现代数学基础丛书

单复变函数论中的几个论题

庄圻泰　杨重骏　何育赞　闻国椿 著

科学出版社

现代数学基础丛书

单复变函数论中的几个论题

庄圻泰　杨重骏　何育赞　闻国椿 著

科　学　出　版　社
1995

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书对复分析中四个重要论题的现代进展作了系统的介绍，同时提出尚未解决的问题．全书共四章．第一、二章分别介绍亚纯函数微分多项式及亚纯函数分解论的深入的研究成果．第三章阐述 Bloch 函数、Bloch 空间及其相关的理论．第四章论述偏微分方程的复分析方法．

本书可供大学数学系学生、研究生、教师和有关的科技工作者参考．

现代数学基础丛书

单复变函数论中的几个论题

庄圻泰 杨重骏 何育赞 闻国椿 著

责任编辑 吕 虹

科 学 出 版 社 出 版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717

新世纪印刷厂印刷
北京市蓝地公司激光照排
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1995 年 8 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1995 年 8 月第一次印刷 印张：10 3/4
印数：1—1 570 字数：280 000

ISBN 7-03-004510-6/O・777

定价：15.80 元

前　言

近年来复变函数理论的发展，一方面在经典理论中不断取得深入的结果，比如值分布理论及其应用，特别是微分多项式和亚纯函数因子分解方面的研究；另一方面进展表明复变函数与数学的其它分支有密切的联系，比如解析函数空间和偏微分方程的复分析方法等.

本书包括单复变函数论中的下列四个论题：亚纯函数的微分多项式，函数分解论，Bloch 函数及其它，边值问题的复分析方法．这四个论题在国内外，特别在美国、英国、前苏联、德国、芬兰及日本等国有不少学者一直从事研究并取得一系列成果，国内也已开展一些研究工作．本书共四章，依次由庄圻泰、杨重骏、何育赞、闻国椿撰写．四位作者对于这四个论题的概况都分别颇为了解，并有专著及重要贡献．例如杨重骏是函数分解论研究的开创者之一，并且曾主编了这方面的论文集．本书各章总结了有关论题的一些新的内容和作者们的研究成果，并提出未解决的问题．这些将对于国内开展有关论题的学习、整理和研究有所帮助.

目　录

第一章　亚纯函数的微分多项式

在本章中亚纯函数均为复平面$\mathbb{C}$上的亚纯函数. 非有理函数的亚纯函数称为超越亚纯函数. 整函数可以看做是特别的一类亚纯函数,即不取值∞的亚纯函数. 我们将用Nevanlinna建立的亚纯函数的理论中所引进的符号$m(r,f)$,$N(r,f)$,$T(r,f)$,$\overline{N}(r,f)$及有关定理,读者可参考[30],[23]和[5].

设$f(z)$为一超越亚纯函数. $f(z)$的一个微分多项式即为$f(z)$与其前几阶导数$f^{(j)}(z)(j=1,2,\cdots,q)$的一个多项式:

$$P(f,f',\cdots,f^{(q)})=\sum_{k=1}^{n}a_k(z)(f)^{s_{k0}}(f')^{s_{k1}}\cdots(f^{(q)})^{s_{kq}},$$

其中系数$a_k(z)$为关于$f(z)$的小函数,即在某种意义下,$T(r,a_k)$的增长性较慢于$T(r,f)$的增长性,指数s_{kj}均为非负整数. 特别$a_k(z)$可为常数. $f(z)$的最简单的微分多项式为$f(z)$的各阶导数. 在亚纯函数的理论中,时常涉及微分多项式,例如在推广Nevanlinna的第二基本定理到小函数的情形的证明中所用的Wronskian即为一类微分多项式.

本章着重论述关于亚纯函数的增长性及值分布的理论中涉及微分多项式的一些内容.

§1. 亚纯函数与其微分多项式的增长性的比较

1.1　基本概念

我们从作者的下列定理出发. 这个定理和以下两个推论的证明已发表在论文[1]及书[5]中.

定理 1.1 若 $f(z)$ 为一超越亚纯函数，则存在一个正数 r_0，使得当 $\lambda > 1$ 及 $r > r_0$ 时，有

$$T(r,f') < A\frac{\lambda}{\lambda-1}T(\lambda r,f) \tag{1.1}$$

和

$$T(r,f) < B\frac{\lambda}{\lambda-1}\log\frac{B\lambda}{\lambda-1}T(\lambda r,f'), \tag{1.2}$$

其中 A 及 B 为二正绝对常数，f' 表示 $f(z)$ 的导数 $f'(z)$.

定义 1.1 我们称一个函数 $U(r)$ 满足条件(C)，如果 $U(r)$ 满足下列两个条件：

1° $U(r)$ 于 $r > 0$ 为连续、正并且随 r 趋于无穷.

2° 存在一函数 $\delta(r)$ 于 $r > 0$ 为连续、正，使

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\log\left\{1+\dfrac{1}{\delta(r)}\right\}}{\log U(r)} = 0$$

和

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log U(R)}{\log U(r)} = 1, \quad R = r\{1+\delta(r)\}.$$

推论 1.2 若 $f(z)$ 为一超越亚纯函数并且 $U(r)$ 为一函数满足条件(C)，则有

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log U(r)} = \varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f')}{\log U(r)}$$

和

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log U(r)} = \varliminf_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f')}{\log U(r)}.$$

推论 1.3 若 $f(z)$ 为一超越亚纯函数，则有

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r} = \varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f')}{\log r}$$

和

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r} = \varliminf_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f')}{\log r}.$$

推论 1.3 表示一个超越亚纯函数和它的导数有相同的级和相

同的下级.

在本节中我们的主要目的是推广定理 1.1,将其中的 f' 换为 f 的一个较一般的微分多项式并得出两个类似的不等式. 从以上的两个推论来看, 这样的推广是很有意义的,为此我们先给出一个定义.

定义 1.2 设 $f(z)$ 及 $g(z)$ 为二超越亚纯函数. 我们说 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的增长性是差不多相同的,如果存在两个正数 A,B,两个正整数 p,q 和一个正数 r_0 使得当 $\lambda>1$ 及 $r>r_0$ 时, 有

$$T(r,f)<A\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{p}T(\lambda r,g) \tag{1.3}$$

和

$$T(r,g)<B\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{q}T(\lambda r,f). \tag{1.4}$$

定理 1.4 若二超越亚纯函数 $f(z)$ 及 $g(z)$ 的增长性是差不多相同的并且 $U(r)$ 为一函数满足条件(C),则有

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log U(r)}=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,g)}{\log U(r)}$$

和

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log U(r)}=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,g)}{\log U(r)}.$$

这个定理的证明方法与推论 1.2 的证明方法相同. 不过为了完全起见,我们给出证明如下:

取一正数 a 使得当 $r\geqslant a$ 时,有

$$T(r,f)>1,\quad T(r,g)>1,\quad U(r)>1.$$

定义函数

$$F(r)=\frac{\log T(r,f)}{\log U(r)},\quad F_1(r)=\frac{\log T(r,g)}{\log U(r)}$$

于 $r\geqslant a$, 并设

$$\overline{L}=\varlimsup_{r\to+\infty}F(r),\quad \underline{L}=\varliminf_{r\to+\infty}F(r),$$

$$\overline{L}_1=\varlimsup_{r\to+\infty}F_1(r),\quad \underline{L}_1=\varliminf_{r\to+\infty}F_1(r).$$

设 $\delta(r)$ 为定义 1.1 中函数，并在(1.3)及(1.4)二式中取 $\lambda = 1 + \delta(r)$. 则当 $r > r_0$ 时，有

$$T(r,f) < A\left\{1 + \frac{1}{\delta(r)}\right\}^p T(R,g),$$

$$T(r,g) < B\left\{1 + \frac{1}{\delta(r)}\right\}^q T(R,f),$$

其中

$$R = r\{1 + \delta(r)\}.$$

于 $r > b = \max(a, r_0)$ 定义

$$\varphi(r) = \frac{\log A}{\log U(r)} + \frac{p\log\left\{1 + \frac{1}{\delta(r)}\right\}}{\log U(r)},$$

$$\varphi_1(r) = \frac{\log B}{\log U(r)} + \frac{q\log\left\{1 + \frac{1}{\delta(r)}\right\}}{\log U(r)},$$

$$\psi(r) = \frac{\log U(R)}{\log U(r)}.$$

则，当 $r > b$ 时，有

$$F(r) < \varphi(r) + \psi(r)F_1(R), \tag{1.5}$$

$$F_1(r) < \varphi_1(r) + \psi(r)F(R). \tag{1.6}$$

根据定义 1.1 中条件 1°及 2°，有

$$\lim_{r\to+\infty}\varphi(r) = 0, \quad \lim_{r\to+\infty}\varphi_1(r) = 0, \quad \overline{\lim_{r\to+\infty}}\psi(r) = 1.$$

故由式(1.5)得

$$\overline{L} \leqslant \overline{L}_1, \quad \underline{L} \leqslant \underline{L}_1.$$

同样由式(1.6)得

$$\overline{L}_1 \leqslant \overline{L}, \quad \underline{L}_1 \leqslant \underline{L}.$$

故有

$$\overline{L} = \overline{L}_1, \quad \underline{L} = \underline{L}_1.$$

推论 1.5 若二超越亚纯函数 $f(z)$ 及 $g(z)$ 的增长性是差不多相同的，则有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log T(r,f)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log T(r,g)}{\log r} \tag{1.7}$$

和

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}=\lim_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,g)}{\log r}. \tag{1.8}$$

证 显然函数$U(r)=r$满足条件(C),事实上取$\delta(r)=1$,则定义1.1中条件2°即满足.故由定理1.4立即推出推论1.5.(1.7),(1.8)二式分别表示$f(z)$及$g(z)$有相同的级和相同的下级.

定理1.6 设$f(z),g(z),h(z)$为三超越亚纯函数.如果$f(z)$和$g(z)$的增长性是差不多相同的,并且$g(z)$和$h(z)$的增长性是差不多相同的,则$f(z)$和$h(z)$的增长性是差不多相同的.

证 按假定,当$\lambda>1$及$r>r_0$时,有(1.3)及(1.4)二式.另外,当$\lambda>1$及$r>r_1$时,有

$$T(r,g)<A_1\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{p_1}T(\lambda r,h) \tag{1.9}$$

和

$$T(r,h)<B_1\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{q_1}T(\lambda r,g). \tag{1.10}$$

设$\lambda>1$及$r>r'_0=\max(r_0,r_1)$,令

$$\mu=\frac{\lambda+1}{2}>1,\quad \lambda_1=\frac{\lambda}{\mu}>1.$$

则由式(1.3),有

$$T(r,f)<A\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{p}T(\mu r,g),$$

又由式(1.9),有

$$\begin{aligned}T(\mu r,g)&<A_1\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1-1}\right)^{p_1}T(\lambda_1\mu r,h)\\&=A_1\left(\frac{2\lambda}{\lambda-1}\right)^{p_1}T(\lambda r,h).\end{aligned}$$

故有

$$T(r,f)<A'\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{p'}T(\lambda r,h),$$

$$A'=2^{p+p_1}AA_1,$$

$$p' = p + p_1.$$

同样，当 $\lambda > 1$ 及 $r > r'_0$ 时，有

$$T(r,h) < B'\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{q'} T(\lambda r, f),$$

$$B' = 2^{q+q'} B B_1,$$

$$q' = q + q_1.$$

定义 1.3 设 $\Omega(f)$ 为一算子使得对于每一亚纯函数 f 有一亚纯函数 $\Omega(f)$ 相应. 我们说算子 $\Omega(f)$ 保持增长性，如果对于每一超越亚纯函数 f，相应的亚纯函数 $\Omega(f)$ 是超越的并且二函数 f 及 $\Omega(f)$ 的增长性差不多是相同的.

定理 1.7 若二算子 $\Phi(f)$ 及 $\Psi(f)$ 均保持增长性，则复合算子 $\Omega(f) = \Psi\{\Phi(f)\}$ 亦保持增长性.

证 设 f 为一超越亚纯函数. 则按假定，亚纯函数 $\Phi(f)$ 为超越的并且 f 及 $\Phi(f)$ 二函数的增长性是差不多相同的. 然后亚纯函数 $\Omega(f) = \Psi\{\Phi(f)\}$ 为超越的并且 $\Phi(f)$ 及 $\Omega(f)$ 二函数的增长性是差不多相同的. 故根据定理 1.6，f 及 $\Omega(f)$ 二函数的增长性是差不多相同的.

下面我们举例说明.

1）首先根据定理 1.1，算子 $\omega_1(f) = f'$ 显然保持增长性，其中 f' 为 f 的导数. 然后根据定理 1.7，下列各算子均保持增长性：

$$\omega_1(f) = f',$$

$$\omega_2(f) = \omega_1\{\omega_1(f)\} = f'',$$

$$\omega_3(f) = \omega_1\{\omega_2(f)\} = f''',$$

$$\cdots\cdots$$

$$\omega_p(f) = \omega_1\{\omega_{p-1}(f)\} = f^{(p)}.$$

2）设 q 为一正整数并定义算子

$$\pi_q(f) = f^q.$$

我们知道对于任意一个亚纯函数 f，公式

$$T(r, f^q) = qT(r, f)$$

成立. 由此显然算子 $\pi_q(f)$ 保持增长性.

从算子 $\omega_p(f)$ 及 $\pi_q(f)$ 出发利用复合的手续，可以得出许多算子，例如：

$$\Omega_{q,p}(f)=\pi_q\{\omega_p(f)\}=\{f^{(p)}\}^q,$$
$$\Omega_{p,q}(f)=\omega_p\{\pi_q(f)\}=\{f^q\}^{(p)},$$
$$\Omega_{p_1,q,p}(f)=\omega_{p_1}\{\Omega_{q,p}(f)\}=(\{f^{(p)}\}^q)^{(p_1)},$$
$$\Omega_{q_1,p,q}(f)=\pi_{q_1}\{\Omega_{p,q}(f)\}=(\{f^q\}^{(p)})^{q_1}.$$

注意，无论这个手续进行多少次，我们总是得到一个保持增长性的算子，它可以表示为 f 和 f 的前几阶导数 $f^{(j)}(j=1,2,\cdots,n)$ 的一个齐次多项式，其系数为正整数．例如：

$$\omega_3\{\pi_2(f)\}=\{f^2\}^{(3)}=2(ff'''+3f'f'').$$

所有这些齐次多项式构成 f 的一类齐次微分多项式．以下为方便起见，我们用符号 (h) 表示这个类.

作为(h)类微分多项式的一个应用，让我们先回顾 Edrei[15]的一个定理．

设 $f(z)$ 为一超越亚纯函数. 考虑由

$$re^{i\omega_1},\quad re^{i\omega_2},\quad \cdots,\quad re^{i\omega_q}\qquad (r\geqslant 0)\tag{1.11}$$

定义的 q 条从原点出发的半线，其中

$$0\leqslant\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_q<2\pi\qquad (q\geqslant 1)\tag{1.12}$$

和 Edrei 一样，我们称方程

$$f(z)=a$$

的根分布在半线(1.11)上，如果这个方程最多只有有穷个根不在半线(1.11)上．

在这个定义下，Edrei 证明了如果下列三个方程：

$$f(z)=0,\quad f(z)=\infty,\quad f^{(l)}(z)=1\quad (l\geqslant 0,\quad f^{(0)}=f)$$

的根分布在半线(1.11)上，并且

$$\delta(0,f)+\delta(\infty,f)+\delta(1,f^{(l)})>0,$$

其中左边三项都表示亏量，则 $f(z)$ 的级 ρ 满足不等式

$$\rho\leqslant\sup\left\{\frac{\pi}{\omega_2-\omega_1},\quad\frac{\pi}{\omega_3-\omega_2},\cdots,\frac{\pi}{\omega_{q+1}-\omega_q}\right\}(\omega_{q+1}=2\pi+\omega_1).$$

在本章作者和马立志合作的论文[9]中，我们给出上述Edrei定理的一个推广．我们将定理中的$f^{(l)}(z)$换成$f(z)$的一个齐次微分多项式：

$$g(z)=\sum_{n=1}^{k}c_n\prod_{j=0}^{p}\{f^{(j)}(z)\}\lambda_{n_j},$$

其中系数$c_n(n=1,2,\cdots,k)$为常数并且$\lambda_{n_j}(n=1,2,\cdots,k;j=0,1,\cdots,p)$为非负整数使

$$\sum_{j=0}^{p}\lambda_{n_j}=d\quad(d>0),\ n=1,2,\cdots,k.$$

我们证明如果$g(z)$不为常数并且与$f(z)$有相同的级，则Edrei定理中的结论仍成立. 显然以上定义的(h)类微分多项式满足对$g(z)$的全部要求．

在下面我们需要下列两个引理．

引理1.8 设$f(z)$为一不恒等于零的亚纯函数并设$n\geqslant 1$为一正整数. 则存在正常数A,B,C,D使得当$1\leqslant r<\rho$时，有

$$m\left(r,\frac{f^{(n)}}{f}\right)<A\overset{+}{\log}T(\rho,f)+B\log\rho+C\overset{+}{\log}\frac{1}{\rho-r}+D.\tag{1.13}$$

关于这个引理的证明可参阅[30]及[10].

引理1.9 设$U(r)$为在一区间$r_0<r<\rho(r_0\geqslant 0)$的一个非负并且非减函数. 设$a$及$b$为二正数使$b\geqslant 2a$及$b\geqslant 8a^2$. 若当$r_0<r<R<\rho$时，有

$$U(r)<a\overset{+}{\log}U(R)+a\log\frac{R}{R-r}+b,\tag{1.14}$$

则当$r_0<r<R<\rho$时，有

$$U(r)<2a\log\frac{R}{R-r}+2b.\tag{1.15}$$

关于这个引理的证明可参阅[27]，[5]和[10].

现在我们继续研究定理1.1的推广，将其中的f'换为f的一个较一般的微分多项式. 为此我们分别研究线性微分多项式及一

般微分多项式两种情形.

1.2 线性微分多项式

考虑 p 个线性无关的亚纯函数 $\psi_k(z)(k=1,2,\cdots,p;p\geqslant 1)$ 及一亚纯函数 $f(z)$. 以 $A_0=W(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_p)$ 表示 $\psi_k(z)(k=1,2,\cdots,p)$ 的 Wronskian，并以 $W(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_p,f)$ 表示 $\psi_k(z)(k=1,2,\cdots,p)$，$f(z)$ 的 Wronskian. 定义[3]

$$L(f)=\frac{W(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_p,f)}{W(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_p)}=f^{(p)}+\frac{A_1}{A_0}f^{(p-1)}+\cdots$$

$$+\frac{A_{p-1}}{A_0}f'+\frac{A_p}{A_0}f. \tag{1.16}$$

如果我们将 $\psi_k(z)(k=1,2,\cdots,p)$ 固定，而让 $f(z)$ 变化，则 $L(f)$ 为一线性算子. 特别当 $p=1,\psi_1=1$ 时，有 $L(f)=f'$，并且当 $p\geqslant 2,\psi_k=z^{k-1}(k=1,2\cdots,p)$ 时，有 $L(f)=f^{(p)}$.

在论文[6]中我们得出了利用函数

$$F(z)=L\{f(z)\} \tag{1.17}$$

来表示函数 $f(z)$ 的反演公式:

$$f(z)=\sum_{k=1}^{p}c_k(z)\psi_k(z), \tag{1.18}$$

其中 $c_k(z)(k=1,2,\cdots,p)$ 为亚纯函数满足恒等式:

$$c'_k=(-1)^{p+k}\frac{\Phi_k}{A_0}F,\quad k=1,2,\cdots,p, \tag{1.19}$$

其中 Φ_k 是从行列式

$$A_0=\begin{vmatrix}\psi_1 & \psi_2 & \cdots & \psi_p\\ \psi'_1 & \psi'_2 & \cdots & \psi'_p\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \psi_1^{(p-1)} & \psi_2^{(p-1)} & \cdots & \psi_p^{(p-1)}\end{vmatrix} \tag{1.20}$$

中去掉第 p 行及第 k 列所得的行列式.

证明公式(1.18)的方法是首先考虑微分方程:

$$L(w)=F, \tag{1.21}$$

其中 w 为未知函数而 F 为式(1.17)定义的亚纯函数，然后利用

Lagrange 的一个方法，即为常数变化法[21]，求出方程(1.21)的一个具有形式：

$$w = \sum_{k=1}^{p} c_k(z)\psi_k(z) \tag{1.22}$$

的解. 按照此法，我们令

$$\begin{aligned} &\psi_1^{(j)}c'_1 + \psi_2^{(j)}c'_2 + \cdots + \psi_p^{(j)}c'_p = 0, \\ &j = 0,1,\cdots,p-2. \end{aligned} \tag{1.23}$$

则

$$\begin{aligned} &w^{(j)} = c_1\psi_1^{(j)} + c_2\psi_2^{(j)} + \cdots + c_p\psi_p^{(j)}, \\ &\quad j = 1,2,\cdots,p-1 \end{aligned} \tag{1.24}$$

和

$$\begin{aligned} w^{(p)} = {}&c_1\psi_1^{(p)} + c_2\psi_2^{(p)} + \cdots + c_p\psi_p^{(p)} + \psi_1^{(p-1)}c'_1 \\ &+ \psi_2^{(p-1)}c'_2 + \cdots + \psi_p^{(p-1)}c'_p. \end{aligned} \tag{1.25}$$

将(1.22)，(1.24)及(1.25)代入(1.21)，得

$$\begin{aligned} L(w) &= \sum_{k=1}^{p} c_k L(\psi_k) + \psi_1^{(p-1)}c'_1 + \psi_2^{(p-1)}c'_2 + \cdots + \psi_p^{(p-1)}c'_p \\ &= \psi_1^{(p-1)}c'_1 + \psi_2^{(p-1)}c'_2 + \cdots + \psi_p^{(p-1)}c'_p. \end{aligned}$$

我们又令

$$\psi_1^{(p-1)}c'_1 + \psi_2^{(p-1)}c'_2 + \cdots + \psi_p^{(p-1)}c'_p = F. \tag{1.26}$$

由等式(1.23)及(1.26)解出 $c'_k(k = 1,2,\cdots,p)$，得公式(1.19).

现在假定我们可以找到亚纯函数 $c_k(k = 1,2,\cdots,p)$ 满足式(1.19)，则由式(1.22)定义的亚纯函数 w 为方程(1.21)的一个解. 故有

$$L(f - w) = 0,$$

所以

$$f - w = \sum_{k=1}^{p} b_k\psi_k, \tag{1.27}$$

其中 $b_k(k = 1,2,\cdots,p)$ 为常数. 由公式(1.22)及(1.27)，得

$$f = \sum_{k=1}^{p} (c_k + b_k)\psi_k.$$

由于 $c_k + b_k(k = 1,2,\cdots,p)$ 亦为亚纯函数满足式(1.19)，这就得

到公式(1.18).

所以为了证明公式(1.18),我们只需证明存在亚纯函数 $c_k(k=1,2,\cdots,p)$ 满足式(1.19). 为此,令

$$g_k=(-1)^{p+k}\frac{\Phi_k}{A_0}F,\quad k=1,2,\cdots,p, \tag{1.28}$$

并将式(1.19)写为

$$c'_k=g_k,\quad k=1,2,\cdots,p. \tag{1.29}$$

设 z_0 为一点使函数 $g_k(k=1,2\cdots,p)$ 中最少有一个以 z_0 为极点. 然后设 $g_{k_j}(j=1,2,\cdots,q)$ 为函数 $g_k(k=1,2,\cdots,p)$ 中以 z_0 为极点的全部. 考虑一圆 γ: $|z-z_0|<\delta$ 使得在区域 d: $0<|z-z_0|<\delta$ 中函数 $\psi_k(k=1,2,\cdots,p)$, $1/A_0$ 及 f 为全纯. 则在 d 内, $g_k(k=1,2,\cdots,p)$ 为全纯并有

$$g_{k_j}(z)=p_j(z)+\varphi_j(z),\ p_j(z)$$

$$=\frac{\alpha_j}{z-z_0}+\cdots+\frac{\beta_j}{(z-z_0)\,m_j},\quad j=1,2,\cdots,q, \tag{1.30}$$

其中 $p_j(z)$ 为 $g_{k_j}(z)$ 在 z_0 的主要部分并且 $\varphi_j(z)$ 在 γ 为全纯. 在以下我们证明

$$\alpha_j=0,\quad j=1,2,\cdots,q. \tag{1.31}$$

事实上,考虑区域

$$d_1: 0<|z-z_0|<\delta,\quad 0<\arg(z-z_0)<2\pi \tag{1.32}$$

及在 d_1 为全纯的函数

$$\log(z-z_0)=\log|z-z_0|+i\arg(z-z_0),$$

其中 $\arg(z-z_0)$ 由式(1.32)定义. 我们有

$$\{\log(z-z_0)\}'=\frac{1}{z-z_0}.$$

由式(1.30),我们可以找到一函数 $\lambda_j(z)$ 在 d 为全纯使得在 d_1 有

$$\frac{d}{dz}\{\alpha_j\log(z-z_0)+\lambda_j(z)\}=g_{k_j}(z),\quad j=1,2,\cdots,q.$$

为了确切起见,假定 $q=3$ 且 $k_j=j\ (j=1,2,3)$, 并令

$$\Gamma_j(z) = \alpha_j \log(z - z_0) + \lambda_j(z), \quad j = 1,2,3.$$

则 $\Gamma_j(z)(j = 1,2,3)$ 在 d_1 为全纯并且

$$\Gamma'_j(z) = g_j(z), \quad j = 1,2,3.$$

另一方面，$g_j(z)(j = 4,5,\cdots,p)$ 在 γ 为全纯，故可得函数 $G_j(z)$ $(j = 4,5,\cdots,p)$ 在 γ 为全纯使

$$G'_j(z) = g_j(z), \quad j = 4,5,\cdots,p.$$

所以函数

$$w = \sum_{j=1}^{\zeta} \Gamma_j(z)\psi_j(z) + \sum_{j=4}^{p} G_j(z)\psi_j(z)$$

在 d_1 满足方程(1.21)，并且和式(1.27)的情形一样，在 d_1 有

$$w - f = \sum_{k=1}^{p} b'_k \psi_k,$$

其中 $b'_k(k = 1,2,\cdots,p)$ 为常数. 故在 d_1 有

$$(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 + \alpha_3\psi_3)\log(z - z_0) = \Psi, \tag{1.33}$$

其中 Ψ 在 d 为全纯. 式(1.33)隐含 $\alpha_j = 0(j = 1,2,3)$. 事实上，如果这是不对的，则由于 $\psi_k(k = 1,2,\cdots,p)$ 为线性无关，$\sum_{j=1}^{\zeta}\alpha_j\psi_j$ 在 d 不恒等于零. 所以有一点 $z' = z_0 + h(0 < h < \delta)$ 使

$$\zeta = \sum_{j=1}^{\zeta} \alpha_j\psi_j(z') \neq 0.$$

现在让 $z \to z'$，先保持 $\mathrm{Im}z > \mathrm{Im}z_0$，然后保持 $\mathrm{Im}z < \mathrm{Im}z_0$，我们由式(1.33)，分别得到

$$\zeta\log|z' - z_0| = \Psi(z'), \zeta(\log|z' - z_0| + 2\pi i) = \Psi(z'),$$

然后得 $\zeta 2\pi i = 0$，这是不可能的.

现在我们证明，对于固定的 k，我们可以找到一个亚纯函数 c_k 满足式(1.29). 先假定 $g_k(z)$ 有无穷个极点 $z_j(j = 0,1,2,\cdots)$ 使

$$z_0 = 0, 0 < |z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \cdots \leqslant |z_j| \leqslant |z_{j+1}| \leqslant \cdots,$$

$$\lim_{j\to+\infty} |z_j| = +\infty.$$

考虑级数

$$u(z) = U_0(z) + \sum_{j=1}^{\infty}\{U_j(z) - P_j(z)\}, \tag{1.34}$$