现代数学基础丛书

线性偏微分算子引论

上 册

齐民友 编著

科学出版社

现代数学基础丛书

线性偏微分算子引论

上 册

齐民友 编著

科 学 出 版 社

1 9 8 6

内 容 简 介

本书介绍线性偏微分算子的现代理论，主要论述拟微分算子和 Fourier 积分算子理论，同时也系统地讲述了其必备的基础——广义函数理论和 Sobolev 空间理论. 本书分上、下两册. 上册着重讨论拟微分算子及其在偏微分方程经典问题 (Cauchy 问题和 Dirichlet 问题) 上的应用. 下册将主要介绍 Fourier 积分算子理论和佐藤的超函数理论.

本书可供有关专业的大学生、研究生、教师和研究工作者参考.

现代数学基础丛书

线性偏微分算子引论

上 册

齐民友 编著

责任编辑 吕 虹 张鸿林

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986 年 8 月第 一 版　　开本：850×1168 1/32

1986 年 8 月第一次印刷　　印张：17 7/8

印数：0001—3,800　　字数：472,000

统一书号：13031 · 3257

本社书号：4651 · 13—1

定价： 5.00 元

序　　言

五十年代以来，线性偏微分算子理论有了很大的发展.这当然是由于四十年代末出现的广义函数论为线性偏微分算子理论提供了一个极好的框架.可以说，它总结了以前的重大成果又为以后的发展提供了强有力的工具. 因此，无怪乎在六十年代以后，在这个领域中连续不断地出现了许多重大的成果，如拟微分算子理论、Fourier 积分算子理论、微局部分析、超函数理论等等. 大概没有什么人会怀疑，这些成果都获得了“生存权”，成为数学宝库的一个很有价值的部分了. 事实证明，它们的价值不仅在于它们将这个领域的研究大大地深化了，而且还在于它们在其它领域（微分几何、理论物理）中发挥着越来越大的作用. 但是这种情况也说明，要想跟上这个领域的发展也是一件相当困难的事. 要想在这个领域中工作，不得不有相当深厚的功力，不得不懂得越来越多的其它数学分支. 还应该指出，这个领域还在迅速发展，看不出有停下来或者是放慢步伐的迹象.例如，正当我们用了很大的力量来掌握微局部分析时，它却已被人称为“七十年代算法”(见 Fefferman [2])，而到了八十年代中期的现在，它又发展到新的水平了.这种情况对于我们曾在十多年中脱离了数学发展主流的人，是幸乎？不幸乎？

因此，想要写出一本书帮助我国读者能“跟上形势”，是作者力所不及的事. 幸好，我们有了 Hörmander 的新著 “The analysis of linear partial differential operators, I—IV”，它当然会是一部影响深远的巨著，特别是按许多同志的看法，它的第一卷是关心现代分析的读者所必备的知识. 因此，我们只能提出一个低得多的目标：对于这个领域中已经成熟的若干主要部分作一个入门的介绍. 这里说若干，是因为对许多当前十分活跃的问题就几乎没有提到.按时间说，最多也只到七十年代初期. 这本书的中心内容是拟微分

算子和 Fourier 积分算子理论. 即使如此，这还是一个超出作者能力的尝试. 如果它能引起读者对偏微分算子理论的兴趣，并且去攻读例如 Hörmander 的新著和最新的文献，那就使作者十分满意了.

这本书不少部分是研究生教材，写的时候，假定读者具有经典的偏微分方程理论、泛函分析和函数论(实的和复的)的基本知识. 书中有个别地方用到一些不太常见的结果时，只能提出出处，或者假定读者自己会去补足. 这本书分上、下册，下册的内容按作者现在的设想将是辛几何、Fourier 积分算子理论、主型算子以及如果有可能的话还有佐藤的超函数理论.

对这本书中必然存在的缺点和错误，衷心欢迎读者批评指正.

作者

1984 年 3 月 11 日

目　录

前面我们已证明了 $\mathscr{S}\subset H^\infty$，因此现在有

$$\mathscr{S}\subset H^\infty\subset \dot{B}. \tag{3.3.13}$$

这个包含关系是真包含。因为例如在 R^1 中函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\in H^\infty$ 但不在 $\mathscr{S}$ 中；函数 $f(x)=(1+x^2)^{-\frac{1}{4}}\in\dot{B}$ 但 $f(x)\notin L^2=H^0$，因此 $f(x)\notin H^\infty$。

为了进一步讨论 Rellich 定理，我们需要对 Sobolev 空间 H^s 进一步局部化。将 H^s 局部化，一是指将它限制在 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集上，这一点也可以用一个 $C_0^\infty(\Omega)$ 函数 φ 去乘它来实现，二是考虑具有紧支集的 H^s 函数。这将是我们下面讨论的主题。现在我们先讨论 H^s 上的一些运算，首先是乘子运算。

定理 3.3.8 双线性映射 $\mathscr{S}\times H^s\to H^s$，$\varphi,u\longmapsto\varphi u$ 是连续映射。

证. 利用 Peetre 不等式（定理 2.1.10）

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}(1+|\eta|^2)^{-s/2}\leqslant 2^{|s|/2}(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2},$$

对 $\widehat{\varphi u}(\xi)=(\hat\varphi*\hat u)(\xi)$ 有

$$\begin{aligned}(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{\varphi u}(\xi)&=\int(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat u(\eta)\hat\varphi(\xi-\eta)d\eta\\&=\int(1+|\xi|^2)^{s/2}(1+|\eta|^2)^{-s/2}\\&\qquad\cdot(1+|\eta|^2)^{s/2}\hat u(\eta)\hat\varphi(\xi-\eta)d\eta\\&\leqslant 2^{|s|/2}\int(1+|\eta|^2)^{s/2}\hat u(\eta)\\&\qquad\cdot(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2}\hat\varphi(\xi-\eta)d\eta.\end{aligned}$$

因此，由 Hausdorff-Young 不等式得

$$\begin{aligned}\left(\int|(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{\varphi u}(\xi)|^2d\xi\right)^2&\leqslant C\int(1+|\eta|^2)^s|\hat u(\eta)|^2d\eta\\&\quad\cdot\int(1+|\eta^2|)^{s/2}|\hat\varphi(\eta)|d\eta\end{aligned}$$

即有 $\varphi u\in H_s$ 而且

$$\|\varphi u\|_s\leqslant C\|u\|_s\int(1+|\eta|^2)^{s/2}|\hat\varphi(\eta)|d\eta,$$

故定理得证.

我们还可以将磨光与截断这两种运算在 H^s 中的作用表述为以下定理，其中 $J_\varepsilon(x)$ 是我们常用的磨光核，$\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 是一个截断函数，而且在 $x=0$ 附近恒为 1，$\chi_\varepsilon(x)=\chi(\varepsilon x)$. 于是有

定理 3.3.9 当 $\varepsilon \to 0$ 时 $J_\varepsilon * u$ 和 $\chi_\varepsilon u$ 均在 H^s 中趋于 u，这里 $u \in H^s$.

证. 很容易看到 $\hat{J}_\varepsilon(\xi)=\hat{J}_1(\varepsilon\xi)$，从而 $(\widehat{J_\varepsilon * u})(\xi)=\hat{J}_1(\varepsilon\xi)\cdot\hat{u}(\xi)$. 因此

$$\|J_\varepsilon * u-u\|_s^2=(2\pi)^{-n}\int(1+|\xi|^2)^s|\hat{J}_1(\varepsilon\xi)-1|^2|\hat{u}(\xi)|^2d\xi.$$

因为当 $\varepsilon \to 0$ 时 $\hat{J}_1(\varepsilon\xi) \to \hat{J}_1(0)=1$，而且

$$|\hat{J}_1(\varepsilon\xi)-1| \leqslant |\hat{J}_1(\varepsilon\xi)|+1 \leqslant \int J_1(x)dx+1=2,$$

因此由 Lebesgue 控制收敛定理即得 $\|J_\varepsilon * u-u\|_s \to 0$. 至于 $\chi_\varepsilon u$ 则由上一个定理

$$\begin{aligned}\|\chi_\varepsilon u\|_s &\leqslant C^n\int(1+|\xi|^2)^{|s|/2}|\hat{\chi}_\varepsilon(\xi)|d\xi\cdot\|u\|_s\\ &=C\int(1+|\varepsilon\eta|^2)^{|s|/2}|\hat{\chi}(\eta)|d\eta\cdot\|u\|_s\\ &\leqslant C_1\|u\|_s.\end{aligned}$$

这里 C_1 与 ε 无关. 现在取 $\varphi \in \mathscr{D}$ 使 $\|u-\varphi\|<\eta$，则因为当 ε 充分小时，在 $\operatorname{supp}\varphi$ 上 $\chi_\varepsilon \equiv 1$，故有

$$\begin{aligned}\|\chi_\varepsilon u-u\|_s &= \|\chi_\varepsilon(u-\varphi)-(u-\varphi)\|_s\\ &\leqslant (C_1+1)\|u-\varphi\|_s<(C_1+1)\eta \to 0.\end{aligned}$$

现在可以证明 Rellich 定理了. 但在我们的情况下，它并不是关于 H^s 的定理（在定理 3.2.11 中我们假设了 Ω 是有界的），而是关于

$$H_K^s=\{u;\ u \in H^s,\ \operatorname{supp}u \subset K,\ K\text{ 为一紧集}\} \tag{3.3.14}$$

的定理.

定理 3.3.10 (Rellich 定理) 设 $s_2 > s_1$，K是 $\mathbf{R}^n$ 的紧子集，则嵌入映射 $H_K^{s_2} \hookrightarrow H_K^{s_1}$ 是紧的.

证. 设 $\{u_j\}$ 是 $H_K^{s_2}$ 中的有界序列，例如设 $\|u_j\|_{s_2} \leqslant 1$，只需证明它在 $H_K^{s_1}$ 中有收敛子序列即可. 为此取 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 而且在K附近 $\varphi \equiv 1$，则 $\varphi u_j = u_j$，而 $\hat{u}_j = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{u}_j$，$D^\alpha \hat{u}_j = (2\pi)^{-n} D^\alpha \hat{\varphi} * \hat{u}_j$. 仿照定理 3.3.8 的证明有

$$(1 + |\xi|^2)^{s_2/2} |D^\alpha \hat{u}_j| \leqslant C(\Phi * v_j)(\xi),$$

这里

$$\Phi(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s_2/2} |D^\alpha \hat{\varphi}(\xi)|,$$

$$v_j(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s_2/2} |\hat{u}_j(\xi)|.$$

应用 Schwarz 不等式即有

$$(1 + |\xi|^2)^{s_2/2} |D^\alpha \hat{u}_j| \leqslant C \|\Phi\|_{s_2} \|u_j\|_{s_2}.$$

由于 $(1 + |\xi|^2)^{s_2/2}$ 在ξ空间的任一紧子集上有正的下界，所以，应用此式于$\alpha = 0$ 的情况即得 $\{\hat{u}_j\}$ 在ξ的任一紧子集上一致有界；应于此式于 $|\alpha| = 1$ 的情况即得 $\{D\hat{u}_j\}$ 在ξ空间的任一紧子集上一致有界. 因此，应用 Ascoli 定理即知，选定ξ空间的任一紧子集（例如 $|\xi| \leqslant R$，R充分大将在以下决定）后，从 $\{\hat{u}_j\}$ 中总可以找到一个一致收敛的子序列. 不妨假设这个子序列就是 $\{\hat{u}_j\}$. 现在我们要证明 $\{u_j\}$ 在 H^{s_1} 中收敛. 为此，给定 ε.

$$\|u_j - u_k\|_{s_1}^2 = (2\pi)^{-n} \int (1 + |\xi|^2)^{s_1} |\hat{u}_j(\xi) - \hat{u}_k(\xi)|^2 d\xi$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{|\xi|>R} + (2\pi)^{-n} \int_{|\xi|<R}$$

$$= I_1 + I_2.$$

在 I_1 中，我们有

$$I_1 = (2\pi)^{-n} \int_{|\xi|>R} (1 + |\xi|^2)^{s_1 - s_2} (1 + |\xi|^2)^{s_2}$$

$$\cdot |\hat{u}_j(\xi) - \hat{u}_k(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leqslant (1 + R^2)^{s_1 - s_2} (2\pi)^{-n} \int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^{s_2}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot |\hat{u}_j(\xi) - \hat{u}_k(\xi)|^2 d\xi \\
&= (1 + R^2)^{s_1 - s_2} \|u_j - u_k\|_{s_2}^2 \\
&\leqslant 4(1 + R^2)^{s_1 - s_2} < \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}
$$

只要R充分大即可．这样确定了R后再看I_2，因为在ξ空间的紧子集$|\xi| \leqslant R$上$\{\hat{u}_j\}$一致收敛，所以可以在积分号下取极限而知当$i, k \geqslant K(\varepsilon)$时$I_2 < \varepsilon/2$．总之，当$i, k \geqslant K(\varepsilon)$时

$$\|u_j - u_k\|_{s_1}^2 < \varepsilon.$$

因为H^{s_1}是完备的，所以$\{u_j\}$收敛于H^{s_1}中的一个元，这个元的支集当然仍在K内．证毕．

在不同的H^s范数之间还有一个重要的不等式，这就是

定理 3.3.11 设$s_2 > s > s_1$，则对任一$\varepsilon > 0$，必存在常数$C_\varepsilon > 0$，使得对一切$u \in H^{s_2}$均有

$$\|u\|_s^2 \leqslant \varepsilon \|u\|_{s_2}^2 + C_\varepsilon \|u\|_{s_1}^2. \tag{3.3.15}$$

证．因$H^{s_2} \subset H^s \subset H^{s_1}$，所以$u \in H^{s_2}$必在$H^s$和$H^{s_1}$中．因此，为证上式，只需证明对于$\xi \in \mathbf{R}^n$有

$$(1 + |\xi|^2)^s \leqslant \varepsilon(1 + |\xi|^2)^{s_2} + C_\varepsilon(1 + |\xi|^2)^{s_1}$$

即可．事实上，我们只需令$C_\varepsilon = \varepsilon^{-(s-s_1)/(s_2-s)}$，因为记$\rho = 1 + |\xi|^2$，上式依次化为等价的不等式

$$
\begin{aligned}
&\rho^s \leqslant \varepsilon\rho^{s_2} + C_\varepsilon \rho^{s_1}, \quad \text{或} \\
&1 \leqslant \varepsilon\rho^{s_2 - s} + \varepsilon^{-(s-s_1)/(s_2-s)} \rho^{s_1 - s}, \quad \text{或} \\
&1 \leqslant (\lambda\rho)^{s_2 - s} + (\lambda\rho)^{s_1 - s}, \quad \lambda = \varepsilon^{1/s_2 - s}.
\end{aligned}
$$

当$\lambda\rho \geqslant 1$时，第一项即≥ 1；当$\lambda\rho < 1$时第二项$\geqslant 1$．

4. Sobolev 空间的局部化 H^s_{loc} 与 H^s_{comp}．

定义 3.3.12 令$\Omega \subset \mathbf{R}^n$是一个开集，$H^s_{\text{loc}}(\Omega)$即使得对一切$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$均有$\varphi u \in H^s$的$\mathscr{D}'(\Omega)$广义函数之集．在$H^s_{\text{loc}}(\Omega)$上可以赋以一族半范$u \longmapsto \|\varphi u\|_s$，$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$．

定理 3.3.13 $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$是一个 Fréchet 空间，它可以连续嵌入在$\mathscr{D}'(\Omega)$内．对$H^s_{\text{loc}}(\Omega)$，Sobolev 嵌入定理也成立；即当$s >$

$n/2+k$ 时 $H^s_{loc}(\Omega)\subset C^k(\Omega)$. 因此，$\bigcap\limits_s H^s_{loc}(\Omega)=C^\infty(\Omega)$. 具有在$\Omega$上为 C^∞ 系数的m阶线性偏微分算子 $P(D)$: $H^s_{loc}(\Omega)\to H^{s-m}_{loc}(\Omega)$ 是连续映射.

证. 为证 $H^s_{loc}(\Omega)$ 是 Fréchet 空间，先需证明只要用可数多个定义如上的半范即可决定其拓扑. 为此，取Ω之一串上升的穷竭紧子集序列$\{K_j\}$，并作一串 $\varphi_j\in C_0^\infty(\Omega)$，使 $\varphi_j\equiv 1$ 于K_j附近. 今证半范族 $\{\|\varphi_j u\|_s\}$ 即可决定 $H^s_{loc}(\Omega)$ 的拓扑结构. 实际上，任给 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，必有 j 充分大使 $\operatorname{supp}\varphi\subset K_j$，因此 $\varphi=\varphi\varphi_j$，而由定理 3.3.8 有

$$\|\varphi u\|_s=\|\varphi\varphi_j u\|_s\leqslant C\|\varphi_j u\|_s.$$

因此，$H^s_{loc}(\Omega)$ 中零元素之邻域 $\{u:\ \|\varphi u\|_s<\varepsilon\}$ 中包含了邻域 $\left\{u;\ \|\varphi_j u\|<\dfrac{\varepsilon}{C}\right\}$. 再证 $H^s_{loc}(\Omega)$ 的完备性. 设 $\{u_j\}$ 是其中的一个 Cauchy 序列，则任取 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，$\{\varphi u_j\}$ 是H^s中的 Cauchy 序列，因而在其中有极限 u_φ，$u_\varphi\in\mathscr{D}'$. 从而u_j在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中也有极限 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 而且对任意 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，$\varphi u=u_\varphi$. 从而$u\in H^s_{loc}(\Omega)$ 而且是 $\{u_j\}$ 的极限.

关于嵌入定理，因为连续性是一个局部性质，故对任一 $x_0\in\Omega$，取 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 使 $\varphi(x_0)\neq 0$，则对 φu 应用 Sobolev 嵌入定理可得 φu 在 x_0 连续，从而 u 在 x_0 连续. 这样可得 $\bigcap\limits_s H^s_{loc}(\Omega)\subset C^\infty(\Omega)$. 相反的包含关系是自明的：对任意 $u\in C^\infty(\Omega)$，$\varphi u\in\mathscr{D}\subset H^s$ $(\forall s\in\mathbf{R})$. 定理的其余部分是自然的.

$H^s_{loc}(\Omega)$ 具有层的性质. 若 $U\subset\Omega$ 为一开集，则限制映射显然是由 $H^s_{loc}(\Omega)$到 $H^s_{loc}(U)$的连续映射. 若$u\in H^s_{loc}(\Omega)$ 在Ω之各个开子集上之限制均为 0，则必有 $u=0$；若 $\{U_\alpha\}$是Ω的开覆盖而且有 $u_\alpha\in H^s_{loc}(U_\alpha)$使当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$ 时$u_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta}=u_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}$，则必存在一个 $u\in H^s_{loc}(\Omega)$ 使 $u|_{U_\alpha}=u_\alpha$. 所有这一切都可以从广义函数的层性质得出.

Sobolev 空间的另外一种局部化是 H^s_{comp}. 前面我们已介绍过

H_K^s（见(3.3.14)），现在有

定义 3.3.14 $H^s_{\text{comp}}(\Omega)=\bigcup_K H^s_K=H^s_{\text{loc}}(\Omega)\cap\mathscr{E}'(\Omega)$. 这里 $\bigcup_K$ 表示对 Ω 的一切紧子集 K 求并. 对它赋以 H_K^s 之拓扑的归纳极限拓扑.

定理 3.3.15 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ 及 $H^s_{\text{comp}}(\Omega)$ 中均稠密. 嵌入映射 $C^\infty(\Omega)\to H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ 和 $C_0^\infty(\Omega)\to H^s_{\text{comp}}(\Omega)$ 均为连续. $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ 与 $H^s_{\text{comp}}(\Omega)$ 的对偶空间分别是 $H^{-s}_{\text{comp}}(\Omega)$ 和 $H^{-s}_{\text{loc}}(\Omega)$.

证. 嵌入映射的连续性可以直接由嵌入映射 $\mathscr{D}\to H^s$ 的连续性得出. 现证稠密性.

作 Ω 的一个上升的穷竭的紧子集序列 $\{K_j\}$ 以及相应的 $\varphi_j\in C_0^\infty(\Omega)$ 使 φ_j 在 K_j 附近 $\equiv 1$. J_ε 则为磨光算子序列. 于是很明显在 $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ 中 $(u\in H^s_{\text{loc}}(\Omega))$ $\varphi_j u\to u$ 而在 H^s 中 $J_\varepsilon*(\varphi_j u)\to(\varphi_j u)$，因此 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$中稠密(当 ε 充分小时，$J_\varepsilon*(\varphi_j u)\in C_0^\infty(\Omega)$). 同样对 $u\in H^s_{\text{comp}}(\Omega)$. 可以证明 $J_\varepsilon*u\to u$ 于 $H^s_{\text{comp}}(\Omega)$ 中.

现在定义 $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ 与 $H^{-s}_{\text{comp}}(\Omega)$ 的一个 Hermite 配对：取 $(u,v)\in H^s_{\text{loc}}(\Omega)\times H^{-s}_{\text{comp}}(\Omega)$ 并作实值函数 $\chi\in C_0^\infty(\Omega)$ 使在 $\operatorname{supp}v$ 附近 $\chi\equiv 1$，于是定义 $(u,v)=(\chi u,v)$，右方为 H^s 与 H^{-s} 的 Hermite 配对. 很容易看到，若 v 固定，则上式与 χ 的选取无关，而且对 $u\in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ 是连续的. 同样，它对 v 也是于 $H^s_{\text{comp}}(\Omega)$ 中连续的. 反过来，设 l 是 $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$上的连续线性泛函，记它在 u 上之值为 $l(u)$，因为 $C^\infty(\Omega)$ 可连续嵌入在 $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ 中，$l(u)$ 也是 $C^\infty(\Omega)$ 上的连续线性泛函. 因此，一定有一个 $v\in\mathscr{E}'(\Omega)$ 使 $l(u)=\langle u,\bar v\rangle=(u,v)$. 取实值的 $\chi\in C_0^\infty(\Omega)$ 而且在 $\operatorname{supp}v$ 附近 $\chi\equiv 1$，则 $(u,v)=(\chi u,v)$. 若取 $u\in H^s$，上式也是连续泛函，因而 $v\in H^{-s}$. 前面已证 $v\in\mathscr{E}'(\Omega)$，所以 $v\in H^{-s}\cap\mathscr{E}'(\Omega)=H^{-s}_{\text{comp}}(\Omega)$，即 $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ 上的连续线性泛函均可用 $H^{-s}_{\text{comp}}(\Omega)$ 上之元表示. 所以 $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ 的对偶空间是 $H^{-s}_{\text{comp}}(\Omega)$. 再则，设 l 为 $H^s_{\text{comp}}(\Omega)$ 上之共轭线性连续泛函，它在

$v \in H^s_{\text{comp}}(\Omega)$ 上之值记作 $l(v)$. 因为 $C_0^\infty(\Omega) \subset H^s_{\text{comp}}(\Omega)$, 因此 l 也是 $C_0^\infty(\Omega)$ 上的共轭线性连续泛函,从而存在一个 $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ 使 $l(v) = \langle u, \bar{v} \rangle = (u, v)$. 令实值的 $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, 则 $(\chi u, v) = l(\chi v)$. 对于 $v \in H^s$, $\chi v \in H^s_{\text{comp}}(\Omega)$, 而且上式是 H^s 上的共轭线性连续泛函, 因此 $u \in H^{-s}_{\text{loc}}(\Omega)$. 这就是说 $H^s_{\text{comp}}(\Omega)$ 的对偶空间是 $H^{-s}_{\text{loc}}(\Omega)$. 证毕.

5. 微分流形上的 Sobolev 空间。在以下我们有时需要讨论流形上的 Sobolev 空间. 例如在讨论椭圆型边值问题时, 就需要在 $\partial\Omega$ 上讨论 Sobolev 空间 (迹定理). 以下都设M是 C^∞ 微分流形,而且在无穷远处是可数的, 因此其上有一的 C^∞ 分割存在. 为了讨论M上的 Sobolev 空间,需要对 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 作出一个新的刻划, 引入一个等价的范数——不妨称为内蕴范数.

定理 3.3.16 设 $0 < s < 1$, 则

$$H^s = \left\{u \in L^2(\mathbf{R}^n);\ \iint\limits_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dxdy < +\infty\right\} \tag{3.3.16}$$

而且在 H^s 中可以赋以等价的范数

$$\|u\|'_s = \left(\|u\|^2_{L^2} + \iint\limits_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dxdy\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3.17}$$

证. 设 $u \in L^2(\mathbf{R}^n)$, 则对 $y \in \mathbf{R}^n$ 有

$$\int_{\mathbf{R}^n} |u(x + y) - u(x)|^2 dx = (2\pi)^{-n} \int |\hat{u}(\xi)|^2 |e^{iy\cdot\xi} - 1|^2 d\xi.$$

因此

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} \frac{|u(x + y) - u(x)|^2}{|y|^{n+2s}} dxdy = (2\pi)^{-n} \cdot \int_{\mathbf{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \int_{\mathbf{R}^n} |e^{iy\cdot\xi} - 1|^2 |y|^{-n-2s} dy.$$

现在在右方作一个旋转变换

$$y = Az, \quad |\det A| = 1,$$

则 $y \cdot \xi = Az \cdot \xi = z \cdot {}^tA\xi$. 适当选取$A$可以使 ${}^tA\xi = (\eta_1, 0, \cdots, 0)$, 这里 $|\eta_1| = |{}^tA\xi| = |\xi|$. 于是

$$\int_{\mathbf{R}^n} |e^{iy\cdot\xi}-1||y|^{-n-2s}dy=\int_{\mathbf{R}^n} |e^{ix_1\eta_1}-1|^2|x|^{-n-2s}dx.$$

令 $\eta_1 x = w$，则上之积分等于

$$|\eta_1|^{2s}\int_{\mathbf{R}^n} |e^{iw_1}-1|^2|w|^{-n-2s}dw = C|\xi|^{2s},\ C>0.$$

这里的积分是收敛的，因为在 $|w|\to 0$ 时 $|e^{iw_1}-1|^2 = O(|w|^2)$，$w_1$ 表示向量 w 的第一个分量．利用 Plancherel 定理：$\|u\|_{L^2}^2=(2\pi)^{-n}\int|\hat{u}(\xi)|^2d\xi$，代入 (3.3.17) 有

$$\|u\|_s'^2=(2\pi)^{-n}\int|\hat{u}(\xi)|^2(1+C|\xi|^{2s})d\xi.$$

由此明显地可以看到 $\|u\|_s'$ 与 $\|u\|_s$ 等价．

对于一般的 $s>0$，记 $s=m+\sigma$，$0\leqslant\sigma<1$，则有

系 3.3.17 对 $s=m+\sigma>0$，$0\leqslant\sigma<1$，我们有

$$H^s=\Big\{u\in L^2(\mathbf{R}^n);\ D^\alpha u\in L^2(\mathbf{R}^n),\ |\alpha|\leqslant m \text{ 且}$$

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n}\frac{|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\sigma}}dxdy<+\infty\ \ |\alpha|=m\Big\},\tag{3.3.18}$$

并且可以定义与 $\|u\|_s$ 等价的范数

$$\|u\|_s'=\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha u\|_{L^2}^2$$

$$+\sum_{|\alpha|\leqslant m}\iint\limits_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n}\frac{|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\sigma}}dxdy\Big)^{\frac{1}{2}}\tag{3.3.19}$$

对于 $s<0$，则利用 H^{-s} 与 H^s 的对偶性，对于 $u\in H^{-s}$，定义

$$\|u\|_{-s}'=\sup_{v\in H^s}\frac{|(u,v)|}{\|v\|_s'}.\tag{3.3.20}$$

采用内蕴范数的一个优点是可以更简单地证明 $H_{\mathrm{loc}}^s(\Omega)$ 在微分同胚下的不变性，而这是在微分流形上定义 Sobolev 空间的必要准备步骤．

设 Ω，Ω' 均为 $\mathbf{R}^n$ 的开子集，$\chi:\Omega\to\Omega'$ 是一个微分同胚．设 $v\in\mathscr{D}'(\Omega')$，则在第一章 § 6 中定义了 v 在 χ 下的拉回 $\chi^*v\in$

$\mathscr{D}'(\Omega)$ 是由下式定义的广义函数(见式(1.6.2))

$$(\chi^* v, \varphi) = (v, J(\chi^{-1})^* \varphi),$$

$$\varphi \in \mathscr{D}(\Omega_1), \quad J = \left| \det \frac{\partial x}{\partial y} \right|.$$

现在我们要把这个关系用到 $v \in H^s$ 上去,为此先需要

定理 3.3.18 令 $K' \Subset \Omega'$, $s \in \mathbf{R}$, 则必存在一个常数 $C(s, K')$ 使对一切 $u \in H^s_K(\Omega')$, 有 $\chi^* u = u \circ \chi \in H^s_K(\Omega)$ $K = \chi^{-1} K'$ 而且

$$\|\chi^* u\|'_s \leqslant C(s, K') \|u\|'_s. \tag{3.3.21}$$

证. 证明将分成几步进行. 先设 $u \in C_0^\infty(K')$. 再作一个紧集 K'_1, 使 $K' \Subset K'_1 \Subset \Omega'$, 则对上述 u, 其拉回 $\chi^* u$ 显然仍在 H^s 中. 在证明了(3.3.21)以后利用 $C_0^\infty(K'_1)$ 在 H^s_{comp} 中的稠密性即可对 $u \in H^s_K(\Omega')$ 证明式(3.3.21).

(1) $0 < s < 1$. 首先有 $\chi^* u \in L^2(\mathbf{R}^n)$; 同时,若以 x', y' 表示 Ω' 中的点: x, y 表示 Ω 中的点, 则当 $x' = \chi(x)$, $y' = \chi(y)$ 时,有

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} \frac{|\chi^* u(x) - \chi^* u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy$$

$$= \iint \frac{|u(x') - u(y')|^2}{|x' - y'|^{n+2s}} F(x, y;\ x', y') dx' dy'.$$

其中 $F \equiv (|x' - y'|/|x - y|)^{n+2s} |J(x) J(y)|$. $J = \det \dfrac{\partial \chi}{\partial x}$. 很容易看到 F 是有界的,因此,由 $u(x') \in H^s$ 即有

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} \frac{|\chi^* u(x) - \chi^* u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy < +\infty,$$

而且容易得知(3.3.21)成立. 因为 χ 是微分同胚所以 $\operatorname{supp} \chi^* u \subset K$, $u \in H^s_K(\Omega)$.

(2) s 为非负整数. 上述结论对于 $u \in C_0^\infty(K')$ 可以利用链法则来证明. $s > 0$ 的一般情况可以由(1), (2)两款综合起来即得.

(3) $s < 0$. 我们有