函数论丛书（二）

可微函数与偏微分方程

丁夏畦

湖北科学技术出版社

函 数 论 丛 书（二）

可微函数与偏微分方程

丁 夏 畦

湖 北 科 学 技 术 出 版 社

1 9 8 3

可微函数与偏微分方程

丁 夏 畦

湖北科学技术出版社出版 湖北省新华书店发行
沔阳县印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 8.625印张 182,500字
1983年9月第1版 1983年9月第1次印刷
印数：1—4,100

统一书号：13304.4 定价：1.35元

目　　录

前　言

这本小册子是想介绍一些可微函数的近代发展，同时着重谈一下作者个人在这方面的一些初步尝试性的工作。

可微函数是数学中最基本的概念之一，是从牛顿、赖布尼兹起发明微积分时就研究的主题。随着科学的进步，研究一天天深入，也一天天扩大。联系到复数域就形成了解析函数论的庞大分支，联系到几何学就引起了微分几何学的辉煌发展，特别是和近代的实变函数论和泛函分析结合在一起，就形成了近代的可微函数理论，包括广义函数论和 *Sobolev* 空间论，对近代数学的许多分支诸如微分方程，计算数学，微分几何和多个复变函数论，*Fourier* 分析理论等等，都有着广泛的应用。

自从本世纪三十年代*S.L.Sobolev*，*K.O.Friedrichs*，*S.Bochner*等人从不同角度引进了广义导数的概念。到一九五〇年*L.Schwarz* 引进分布论以后，许多数学特别是偏微分方程和*Fourier*分析引起了更大的发展，偏微分方程的许多重要成就，诸如 *L.Hörmarder* 的一般算子理论，与 *Fourier* 积分算子论，*L.Nirenberg* 等人引入的拟微分算子论，及 *O.A.Ладжженская*等人关于拟线性椭圆型和抛物型方程的工作等等都是与广义函数和*Sobolev* 空间等关系很密切的。

Sobolev 空间是一种可微函数空间，它的进一步研究，

又产生了许多新的可微函数空间。

在偏微分方程和计算数学的研究中，经常要用到的函数空间，有 Lebesgue 类L_p，Соболев 空间 W_p^l，Бесов 空间 B_p^l等，对于这些空间的研究，是属于函数论和泛函分析的范畴。许多作者例如 A.P. Calderon，E.M. Stein，J.Löfström 等用 Fourier 积分来研究，С.М.Никольский 用函数逼近论来研究，J.L.Lions用插值空间来研究，此外还有E.Gogliardo，陆文端，L.Nirenberg等人用初等方法来研究。至于这些空间和其有关的性质的应用，那牵涉到的面就极为广阔，难以详述。本小册子主要是局限于作者的工作和知识的范围之内，要了解全貌的读者，可参阅〔19〕，〔22〕，〔35〕，〔53〕，〔18〕。

本小册子所涉及的基本可微函数空间有如下一些：

Ⅰ．若干基本可微函数空间

1．Соболев 空间

嵌入定理的研究，肇始于 Соболев，他提出了如下的函数空间W_p^l：

设$\dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}=\dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$为一微分算子，其总的阶数$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$。设我们给了$E_n$中两个局部可积函数$f$，$g$，我们说$\dfrac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}=g$，当

$$\int_{E_n} f(x)\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}dx=(-1)^{|\alpha|}\int_{E_n} g(x)\varphi(x)dx,$$

对于所有$\varphi\in C_0^\infty$，如果对任何整数l，有性质$f\in L_p(E_n)$，且

$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \in L_p(E_n)$，$|\alpha| \leqslant l$，则称 $f \in W_p^l$，且

$$\|f\|_{W_p^l} = \sum_{|\alpha| \leq l} \left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \right\|_p .$$

对于 *Соболев* 空间，主要有如下的嵌入定理：

(i) 如果$n<lp$，则W_p^l嵌入C。

(ii) 如果$n>lp$，则W_p^l嵌入L_q，$1 \leqslant q \leqslant \frac{np}{n-lp}$。

(iii) $W_p^l(E_n) \to$定义在E_{n-1}上的某种意义下的$\left(l-\frac{1}{p}\right)$阶可微函数空间. 这第三条及其反定理通称为迹定理，我们可以看出这条定理要求定出分数阶的可微函数空间.

(iv) $n=lp$，则W_p^l嵌入L_Φ，$\Phi = u^p e^{u^p}$。

2．*Bessel* 场位

Bessel 场位是W_p^l的一种自然推广，它可以包括 l 为任意正实数的情形。由于W_2^l经过*Fourier*变换变为D_2^l，即

$$\tilde{\varphi}(\alpha) = (1+|\alpha|^2)^{l/2}\tilde{f}(\alpha) \in L_2,$$

$$\therefore \quad \tilde{f}(\alpha) = (1+|\alpha|^2)^{-l/2}\tilde{\varphi}(\alpha).$$

$$\therefore \quad f(x) = \int_{E_n} G_l(x-t)\varphi(t)dt.$$

其中 $G_l(x) = \widetilde{\frac{1}{(1+|\alpha|^2)^{l/2}}}$

这就给出了W_2^l中函数$f(x)$的一个表达式，其中$\varphi(t) \in L_2$. 由这个表达式把 l 拓展到一般正实数，就得到一种分数阶W_p^l，称之为*Bessel*场位，记为L_p^l。它也具有 *Соболев* 空间

的许多性质，在 l 为整数时，它与W_p^l重合。至于L_p^l的嵌入定理，(i)，(ii)均成立，但对(iii) 还需要引进新的分数阶空间。

3. *Никольский* 空间

在椭圆型偏微分方程的*Schauder* 估计中，必须用到 $C^{(l)}$ 空间，$0<l<1$，即

$$\|f\|_C+\sup_{|t|>0}\frac{|f(x+t)-f(x)|}{|t|^l}<\infty,$$

如果我们把上述绝对值换为L_p模，就得到*Никольский*空间H_p^l，即

$$\|f\|_{L_p}+\sup_{|t|>0}\frac{\|f(x+t)-f(x)\|_{L_p}}{|t|^l}<\infty, 0<l<1,$$

而上述和就定义为H_p^l的范数。

高阶的H_p^l，可如下定义，令 $l=\bar{l}+\lambda$，$\bar{l}$ 为整数，$0<\lambda<1$，

$$\|f\|_{L_p}+\sup_{|t|>0}\frac{\|D^{\bar{l}}f(x+t)-D^{\bar{l}}f(x)\|_{L_p}}{|t|^\lambda}<\infty.$$

如果 $\lambda=1$，则H_p^l应如下定义：

$$\|f\|_{L_p}+\sup_{|t|>0}\frac{\|D^{\bar{l}}f(x+t)-2D^{\bar{l}}f(x)+D^{\bar{l}}f(x-t)\|_{L_p}}{|t|^\lambda}$$

$<\infty$,

对于这样的空间，上述(i)，(ii)，(iii)均成立，且(iii)的反定理亦成立。*C.M. Никольский* 在他的工作中，广泛地应用了函数逼近论，主要建立了如下的不等式。

对于n个复变量z_1, …, z_n分别为ν_1, …, ν_n阶的指数

型整函数 $g_{\nu_1,\cdots,\nu_n}(z_1,\ \cdots,\ z_n)$，$z_k=x_k+iy_k$，$(1\leqslant p\leqslant p'<\infty,\ 1\leqslant m\leqslant n)$，有

$$\left\|\frac{\partial g_{\nu_1,\cdots\nu_n}}{\partial x_i}\right\|_{L_p(E_n)}\leqslant\nu_i\|g_{\nu_1,\cdots,\nu_n}\|_{L_p(E_n)},$$

$$\|g_{\nu_1,\cdots,\nu_n}\|_{L_{p'}}\leqslant 2^n\left(\prod_1^n\nu_k\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}\|g_{\nu_1,\cdots,\nu_n}\|_{L_p}.$$

$$\|g_{\nu_1,\cdots,\nu_n}\|_{L_p(E_n)}\leqslant 2^n\left(\prod_{m+1}^n\nu_k\right)^{\frac{1}{p}}\|g_{\nu_1,\cdots\nu_n}\|_{L_p(E_m)}.$$

如果令

$$w_k(f,\ te_i)=\sup_{|h|\leqslant t}\|\Delta^k(f,\ he_i)\|L_{p'}$$

$$E_{\nu_1,\cdots,\nu_n}(f)_p=\inf_g\|f-g_{\nu_1,\cdots,\nu_n}\|_{L_p}$$

则有

$$E_{\nu_1,\cdots,\nu_n}(f)_p\leqslant C\sum_{i=1}^n\nu_i^{-s}\ w_{j\,i}\left(\frac{\partial^s f}{\partial x_i^s},\ \nu_i^{-1}e_i\right)_p,$$

С.М.Никольский 利用这些性质，深入地研究了空间 H_p^l。

4． *Бесов* 空间

Слободецкий 提到另一种分数阶空间 W_p^l，$f\in L_p$，且

$$\int_{E_n}\int_{E_n}\frac{|D^{\bar l}f(x)-D^{\bar l}f(y)|^p}{|x-y|^{n+p\lambda}}dxdy<\infty,$$

О.В.*Бесов* 为了把 H_p^l 和这里的 W_p^l 统一起来，提出了另一种分数阶空间 $B_{p,q}^l$，即 $f\in L_p$，

$$\int_{E_n}\frac{\|\Delta_h^2 D^{\bar l}f(x)\|_{L_p}^q}{h^{h+q\lambda}}dh<\infty,$$

他仍然用函数逼近论来研究这个空间，得到了(i)，(ii)，(iii)型的嵌入定理。

由于$B_{p,q}^{l}$在应用上的方便，所以引起了许多人从不同的角度研究，如Löfström从Fourier积分乘子角度，J.L.Lions从插值空间论的角度，П.И.Лизоркин，E.M.Stein从椭圆型方程Poisson公式的角度分别研究了$B_{p,q}^{l}$，V.Thome'e在偏微分方程差分法上得到了应用。〔32〕

II．推广

1．不等距的情形

上面列举的W_p^l，L_p^l，H_p^l，$B_{p,q}^{l}$，其中l都为一实数，均可推广至l为向量$\vec{l}=(l_1,\cdots,l_n)$的情形，如$W_p^{\vec{l}}$是指不考虑混合导数，单纯考虑$\frac{\partial^{l_i}f}{\partial x_i^{l_i}}\in L_p$的情形，其它空间$L_p^{\vec{l}}$，$H_p^{\vec{l}}$，$B_{p,q}^{\vec{l}}$均可类似定义。

这种空间在研究抛物型方程的边值初值问题时是需要的，对于它们，也可得出类似于(i)，(ii)，(iii)的嵌入定理。

1965年〔5〕我们对不等距的Bessel场位，$L_p^{\vec{l}}(E_n)$，最早给出了嵌入定理，包括极限指数的情形，比苏联П.И.Лизоркин给出的早，而方法较简洁。我们只是用了一个初等算术中值和几何中值不等式，而他们估计广义Bessel场位的核

$$G_{\vec{l}}(x)=\frac{\tilde{1}}{\sum_{i=1}^{n}(1+|\alpha_i|^2)^{l_i/2}}.$$

2．带权的情形

如果把上述空间中的L_p换为带权 $L_{p,\alpha}$，即 $x_n^{\alpha}f\in L_p$ 时，就可得到各种带权的空间$W_{p,\alpha}^{l}$，$L_{p,\alpha}^{l}$，$H_{p,\alpha}^{l}$，$B_{p,q,\alpha}^{l}$，而这种空间在研究奇性椭圆型方程（或退缩椭圆型方程）例如：

$$\Delta u+\frac{\alpha}{y}u_y=0,$$

时就需要。

1965年$Osman\ Kraja$[43]研究了带权的$Bessel$场位

$$F(x)=\int_{E_n}G_l(x-t)\frac{\varphi(t)}{|t_n|^{\lambda}}dt,\ \varphi(t)\in L_p,$$

得到了许多嵌入定理和在带奇线方程上的应用。

当我们研究上述带权的 $Bessel$ 场位时，我们要用到 $Hardy$-$Littlewood$不等式；当$f,g>0$时，p，q，h，k适合适当关系时，有

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{x^k y^k|x-y|^{\lambda-h-k}}dxdy\leqslant K\left(\int_0^{\infty}f^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\infty}g^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

我们对这不等式证明中的不当之处，进行了改正，并推广至高维的情形。

3．$Orlicz$ 空间

如果我们把上述空间中的L_p换为 $Orlicz$ 空间L_{φ}时，就得到对应的各种$Orlicz$可微函数空间W_{φ}^{l}，L_{φ}^{l}，H_{φ}^{l}，B_{φ}^{l}等，这种空间在研究强非线性椭圆型方程，例如

$$\Delta u=e^{u}$$

时就需要。

另外$N.S.Trudinger$对于经典的Соболев嵌入定理得到一个重要的补充，即当 $n=lp$ 时，则$W_p^l \hookrightarrow L$，其中$\Phi(u)=u^p.u^{p'}$。

我们在〔26〕中引进了一类特殊的$Orlicz$ 空间$L_p(\phi)$。设 $\phi(z)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m z^m$为一非负系数的整函数，如果存在 $\alpha>0$，

使 $$\int_\Omega \phi(\alpha|u|^p)d\alpha=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\alpha^m\|u\|_{mp}^{mp}<\infty,$$

则称 $u\in L_p(\phi;\ \Omega)$，如果上式右端为α的整函数，则称$u\in E_p(\phi;\ \Omega)$，把上面的各种可微函数空间的 L_p 换为$L_p(\phi;\ \Omega)$，就得到许多新的函数空间，这种空间的研究，主要建立在 L_p 的精确估计和整函数的系数估计上，这种空间的嵌入定理 (i)，(ii) 型的推广，都不足言，而(iii)型的迹定理则能完满推广之。

在第一章中，我们还引进了比$Orlicz$空间更广泛的一类函数空间，即所谓$BL_p(\phi)$空间，设 $B=\{B_1,\ \cdots,\ B_m,\ \cdots\}$为一串$Banach$函数空间，如果存在$\alpha>0$，使

$$I(f,\ \alpha)=\Sigma a_m\alpha^m(\|f\|_{B_m})^{mp}<\infty,$$

则称 $f\in BL_p(\phi;\ \Omega)$，如果上式右端为α的整函数，则称$f\in BE_p(\phi;\Omega)$。$BL_p(\phi;\Omega)$ 和 $BE_p(\phi;\ \Omega)$具有 $Orlicz$空间的许多类似性质。简记$BL_1(\phi,\Omega)\equiv Ba, BE_1(\phi,\Omega)\equiv aB$

Ⅱ. 应用

在应用中，我们需要建立如下的引理。

引理 对任何$p>1$，$f\in L_p$，算子T为$(p,\ p)$型，且

$$\|Tf\|_p\leqslant Kp^\lambda\|f\|_p,$$

则T必为$L_p(\phi)\to L_p(\psi)$的有界算子，其中

$$\phi=\sum_{m=1}^{\infty}a_m z^m,\quad \psi=\sum_{m=1}^{\infty}b_m z^m,$$

$$0\leqslant b_m m^{\lambda mp}\leqslant a_m,\ \text{均为整函数，且}$$

$$\|Tf\|_{L_p(\phi)}\leqslant Kp^{\lambda}\|f\|_{L_p(\phi)},$$

$$\text{此处}\ \|f\|_{L_p(\phi)}=\inf_{\substack{\int_\Omega\phi(\alpha|f|^p)dx<1\\ \alpha>0}}\left\{\left(\frac{1}{d}\right)^{1/p}\right\}$$

如果ϕ为ρ级β型，则ψ之级$\leqslant\dfrac{\rho}{1+\lambda p\rho}$，如果$\psi$之级恰为$\rho_1=\dfrac{\rho}{1+\rho\lambda p}$，则其型$\beta_1$必适合

$$(e\beta_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}}\leqslant(e\beta\rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

应用上述引理，可得出许多积分算子的$L_p(\phi)$估计，例如，对于*Calderon-Zygmund*奇异积分算子T，就可得到

$$\|Tf\|_{L_p(\phi)}\leqslant Ap\|f\|_{L_p(\phi)}.$$

应用上述引理，结合L_p估计，就可得到许多嵌入定理，微分方程，差分方程的新的先验估计和误差估计。

上面所述是这本小册子的第一，二，三章的内容。

这本小册子的第四章，第五章是在$L_p(\phi)$空间中研究*Hilbert*的第十九问题和第二十问题。第四章实际上是解决了*О.А.Ладыженская*在其名著[46]中提出的一个问题，第五章中讨论了解的可微性，这类结果就作者所知，是在本小册子中首次进行研究的。

第六章讨论嵌入定理在数论上的应用。

在本书的编写和出版过程中，得到了我的老师李国平教授的大力支持，鼓励，指导，并承列入他所主编的丛书中，作者衷心感谢。

第一章　基本空间

§ 1　*Lebesgue* 类

在本节我们将不加证明地引述一些 *Lebesgue* 类 $L_p(\Omega)$ 的基本性质，这些性质是大家所熟知的。为了以后的应用，我们把它们叙述在这里。

1．设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为定义在可测集 $\Omega\subset E_n$ 上的一可和函数序列，$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)\leqslant\cdots$，几乎处处成立，而

$$\int_\Omega f_1(x)dx>-\infty,$$

则

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\qquad p.p.$$

存在，且

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty}f_k(x)dx=\int_\Omega f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_k(x)dx.\quad(1.1)$$

2．$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 为定义在可测集 $\Omega\subset E_n$ 上的可和函数序列，如果 $f_k(x)\longrightarrow f(x)$ $p.p.$，且 $f_k(x)$ 具同等绝对连续积分，即对任何 $\varepsilon>0$，总有 $\delta(\varepsilon)$，使对任何可测集 Ω_δ，当 $\mathrm{mes}\Omega_\delta<\delta(\varepsilon)$ 时，就有

$$\int_{\Omega_\delta}|f_k(x)|dx<\varepsilon,\qquad \forall k,$$

则

$$\int_\Omega|f_k-f|dx\longrightarrow 0.\qquad(1.2)$$

3. 控制收敛定理。

当 $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 几乎处处收敛于$f_0(x)$,

$$|f_k(x)|\leqslant\Psi(x), \qquad \forall k,$$

而 $\Psi(x)$可和,

则必 $f_0(x)$可和，且

$$\int_{\Omega}f_0dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}f_k(x)dx. \tag{1.3}$$

4. $Fubini$定理（略）。

如果一可测函数f，$|f|^p$在Ω上可和，则称$f(x)\in\mathscr{L}_p(\Omega)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\mathscr{L}_p(\Omega)$称为$Lebesgue$类，$\left(\int_{\Omega}|f|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}=\|f\|_p$称为$f$的$L_p$范数。

5. $H\ddot{o}lder$不等式。

设 $f\in\mathscr{L}_p(\Omega), g\in\mathscr{L}_{p'}(\Omega), p>1, p'>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, 则 $f\cdot g\in\mathscr{L}_1(\Omega)$，且

$$\left|\int_{\Omega}f(x)g(x)dx\right|\leqslant\|f\|_p\cdot\|g\|_{p'}. \tag{1.4}$$

6. $Minkowski$不等式。

如果 f, $g\in\mathscr{L}_p(\Omega)$，且$1\leqslant p<\infty$，则

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p. \tag{1.5}$$

§2 $Orlicz$类，$Orlicz$空间

当$u>0$时，设$p(u)$为连续单增正函数，$p(0)=0$, $p(\infty)=\infty$，$q(v)$为其反函数。令$\Phi(u)=\int_0^u p(u)du$, $\Psi(v)=\int_0^v q(v)dv$，则我们有Young's不等式，

$$u\cdot v\leqslant\Phi(|u|)+\Psi(|v|)。\tag{2.1}$$

对于任何开集Ω，如果$\Phi(|f|)$可和，则称 f属于Orlicz类$\mathscr{L}_\Phi(\Omega)$，如果存在正数$a>0$，使$\Phi(a|f|)$可和，则称f属于Orlicz 空间$L_\Phi(\Omega)$。如果对所有的 $a>0$，$\Phi(a|f|)$可和，则称$f\in$Orlicz空间$E_\Phi(\Omega)$。关于Orlicz空间的基本性质，可参阅〔44〕。

a.Δ_2条件，如果当$u>u_0$时，$\Phi(2u)\leqslant k\Phi(u)$，则称$\Phi(u)$满足$\Delta_2$条件。如果$\Phi(u)$满足$\Delta_2$条件，则当$u>u_0$时，必有

$$\Phi(u)\leqslant Cu^\lambda。\tag{2.2}$$

即$\Phi(u)$的增长不超过某一幂函数。

事实上，$k\Phi(u)\geqslant\Phi(2u)=\int_0^{2u}p(t)dt>\int_u^{2u}p(t)dt$
$\geqslant up(u)$，

$$\therefore\int_{u_0}^{u}\frac{p(t)}{\Phi(t)}dt\leqslant\int_{u_0}^{u}\frac{k}{t}dt=k\lg\frac{u}{u_0}。$$

即当$u\geqslant u_0$时，

$$\Phi(u)<\frac{\Phi(u_0)}{u_0^k}u^k。\tag{2.3}$$

b.$\Phi(u)$满足Δ_2条件的充要条件是存在$l>1$和$v_0>0$，使

$$\Psi(v)\leqslant\frac{1}{2L}\Psi(lv)。\qquad(v\geqslant v_0)。〔见44〕$$

c.如果 $\Phi(u)=\varphi(u^p)$，其中

$$\varphi(u)=\sum_{m=}^{\infty}a_mu^m,\qquad a_m\geqslant0,$$

为非负系数的整函数，则我们记$L_\Phi(\Omega)$，$E_\Phi(\Omega)$，$\mathscr{L}_\Phi(\Omega)$为$L_p(\phi;\Omega)$，$E_p(\phi;\Omega)$，$\mathscr{L}_p(\phi,\Omega)$。

由上段所述Δ_2-条件之判别法，知$\phi(u^p)$之余函数必满