高等学校试用教材

高等代数

田孝贵　芮泽民　欧阳功博
华德康　刘玉森　编

高等教育出版社

高等学校试用教材

高 等 代 数

田孝贵 芮泽民 欧阳功博 华德康 刘玉森 编

高等教育出版社

(京)112号

本书是根据国家教委代数、数论编审组1984年成都会议关于改革数学专业代数课的精神，结合高师院校实际编写的。

本书的主要特点是，将通常的高等代数、抽象代数内容揉合在一起，用统一的思想和方法讲述，具有较强的科学性和系统性；正确处理抽象与具体的关系，力图做到由浅入深和深入浅出，较充分地体现了师范性。每节后面配有习题，其中多数是基本题，只有少数是较难的题。

本书可作为高等师范院校数学专业本科、专科的教材。可在一、二年级用三个学期（包含习题课，周学时5或4讲完。）也可作为教学参考书。

本书经代数、数论编审组主持的审稿会审定。

高等学校试用教材

高 等 代 数

田孝贵 芮泽民 欧阳功博 华德康 刘玉森 编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

商务印书馆上海印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 18.625 字数 448,000

1991年10月第1版 1991年10月第1次印刷

印数 0,001—2,110

ISBN7-04-003436-7/O·1055

定价 5.95元

前　言

本书是根据国家教委理科数学、力学教材编审委员会代数、数论编审组 1984 年成都会议精神，结合高师院校实际，为高师数学专业编写的教材．初稿完成经试用和修改．在代数、数论编审组 1988 年湘潭会议上进行了审议．1989 年底，在刘绍学教授主持下，有曹锡华、冯克勤教授等参加的审稿会上，对本书给予了全面而细致地修改和加工．

代数、数论编审组成都会议关于数学专业代数课改革的主要精神是：加强代数课在教学中的地位，增加代数课的学时，更新代数教材的内容，改革代数教材的体系．会议提出，将现有高等代数和抽象代数以及初等数论揉合在一起，更新内容，编出两年一贯制的代数基础课教材．本书就是根据这个精神所作的一次初步尝试．考虑到当前高师的实际情况，本书以同中学数学有紧密联系和比较具体的行列式、线性方程组、矩阵运算和二次型开始，在这个基础上引出集合、映射和运算等基本概念，然后用统一的思想和方法来讲述环和域、群以及向量空间和欧氏空间，并且将多项式理论放在环、域之后与整环的因子分解理论相结合．本书包括了高师当前通用的高等代数和抽象代数教材中的几乎所有内容．此外，增加了加群的直和、有限加群的结构和加群的自同态环等；为了突出高师的特点，还增加了有序环和数系．新增加的内容并不多，但整个教材在体系安排上有了较大的改变，近代数学的思想与方法也有所体现，并且内容也具有了一定的深度．一些更深入的部分例如模和伽罗瓦理论以及初等数论的知识，宜作为选修课的内容没有编入本书．

我们的教学实践表明，根据代数、数论编审组成都会议的精神来改革代数课的教材是完全可行的．在低年级可以开始学习群、环、域等抽象代数体系的基本知识，并且在具有了这些基本知识之后来学习线性代数的内容和多项式理论，不但更容易而且理解得更深刻；按照一贯制体系的教材进行教学，有利于培养和提高学生的逻辑思维和抽象思维能力．本书可在一、二年级用三个学期(包括习题课在内，周学时为5或4)讲授完毕．所需学时与原来讲授高等代数、抽象代数两课的学时大致相同，这是由于减少了原来两课之间的不必要重复以及重新安排教材的结果．在教学中，有极少部分例如商体系可能会出现困难．但就是在高年级学习这些内容，困难也同样会出现．对这样的部分，本书已经作了慎重处理，相信困难是可以克服的．本书中有些内容，如：有序环和数系(或数系中的最后一节)，U 空间和内积空间，多元多项式，有限加群的结构定理等，可根据具体情况不讲或粗讲．本书所附习题，大多是基本题；少数是加宽知识面或较难的题，可作为习题课的例题或习题，也可不予布置．我们希望，代数、数论编审组成都会议的精神能得到广泛响应，通过认真研究和积极改革，进一步提高高师数学专业代数课的教学质量．

本书的编写和出版，承蒙代数、数论编审组和代数界的专家、同仁的指导和支持，提出了许多宝贵意见．谨向参加上述三次编审组会议的诸位先生，特别是丁石孙、刘绍学、曹锡华、郝炳新、石生民、冯克勤、黄登航、丘维声等几位先生表示衷心的感谢．在编写过程中也参阅了中外代数教材(书名不再赘述)，谨向编者致谢，高教出版社特别是文小西先生等为本书的出版给予了极大的支持和帮助，谨致以深切的感谢．

本书由北京师范学院田孝贵、芮泽民、欧阳功博、刘玉森、华德康分章编写，并由田孝贵全面整理和修改．本书的初稿和修改稿

曾在北京师院数学系多次试用，得到了梅向明、陈家鼐教授和有关方面负责人以及代数教研室教师的大力支持和帮助.

本书的缺点和错误在所难免，希望读者指正.

1990年12月

目　　录

第一章　消元法和行列式

在中学数学中我们学过二元一次方程组和三元一次方程组，但这是很不够的. 在实际中会遇到未知量(元)个数和方程个数相当多的一次方程组，而且还会遇到未知量个数和方程个数不相同的一次方程组. 在本书的前两章中我们就来学习这种一般形式的一次方程组.

§1 消 元 法

1.1 线性方程组和消元法的基本思想

我们把一次方程叫做线性方程，一次方程组叫做线性方程组。一般线性方程组写成以下形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示 n 个未知量. (1)中共有 m 个方程. a_{ij} $(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$是第 i 个方程中未知量 x_j 的系数，$b_i(i=1, 2, \cdots, m)$是第 i 个方程的常数项，a_{ij} 和 b_i 都是已知数(a_{ij} 和 b_i 也可以是零).

线性方程组(1)可以简记作

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i,\ i=1, 2, \cdots, m.$$

所谓线性方程组(1)的一个解，是指一组数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，当未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别用 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 代入后，组(1)中的每个式

子都变成等式. 方程组(1)的一个解用$(t_1, t_2, \cdots, t_n)$表示.

在讨论线性方程组时,无论是在有理数范围内(即所涉及的数全是有理数),或者是在实数范围内,或者是在复数范围内,完全可以用同样的方法得出同样的结果. 因此,在这两章中,我们用F来表示有理数集或者实数集或者复数集. 讨论中所涉及的数全是F中的数,我们说在数集F上讨论线性方程组.

这一节我们讨论求解组(1)的方法——消元法. 消元法是中学数学中加减消元法的直接推广. 我们首先用下面的例子来分析加减消元法的基本思想.

例如,用加减消元法解方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1,\\2x_1+x_2+x_3=5,\\4x_1+x_2+2x_3=5.\end{cases}\tag{2}$$

首先消去x_1: 第二个方程减去第一个方程,第三个方程减去乘以2的第一个方程,得到

$$\begin{aligned}2x_2-2x_3&=4,\\3x_2-4x_3&=3.\end{aligned}\tag{3}$$

再消去x_2: 组(3)中第一个方程乘以$\dfrac{1}{2}$,得到

$$x_2-x_3=2.$$

由(3)的第二个方程减去乘以3的上面方程,得到

$$-x_3=-3.$$

上式乘以-1,得到

$$x_3=3.$$

将$x_3=3$代回前面的方程,便得到(2)的一个解.

在消元的过程中我们多次地运用了以下两个变换:

1) 将某个方程乘以不为零的数;

2) 将某个方程乘以数后加到另一个方程上.

这两个变换是线性方程组的同解变换,即施行变换1)或2)

后，新方程组与原方程组是同解的．加减消元法的基本思想是：施行一系列上面所说的同解变换，把所给的方程组化成最简单的形式以求其解．对于上面的例子可以按以下步骤写出完整的解法．将组(2)的第一个方程乘以 -1 加到第二个方程上，第一个方程乘以 -2 加到第三个方程上，得到

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1,\\ \quad 2x_2-2x_3=4,\\ \quad 3x_2-4x_3=3.\end{cases} \tag{4}$$

将(4)的第二个方程乘以 $\frac{1}{2}$，然后将它加到第一个方程上，再将它乘以 -3 加到第三个方程上，得到

$$\begin{cases}2x_1 \qquad +2x_3=3,\\ \quad x_2-x_3=2,\\ \qquad -x_3=-3,\end{cases} \tag{5}$$

将(5)的第三个方程乘以 -1．然后将它加到第二个方程上，再将它乘以 -2 加到第一个方程上，得到

$$\begin{cases}2x_1 \qquad =-3,\\ \quad x_2 \quad =5,\\ \qquad x_3=3.\end{cases} \tag{6}$$

将(6)的第一个方程乘以 $\frac{1}{2}$，得到

$$\begin{cases}x_1 \qquad =-\frac{3}{2},\\ \quad x_2 \quad =5,\\ \qquad x_3=3.\end{cases} \tag{7}$$

(7)已是最简单的方程组，它的解显然是 $\left(-\frac{3}{2},\ 5,\ 3\right)$．因为组(2)与组(7)同解，所以(2)的解也就求到．

对于一个方程组来说，起作用的是未知量的系数和常数项，至

于未知量用什么符号来表示是没有什么关系的；施行同解变换时，主要是对系数和常数项进行运算. 因此，我们可以略去未知量而把方程组的系数和常数项分离出来排成一个表，用这个表来代替方程组，而且运算也只对这样的表来进行. 对方程组所施行的两种同解变换反映在表上就是(表中横的叫行，纵的叫列)：

1) 将某行乘以不为零的数；

2) 将某行乘以数后加到另一行上.

对上面的例子来说，把方程组的系数和常数项排成下表

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

对这个表进行上面所说的两种变换就得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

于是便知道方程组的解是$\left(-\frac{3}{2}, 5, 3\right)$.

下面我们根据加减消元法的基本思想把以上的作法推广到一般情形.

1.2 消元法

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1}$$

定理 1.1 以下两种变换都是线性方程组的同解变换.

1）将方程组的某个方程乘以不为零的数;

2）将方程组的某个方程乘以数后加到另一个方程上.

证 只对2)来证，设将组(1)的第$s(1\leqslant s\leqslant m)$个方程乘以数$k$后加到第$i$个方程上，得到方程组

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}x_j=b_1,\\ \quad\cdots\cdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij}+ka_{sj})x_j=b_i+kb_s,\\ \quad\cdots\cdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{sj}x_j=b_s,\\ \quad\cdots\cdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{mj}x_j=b_m.\end{cases}\tag{2}$$

我们证明组(1)与组(2)同解. 设$(t_1, t_2, \cdots, t_n)$是组(1)的任意解. 那么它满足组(1)，显然已满足组(2)第i个方程以外的其它方程. 因为$(t_1, t_2, \cdots, t_n)$满足组(1)的第i个方程和第s个方程，所以

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}t_j=b_i$$

和

$$\sum_{j=1}^{n}a_{sj}t_j=b_s$$

都是等式. 又因为等式两端乘以数以及等式的和也是等式，所以

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}t_j+k\sum_{j=1}^{n}a_{sj}t_j=b_i+kb_s$$

即

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+ka_{sj})t_j=b_i+kb_s$$

是等式. 这就说明$(t_1, t_2, \cdots, t_n)$也是组(2)第i个方程的解. 我们就证明了$(t_1, t_2, \cdots, t_n)$是组(2)的解. 反之，设$(t_1, t_2, \cdots, t_n)$是组(2)的解. 由等式

$$\sum(a_{ij}+ka_{sj})t_j=b_i+kb_s$$

和等式 $$\sum_{j=1}^{n}a_{sj}t_j=b_s$$

可推出等式 $$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}t_j=b_i,$$

就可证明$(t, t_2, \cdots, t_n)$是组(1)的解. □

定义 1.1 pq 个数 $t_{ij}(i=1, 2,\cdots, p; j=1, 2,\cdots, q)$排成的表

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1q} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2q} \\ & \cdots\cdots & & \\ t_{p1} & t_{p2} & \cdots & t_{pq} \end{pmatrix}$$

叫做 p 行 q 列的矩阵，简称为 $p\times q$ 矩阵，并且简记为$(t_{ij})_{pq}$或(t_{ij}). 横的排叫做行，纵的排叫做列. 数 t_{ij} 叫做矩阵的第 i 行第 j 列的元素. 矩阵用大写字母 A, B 等表示. 如果 $p=q$, 就叫做 p 阶矩(方)阵.

定义 1.2 线性方程组(1)的系数做成的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做组(1)的**系数矩阵**,系数矩阵增添常数项列的矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

叫做组(1)的**增广矩阵**.

定义 1.3 对矩阵施行的以下三种作法叫做矩阵的行(列)的