天元研究生数学丛书

复半单李代数引论

孟道骥 编著

北京大学出版社

天元研究生数学丛书

复半单李代数引论

孟道骥 编著

北京大学出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据 DV70,5

复半单李代数引论/孟道骥编著. —北京:北京大学出版社,1998.1

(天元研究生数学丛书)

ISBN 7-301-03450-4

Ⅰ.复… Ⅱ.孟… Ⅲ.李代数-概论-高等学校-教材

Ⅳ.0152.5

书　　名:复半单李代数引论(天元研究生数学丛书)
著作责任者:孟道骥　编著
责任编辑:刘　勇
标准书号:ISBN 7-301-03450-4/O·397
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　话:出版部 62752015　发行部 62559712　编辑部 62752032
排　印　者:北京大学印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
850mm×1168mm　32 开本　10.75 印张　270 千字
1998 年 1 月第一版　　1998 年 1 月第一次印刷
印　　数:0001—2,000 册
定　　价:18.00 元

《天元研究生数学丛书》书目

（标△号者表示待出版）

1.	复变函数论选讲	张南岳等编著
2.	近代分析引论	苏维宜编著
3.	高等概率论	程士宏编著
4.	复半单李代数引论	孟道骥编著
5.	群表示论	曹锡华等编著
6.	模形式讲义 △	陆洪文等编著

《天元研究生数学丛书》编委会

内 容 简 介

李群、李代数理论，从其产生至今已有非常巨大的发展，并与理论物理等学科有密切联系，现已成为数学中不可或缺的分支，被称为李理论.复半单李代数是李理论中最基础、最重要的部分，同时也是最完善、最完美的部分.本书全面系统地论述复半单李代数的基本理论.全书共分七章.内容包括：李代数的基本概念，李代数半单性、幂零性、可解性的判别准则，复半单李代数的结构、存在性、分类、有限维表示以及例外单李代数等.

本书叙述深入浅出，循序渐进，宜于教学，有丰富的例子说明抽象的理论，有适量习题培养学生能力.全书紧紧以复半单李代数为中心，将其完美的理论和最精彩的内容展现给读者，同时联系于主题，还介绍了它与实半单李代数、代数群、模李代数、Kac-Moody 代数、完备李代数等众多分支的联系，以及渗透于这些领域的研究成果.这为读者进一步学习李理论打下了良好的基础，也使读者很容易进入研究前沿.

本书可作为综合大学数学系高年级大学生、研究生复半单李代数课的教材，也可供理论物理及相关专业的研究生、科技工作者阅读.

前　言

我国实行学位制度以来，研究生教育有了很大的发展。人们逐渐认识到：拓宽研究生的知识面是时代发展的需要。许多数学硕士点和博士点都要求在研究生阶段设立专业基础课程，使得不同专业、不同专题方向的研究生能对本专题以外的重要的、带基础性的近代发展也有所了解。

开设这类研究生专业基础课程的教材，当然是要介绍该方面的基本概念和基本方法。但在涉及近代的发展上不应过于专门，要照顾到各个不同分支的需要；也不能过于拘泥在技术细节上的推导，而是要在总体上、思想方法上给读者对该学科的主要内容有一个清晰的了解。因此在编写这类教材时，在深与广、精与粗、全貌与专题等方面要掌握适度才能使大多数来自不同专题方向的学生受益。

国内过去出版的大量为本科生编写的教材，因其没有反映近代的内容，不能满足需要；就是许多为研究生编写的教材，因其过分专门而不适用。可喜的是最近几年，出现了一批经过一段教学实践检验后符合上述要求的研究生专业基础课讲义。出版《天元研究生数学丛书》就是为了推动这类教材的编写，促进我国数学研究生培养水平的提高，希望得到数学界同仁们共同的关心和支持。

张恭庆

1995 年 3 月于北京

序　言

中国第一个李群讨论班是由陈省身、华罗庚教授等在西南联大执教时主持的. 从那以后，李群与李代数的教学与研究在中国逐步发展起来了. 但是发展速度似乎太慢了. 至今开设李群与李代数课程的学校仍寥寥无几. 而在数学发达的国家(如美国)，李群与李代数已是很普遍的研究生课程. 这是因为李代数及李群与现在数学的许多分支密切相关，在现代物理学等其他学科中的应用也愈益广泛而深刻. 李代数，尤其是半单李代数，已经成为现代数学乃至物理学(例如理论物理等)学者的必备基础. 因而数学研究生了解、掌握这门课程的基本理论是十分必要的了.

笔者从事李代数的教学与科研等工作已有十余年了，深切感受到进一步发展我国李代数的教学是将我国建成数学大国不可或缺的一环. 因而，在多次为南开大学数学系的大学生、研究生及南开数学所的研究生讲授李代数及相关课程(如李群，Kac-Moody代数等)，为南开数学所举办的代数几何年讲授李代数课程的过程中，先后两次编写了李代数讲义(1985 年，1989 年). 但我仍觉得应该将所编讲义修改补充得更好. 于是在 1990 年至 1991 年访美期间也安排了时间来做这项工作. 最终在加州大学伯克利分校的 Evans Hall 917室——陈省身教授的办公室内完成了本书的初稿. 为此，笔者特别感谢陈省身教授的热情关怀与帮助，同时也深切感谢资助本人访美的王宽诚教育基金会.

沈光宇教授及许多专家、学者对初稿提出了宝贵的意见. 笔者根据这些金玉良言又对初稿进行了修改，才成为现在的样子. 笔者由衷地感谢他们!

当然，要用这样一本小册子来论述李代数的全部理论(至今仍

在快速发展)是不可能的.笔者只是希望将初学者引入李代数理论中最基本、最重要也是最完善的部分——复半单李代数的结构、存在、分类及其有限维表示.本书分成七章来叙述这些问题.

第一章介绍李代数及其表示的基本概念、基本性质以及许多重要的李代数的例子.这些重要的李代数包括典型单李代数,也包括在习题中出现的 Heisenberg 代数,Virasoro 代数及 loop 代数等.一则它们是抽象理论的原型,二则它们有广泛而重要的用途,与许多学科密切相关,因而希望读者不要仅仅把它们作为例子来看.

第二章最终是建立半单李代数的判别准则.为达此目的,我们首先介绍了可解李代数与幂零李代数. Engel 定理与 Lie 定理是极重要的两个定理.这两个定理的证明对初学者或许不太容易.初学者了解这两个定理本身的意义及其在后面内容中的作用是至关紧要的,对定理的证明可逐渐领会.我们在这章还引进了 Cartan 子代数这个关键概念.用 Cartan 子代数就可建立可解李代数、幂零李代数及半单李代数的判别准则.当然,Cartan 子代数的作用不仅仅限于建立这些准则,它对描写复半单李代数的结构有举足轻重的作用.

前两章虽然用以描述复半单李代数的笔墨不多,但这些都是为建立复半单李代数理论的必要准备.我们还要指出两点.第一,可解李代数与幂零李代数本身也为许多数学家所关注并有许多发展.限于我们的目的,对这方面我们没有展开.第二,Killing 型非退化在许多书中,尤其是在李群,微分几何的书中,已被作为复(实)半单李代数的定义.采用这种定义可以较快进入结构等理论的研究.

第三章论述复半单李代数根系,从而刻画其结构.复半单李代数由复单李代数组合而成,而复单李代数由它的根系完全决定.而根系的结构归结为其中的素根系,素根系又由它的 Dynkin 图决定.因而复单李代数的结构由九种极简单的 Dynkin 图所描绘.数

学的奇妙艺术性在这里有了极好的表现. Dynkin 图不仅用来描绘复单李代数的结构,现在也可以用来描绘实单李代数,Kac-Moody 代数以及一些别的数学结构.

第四章论述复半单李代数的存在性,即证明对应九个 Dynkin 图中的每个图都存在相应的有限维复单李代数. 这章是由三个板块组成. 第一个板块是复半单李代数的 Weyl 群. Weyl 群不仅在存在性中起着重要作用,在分类理论与表示理论中也起着重要作用. 现在 Weyl 群的理论已经不仅限于复半单李代数这种情形了,它已经有了很大的发展. 第二个板块是一般李代数的通用包络代数. 通用包络代数建立了李代数与结合代数的关系,这是讨论一般李代数的重要手段. 第三个板块是自由李代数. 任何李代数都是自由李代数的商代数,单李代数也不例外. 从这种观点来证明九种单李代数的存在性是较为抽象的. 但正因为其抽象,故可以统一证明,无须一个个验证;并有很大的普遍性. 例如,对应某种 Dynkin 图的 Kac-Moody 代数的存在性也可以用这种方法来证明. 因而,我们放眼于今后进一步的发展,采用这种抽象的,有普遍性的方法是值得的.

第五章讨论复半单李代数的分类问题. 当然,这个问题归结为复单李代数的分类问题. 本章证明了两个复单李代数同构的充分必要条件是它们有相同的 Dynkin 图. 为了证明分类定理,首先需要证明 Cartan 子代数的共轭性. 证明 Cartan 子代数的共轭性有两种方法. 一是用李群、微分几何的方法. 这种方法虽然显得简单,但必须以李群、微分几何为基础,其实也并不简单. 而且,这样的证明也难以推广. 第二种方法是纯代数的方法. 这种方法首先证明可解李代数的 Cartan 子代数的共轭性,再证明复半单李代数的 Borel 子代数的共轭性,从而得到 Cartan 子代数的共轭性. 与 Borel 子代数密切相关的是抛物子代数. 复半单李代数的抛物子代数、Borel 子代数在齐性空间理论中有重要的作用. 不仅如此,而且近来发现它们在 Building 理论中也起重要作用. 因而我们也顺便

给出了抛物子代数的结构.

复半单李代数中有两组很重要的基——Weyl 基与 Chevalley 基. 从 Weyl 基出发可以构造出紧致李代数继而紧致李群，再决定实半单李代数与实半单李群，从而在 Riemann 对称空间等理论中起关键作用. 所以 Weyl 基是通向微分几何的桥梁. 而 Chevalley 基则是通向代数群、有限群(特别是李型单群)等的桥梁. 可惜，由于篇幅所限，我们只能将读者领至桥边.

本章最后讨论了复半单李代数的自同构群. 这个群与 Weyl 群的关系极密切，与 Dynkin 图的图自同构群的关系也极密切.

第六章论述复半单李代数的有限维表示理论. 主要是有限维表示的完全可约性，不可约表示同构的充分必要条件为其最高权相同，最高权为支配整线性函数，不可约表示的特征标、重数公式等重要公式. 对应于每个支配整线性函数，对应的不可约表示存在这一事实的证明我们也采用较为抽象的诱导表示，Verma 模的方法. 其优点是，这种方法在其他数学结构(如李群、有限群、Kac-Moody 代数，顶点算子代数等)中也是行之有效的. 这样做，有助于我们以后收到触类旁通之效.

李群、李代数和群论能够应用于许多数学分支与其他学科，在某种意义上可以说就是它们的表示理论的应用. 所谓表示就是将抽象的李代数(李群、群等)中元素具体化为线性空间的线性变换. 本章的最后，将表示理论用于研究李代数本身，获得了重要的 Levi 分解. 这是一个应用表示论的很好的例子.

至此，关于复半单李代数及其有限维表示的结构、存在与分类的一幅美好和谐的画卷已展现在我们眼前. 但若仔细玩味，就会感到有点美中不足之处：对例外单李代数，除 G_2 在习题中有所触及外，所知实在太少！当然，我们不必单纯去追求理论的完美. 但近来发现的例外单李代数的用途越来越多了. 譬如，一种与 E_8 密切相关的顶点算子代数可用以研究最大阶的散在单群——魔群. 为此，我们在最后一章讨论复半单李代数的实现，主要是例外单李代数

G_2，F_4 与 E_8 的实现. 而 E_6，E_7 都是 E_8 的子代数. 希望这里的讨论不致于被认为是画蛇添足之笔.

本书作为数学系研究生基础课或大学生选修课教材可供一学年用. 如果只讲一学期，则可讲第一、二、三章与五章，但在讲第五章之前，应先讲第四章中与 Weyl 群有关的部分. 另一种选择是前三章，Weyl 群与第六章. 后一种选择对于应用李代数于其他数学分支或其他学科者也许更合适一些. 当然，本书也可作为有关学科，如理论物理等学科的参考书.

虽然，笔者花了许多精力于此书，但鉴于笔者悟性甚低，并无补天之才，且又囿于小小天地，难免孤陋寡闻，因而期待也预料将有许多有识之君会赐教于笔者. 笔者预先感谢诸君

笔者还要感谢《天元研究生数学丛书》编委会的热忱支持，国家自然科学基金委员会的资助及北京大学出版社尤其是刘勇先生的辛勤劳动.

作　者

1995 年 2 月于南开大学

目　录

第一章　基本概念

本章主要介绍李代数理论的最基本概念和一些重要的李代数. 这些重要的李代数有许多方面的应用,所以不能仅仅把它们作为例子来看待.

设 A 是域 F 上的一个 $m\times n$ 矩阵. 我们以后经常使用下面一些符号: $\mathrm{ent}_{ij}A$ 表示 A 的第 i 行,第 j 列的元素; row_iA 表示 A 的第 i 行; col_jA 表示 A 的第 j 列. 若 $m=n$,即 A 是域 F 上的 n 阶方阵,则用 $\det A$ 表示 A 的行列式; $\mathrm{tr}A$ 表示 A 的迹,即

$$\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{ent}_{ii}A.$$

我们以 id_S 表示集合 S 的恒等映射.

§1　李　代　数

定义 1.1.1　设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的线性空间,且 $\mathfrak{g}$ 中有二元运算 $(x,y)\to[x,y]$(通常称为**换位运算**或**括积**)满足下列三个条件:

1) 此二元运算是双线性的;

2) $[x,x]=0$, $\forall x\in\mathfrak{g}$;

3) $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$, $\forall x,y,z\in\mathfrak{g}$.

则称 $\mathfrak{g}$ 为域 F 上的**李代数**(Lie algebra).

定义 1.1.1 中条件 3)称为 **Jacobi 恒等式**.

一个李代数 $\mathfrak{g}$ 的维数即 $\mathfrak{g}$ 作为线性空间的维数 $\dim\mathfrak{g}$.

显然,如果域 F 的特征 $\mathrm{ch}F\neq 2$,则定义 1.1.1 中条件 2)等价于

2′) $[x,y]=-[y,x]$, $\forall x,y\in\mathfrak{g}$,即二元运算是反对称的. 此

时，二元运算只要对一个变量是线性的，自然就是双线性的了.

定义 1.1.1 中条件 3)与下列条件等价：

3′) $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$, $\forall x,y,z\in\mathfrak{g}$;

3″) $[x,[y,z]]=[[x,y],z]+[y,[x,z]]$, $\forall x,y,z\in\mathfrak{g}$;

3‴) $[[y,z],x]=[[y,x],z]+[y,[z,x]]$, $\forall x,y,z\in\mathfrak{g}$.

结合代数是代数学中另一类重要的代数结构. 其定义如下：

定义 1.1.2 设 $\mathfrak{a}$ 是域 F 上的线性空间，又是一个环，环的加法与线性空间的加法一致，而且满足

$$\lambda(ab)=(\lambda a)\cdot b=a\cdot(\lambda b),\quad \forall\lambda\in F,a,b\in\mathfrak{a},\tag{1}$$

则称 $\mathfrak{a}$ 是 F 上的**结合代数**，常简称为**代数**.

如果结合代数 $\mathfrak{a}$ 作为环是交换的，则称 $\mathfrak{a}$ 为**交换的结合代数**.

域 F 上的 n 阶方阵的集合对通常的运算构成结合代数，域 F 上的 n 元多项式的集合对通常的运算构成交换的结合代数，等等，结合代数的例子不胜枚举.

结合代数与李代数间有密切的关系，下面定理是这种关系表现之一.

定理 1.1.1 设 $\mathfrak{a}$ 为域 F 上的结合代数，在 $\mathfrak{a}$ 中定义括积运算如下：

$$[a,b]=ab-ba,\quad \forall a,b\in\mathfrak{a},\tag{2}$$

则 $\mathfrak{a}$ 对于这个括积与线性空间结构，构成 F 上的李代数.

证 显然由(2)有

$$[a,a]=0,\quad \forall a\in\mathfrak{a}.$$

又设 $\lambda_1,\lambda_2\in F;a_1,a_2,b\in\mathfrak{a}$. 于是

$$[\lambda_1a_1+\lambda_2a_2,b]=(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2)b-b(\lambda_1a_1+\lambda_2b_2).$$

由(1)与(2)知

$$[\lambda_1a_1+\lambda_2a_2,b]=\lambda_1[a_1,b]+\lambda_2[a_2,b].$$

最后，设 $a_1,a_2,a_3\in\mathfrak{a}$，于是不难算出

$$[a_1,[a_2,a_3]]=a_1a_2a_3-a_1a_3a_2-a_2a_3a_1+a_3a_2a_1,$$

$$[a_2,[a_3,a_1]]=a_2a_3a_1-a_2a_1a_3-a_3a_1a_2+a_1a_3a_2,$$

$$[a_3,[a_1,a_2]]=a_3a_1a_2-a_3a_2a_1-a_1a_2a_3+a_2a_1a_3,$$

故 $$[a_1,[a_2,a_3]]+[a_2,[a_3,a_1]]+[a_3,[a_1,a_2]]=0.$$

因而,$\mathfrak{a}$ 是一个李代数. ▌

今后,对结合代数 $\mathfrak{a}$,总可以用上述括积将 $\mathfrak{a}$ 视为李代数. 反过来的问题是:是否任何一个李代数都可以用这种方法构造出来? 回答是肯定的. 我们将在第四章中论述这个答案.

现在,我们还回到李代数的讨论上来. 先看几个简单的例子.

例 1.1.1 以 $\mathrm{gl}(n,F)$ 表示域 F 上所有 n 阶方阵的集合. 对通常的运算 $\mathrm{gl}(n,F)$ 为结合代数,于是也是李代数,其括积为

$$[A,B]=AB-BA,\quad \forall A,B\in \mathrm{gl}(n,F).$$

$\mathrm{gl}(n,F)$ 是 F 上 n^2 维李代数,称为**一般线性李代数**. 为方便起见,我们仍用 $\mathrm{gl}(n,F)$①表示域 F 上 n 阶方阵的李代数.

例 1.1.2 令

$$sl(n,F)=\{A\in \mathrm{gl}(n,F)\mid \mathrm{tr}A=0\},$$

则对于例 1.1.1 中的换位运算,$sl(n,F)$ 是 n^2-1 维李代数,称为**特殊线性李代数**.

例 1.1.3 以 $\mathrm{gl}(V)$ 表示线性空间 V 的所有线性变换的集合. 熟知 $\mathrm{gl}(V)$ 是一个线性空间. 在 $\mathrm{gl}(V)$ 中定义换位运算为

$$[\mathscr{A},\mathscr{B}]=\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A},\quad \forall \mathscr{A},\mathscr{B}\in \mathrm{gl}(V).$$

容易证明 $\mathrm{gl}(V)$ 是一个李代数,亦称为**一般线性李代数**.

例 1.1.4 设 $\mathfrak{m}=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in \boldsymbol{R}^n \mid |x_i|<\varepsilon\}$,其中 $\boldsymbol{R}$ 为实数域,$\varepsilon\in \boldsymbol{R}$,$\varepsilon>0$. 以 $C^\omega(\mathfrak{m})$ 表示定义在 $\mathfrak{m}$ 上的实解析函数的集合. 显然,$C^\omega(\mathfrak{m})$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的无限维线性空间. 令

$$\mathscr{D}(\mathfrak{m})=\left\{L=\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\,\middle|\,\mu_i(x)\in C^\omega(\mathfrak{m})\right\}.$$

---

① 以后 $\mathrm{gl}(n,F)$ 既表示域 F 上 n 阶方阵的集合,也表示其李代数. 其他如 $\mathrm{gl}(V)$, $sl(n,F)$, $sl(V)$, $so(n)$, $so(V)$, $sp(n,F)$, $sp(V)$, $u(n)$, $u(V)$, $\mathfrak{b}(n,F)$, $\mathscr{D}(\mathfrak{m})$, $\mathfrak{t}(n,F)$, $\mathfrak{n}(n,F)$ 等类似既表示相应的集合,也表示其相应的李代数.