言

时间序列的线性模型在预报和控制、估值和滤波等许多领域中起重要作用。

Box和Jenkins^[1]提出的对时间序列 x_t 的建模方法是基于ARMA(p,q)模型。

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} - \cdots - \phi_p x_{t-p} = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \cdots - \theta_q e_{t-q} \quad (1)$$

其中p, q为模型的阶, ϕ_i, θ_i 为模型的参数, e_t 是零均值的白噪声。当所有 $\theta_i = 0$ 时, (1)称为自回归(AR)模型; 当所有 $\phi_i = 0$ 时, (1)称为滑动平均(MA)模型。

Box和Jenkins^[2]用极大似然(ML)法估计参数 ϕ_i, θ_i , 但ML方法的计算量很大, 文献^[2]也没给出决定阶p, q的有效方法, 只给出基于考察时间序列的自相关函数的选择阶的猜测法。由于决定阶p, q的困难, 因而对时间序列要选择一个合适的模型, 通常事先要建立许多可能的不同阶的ARMA模型, 这使得建模的工作量很大, 对此, 吴贤铭和Pandit^[3]从系统分析角度出发, 证明了任何一个由白噪声激发的n阶随机微分方程对应的采样模型是ARMA(n, n-1), 因此提出基于如下的ARMA(n, n-1)模型对时间序列统一建模方法。

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} - \cdots - \phi_n x_{t-n} = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \cdots - \theta_{n-1} e_{t-n+1} \quad (2)$$

这样, 依次由低阶到高阶建模ARMA(1, 0), ARMA(2, 1), ..., ARMA(n+1, n), 并用F检验法, 通常只须建立n+1个模型就可得到时间序列所服从的ARMA(n, n-1)模型, 避免了定阶的困难, 改进和简化了Box和Jenkins的建模方法。例如, 对于一个服从ARMA

(5, 3)的时间序列,用Box和Jenkins方法建模,在找到合适模型之前,可能要拟合多达23个模型,而用吴贤铭和Pandit方法只须建立6个模型。

但由于吴贤铭和Pandit的建模方法仍以ARMA模型为基础,且所用的参数估计方法是非线性最小二乘法^[3],因而建模的计算量仍相当大。对此,本节提出基于AR模型对时间序列统一建模的方法,这是基于任何可逆的^[2]ARMA模型可用阶数充分大的AR模型逼近到任意精度。事实上,引入延迟算子B, $B^j x_t = x_{t-j}$, 则(1)式可简写为

$$\phi(B)x_t = \theta(B)e_t \quad (3)$$

其中 $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$, $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ 为算子多项式。

由可逆性要求,假定 $\theta(B)$ 的根在单位圆外^[2], 则(1)式可表为

$$\frac{\phi(B)}{\theta(B)} x_t = e_t \quad (4)$$

其中算子 $\phi(B)/\theta(B)$ 可展为级数

$$\phi(B)/\theta(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots - \pi_n B^n - \dots \quad (5)$$

而权系数 π_j 可用比较如下算子恒等式两边B的同次幂系数计算。

$$\phi(B) = \theta(B)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) \quad (6)$$

把(5)式代入(4)式,则可逆的ARMA(p,q)模型可用无限阶AR(∞)模型表示为

$$x_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j x_{t-j} + e_t \quad (7)$$

当 $\theta(B)$ 的根在单位圆外时, $\pi_j \rightarrow 0 (j \rightarrow \infty)$ ^[2], 因此,当n充分大时,ARMA(p,q)模型可用如下有限阶AR(n)模型逼近到任意精度。

$$x_t = \sum_{j=1}^n \hat{\pi}_j x_{t-j} + \hat{e}_t \quad (8)$$

其中 $\hat{\pi}_j$ 是基于对 x_t 的N个观测数据,用线性递推最小二乘法所估计的AR(n)参数,白噪声 $\hat{e}_t$ 是相应的模型残差,可证明^[5]当 $n \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$ 时,均方误差 $E(e_t - \hat{e}_t)^2 \rightarrow 0$ 。

因此可基于有限阶AR(n)模型对时间序列统一建模,优点是对AR(n)模型可用递推线性最小二乘法估计其参数,算法十分简单且计算量和存储量很小,在Z-80微型机上,进行高达20阶左右的AR模型的辨识,通常已满足实际应用的精度要求,因而进一步改进了吴贤铭和Pandit的建模方法。对预报目的而言,建立AR模型十分方便,当对某些问题有必要对时间序列建立ARMA模型时,也可由所拟合的AR模型得到相应的ARMA模型^[9]。时间序列的统一建模方法比较在表1.1中给出。

从应用观点,本节提出了时间序列AR模型自动辨识机,它是由时间序列的观测数据自动地决定相应的AR模型的阶和参数的软件包,并可在Z-80微型机上实现。假如时间序列服从AR(n)模型,则由低阶到高阶用RLS方法分别建立AR(1),AR(2),...,AR(n+1)共n+1个模型,并自动地在相邻两个模型间进行F检验,即可决定模型的阶n,最后由辨识机输出打印真实模型的阶n及AR(n)的参数值。

我们以太阳黑子活动、机械振动建模为例,

表1.1 时间序列建模方法的比较

方法 特性	Box和 Jenkins方法	吴贤铭和 Pandit方法	本节方法
模型类	ARMA(p,q)	ARMA(n,n-1)	AR(n)
参数个数	p+q	2n-1	n
定阶法	猜测法 χ^2 检验	F检验	F检验
参数估计方法	ML方法	非线性LS方法	线性RLS方法
时间序列类	平稳或非平稳	平稳或非平稳	平稳或非平稳
计算量	很大	较大	小

说明AR模型自动辨识机的有效性。

1.2 参数估计——非递推最小二乘法 (LS)

对于AR(p)模型

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + e_t \quad (9)$$

可以写成向量形式

$$x_t = \Phi^T(t) \alpha + e_t \quad (10)$$

其中T为向量或矩阵转置符号，且

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-p} \end{pmatrix} \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

模型残差为

$$e_t = x_t - \Phi^T(t) \alpha \quad (11)$$

最小二乘法是寻求未知参数 α 的极小化残差平方和。假如已知观测数据

$$x_{1-p}, \dots, x_0, x_1, \dots, x_N$$

于是有如下目标函数。

$$J(\alpha) = \sum_{t=1}^N e_t^2 = \sum_{t=1}^N (x_t - \Phi^T(t) \alpha)^2 \quad (12)$$

目的是求 α 的估值 $\hat{\alpha}$ ，它满足

$$J(\hat{\alpha}) = \min$$

记

$$H(N) = \begin{pmatrix} \Phi^T(1) \\ \Phi^T(2) \\ \vdots \\ \Phi^T(N) \end{pmatrix} \quad Z(N) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad V(N) = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix}$$

除 $x_{1-p}, \dots, x_0$ 已知外，如果已得到了N个时刻的观测数据，则有如下的N个等式。

$$\begin{cases} x_1 = \Phi^T(1) \alpha + e_1 \\ \vdots \\ x_N = \Phi^T(N) \alpha + e_N \end{cases} \quad (13)$$

它可以写为向量矩阵形式

$$Z(N) = H(N) \alpha + V(N) \quad (14)$$

注意到

$$V^T(N) V(N) = (e_1 \cdots e_N) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix} = \sum_{t=1}^N e_t^2$$

于是又可把目标函数写成

$$J(\alpha) = V^T(N) V(N) = [Z(N) - H(N) \alpha]^T [Z(N) - H(N) \alpha] \quad (15)$$

令 $\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 0$ ，有

$$2[-H^T(N)] [Z(N) - H(N) \alpha] = 0$$

即

$$H^T(N) H(N) \alpha = H^T(N) Z(N) \quad (16)$$

因而 α 的最小二乘法估值 $\hat{\alpha}$ 为

$$\hat{\alpha} = [H^T(N)H(N)]^{-1}H^T(N)Z(N) \quad (17)$$

1.3 参数估计——递推最小二乘法(RLS)

基于到时刻 N 的观测, $AR(p)$ 的参数 α 的最小二乘法估值为

$$\hat{\alpha}(N) = [H^T(N)H(N)]^{-1}H^T(N)Z(N)$$

如果增加时刻 $N+1$ 的观测数据 x_{N+1} , 则公式(17)为

$$\hat{\alpha}(N+1) = [H^T(N+1)H(N+1)]^{-1}H^T(N+1)Z(N+1) \quad (18)$$

自然可估计的时刻 $N+1$ 的 α 估值 $\hat{\alpha}(N+1)$, 但是这种对过去的数要完全重用一次的算法是麻烦的。是否能在已知 $\hat{\alpha}(N)$ 的基础上去计算 $\hat{\alpha}(N+1)$ 呢? 这就是本节要介绍的递推算法。

我们置

$$P(N) = [H^T(N)H(N)]^{-1} \quad (19)$$

则

$$\begin{aligned} P(N+1) &= [H^T(N+1)H(N+1)]^{-1} = \left[\begin{pmatrix} H(N) \\ \Phi^T(N+1) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} H(N) \\ \Phi^T(N+1) \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ &= [H^T(N)H(N) + \Phi(N+1)\Phi^T(N+1)]^{-1} \\ &= [P^{-1}(N) + \Phi(N+1)\Phi^T(N+1)]^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

应用矩阵求逆引理: 如果对一个 $n \times n$ 非异阵 A 与任意两个 $n \times m$ 阵 B 和 C , 矩阵 $(A + BC^T)$ 与 $(I + C^T A^{-1} B)$ 是非异的, 则如下矩阵恒等式成立。

$$(A + BC^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + C^T A^{-1} B)^{-1}C^T A^{-1} \quad (21)$$

我们可得到

$$\begin{aligned} P(N+1) &= P(N) - P(N)\Phi(N+1)[I + \Phi^T(N+1)P(N)\Phi(N+1)]^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \Phi^T(N+1)P(N) \\ &= [I - K(N+1)\Phi^T(N+1)]P(N) \end{aligned} \quad (22)$$

其中

$$K(N+1) = \frac{P(N)\Phi(N+1)}{I + \Phi^T(N+1)P(N)\Phi(N+1)} \quad (23)$$

从而有

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(N+1) &= P(N+1)H^T(N+1)Z(N+1) \\ &= P(N+1) \begin{bmatrix} H(N) \\ \Phi^T(N+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z(N) \\ x_{N+1} \end{bmatrix} \\ &= P(N+1)[H^T(N)Z(N) + \Phi(N+1)x_{N+1}] \\ &= [I - K(N+1)\Phi^T(N+1)]P(N)[H^T(N)Z(N) + \Phi(N+1)x_{N+1}] \\ &= P(N)H^T(N)Z(N) - K(N+1)\Phi^T(N+1)P(N)H^T(N)Z(N) + \\ &\quad + P(N)\Phi(N+1)x_{N+1} - K(N+1)\Phi^T(N+1)P(N)\Phi(N+1)x_{N+1} \\ &= \hat{\alpha}(N) - K(N+1)\Phi^T(N+1)\hat{\alpha}(N) + [P(N)\Phi(N+1) - \\ &\quad - K(N+1)\Phi^T(N+1)P(N)\Phi(N+1)]x_{N+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{\alpha}(N) - K(N+1)\Phi^T(N+1)\hat{\alpha}(N) + K(N+1)x_{N+1} \\
&= \hat{\alpha}(N) + K(N+1)[x_{N+1} - \Phi^T(N+1)\hat{\alpha}(N)]
\end{aligned} \tag{24}$$

综上所述, 我们证明了如下AR(p)的参数 α 的递推最小二乘法估值定理。

$$\hat{\alpha}(N+1) = \hat{\alpha}(N) + K(N+1)[x_{N+1} - \Phi^T(N+1)\hat{\alpha}(N)] \tag{25}$$

$$K(N+1) = \frac{P(N)\Phi(N+1)}{1 + \Phi^T(N+1)P(N)\Phi(N+1)} \tag{26}$$

$$P(N+1) = [I - K(N+1)\Phi^T(N+1)]P(N) \tag{27}$$

$\hat{\alpha}(N)$ 的初值 $\hat{\alpha}(0)$ 要事先适当给定, 在无任何先验信息时, 可取 $\hat{\alpha}(0) = 0$, $P(N)$ 的初值可选取为 $P(0) = \mu I$, μ 是很大的正数, 例如 $\mu = 10^4$ 。

1.4 时变参数估计——指数加权RLS

当AR(p)模型参数随时间变化时, 随着观测数据的增加, 用普通递推最小二乘法估计参数的误差常常反而变大, 这是因为新数据被旧数据所淹没。为了体现过程的时变性, 应强调新近数据的作用, 而渐渐遗忘陈旧数据的影响, 这就是加权最小二乘法的基本思想。

对于AR(p)模型

$$x_t = \Phi^T(t)\alpha + e_t \tag{28}$$

在目标函数 $J(\alpha)$ 中, 我们对被求和的每项乘一个加权系数 λ^{N-t} , λ ($0 < \lambda < 1$) 叫遗忘因子, 可得

$$J(\alpha) = \sum_{t=1}^N \lambda^{N-t} [x_t - \Phi^T(t)\alpha]^2 \tag{29}$$

这体现了在残差平方和中我们强调新近数据的作用。选取估值 $\hat{\alpha}$ 极小化这个加权目标函数叫加权最小二乘法。

类似可求得加权递推最小二乘法公式为

$$\hat{\alpha}(N+1) = \hat{\alpha}(N) + K(N+1)[x_{N+1} - \Phi^T(N+1)\hat{\alpha}(N)] \tag{30}$$

$$K(N+1) = \frac{P(N)\Phi(N+1)}{\lambda + \Phi^T(N+1)P(N)\Phi(N+1)} \tag{31}$$

$$P(N+1) = \frac{1}{\lambda} [I - K(N+1)\Phi^T(N+1)]P(N) \tag{32}$$

初值 $\hat{\alpha}(0) = \alpha_0$, $P(0) = \mu I$, μ 是很大正数。

1.5 参数估计——Yule-Walker方程

记AR(p)过程 x_t 的相关函数为

$$r_i = E[x_t x_{t-i}]$$

其中 E 表示数学期望(均值)。

(9)式两边乘 x_{t-1} 并取数学期望可得到