

微积分概念史

〔美〕卡尔·B·波耶 著

上海人民出版社

Carl B. Boyer

THE CONCEPTS OF THE CALCULUS

A Critical and Historical Discussion
of the Derivative and the Integral
Hafner Publishing Company 1949
根据哈夫纳出版公司 1949 年版译出

微 积 分 概 念 史

对导数与积分的历史性的评论

〔美〕卡尔·B·波耶 著

上海师范大学数学系翻译组译

上海人民出版社出版

(上海绍兴路5号)

新华书店上海发行所发行 上海群众印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 11.875 字数 227,000

1977年9月第1版 1977年9月第1次印刷

统一书号: 13171·171 定价: 0.94 元

内 部 发 行

译 者 的 话

本书于 1939 年初版问世, 作者 C·B·波耶当时是美国布鲁克林学院数学副教授。这本书对西方数学界有相当的影响。1949 年第二次印刷时, 西方数学分析权威 R·柯朗为它写了前言, 认为它对弄清微积分概念的逐步发展, 作出了重要贡献, 对数学教学的改革将产生强烈的影响。

本书旁征博引, 史料较丰富, 对研究数学发展史有一定的参考价值。但对书中的一些基本观点, 我们的看法是不同的。例如作者声称“数学既不是对自然界的描述, 也不是对自然界的作用的解释, ……它仅仅是可能关系的符号逻辑, 因而跟近似真理和绝对真理都无关, 而只与前提的真理有关。……数学所判定的是从给定的前提可以逻辑地得出的结论”, 还强调“数学是一种公设体系, 它既独立于感性经验世界, 又独立于任何由内省所得的规则。只要符合内部一致性的要求, 微积分就可以自由地采用自己的前提, 自由地构成自己的定义。”这些都是数学唯心主义观点的露骨的表白。数学本身的发展表明, 任何一个有意义的数学公理体系, 都不是完全脱离客观物质世界的产物。恰恰相反, 它来源于物质世界, 是从人们的感性经验中提炼和概括出来的。高度抽

象的数学理论，来源于非常现实的客观物质世界。

作者的观点还包含许多混杂的、前后矛盾的地方。有时，由于历史的事实，他也不得不承认数学中有些概念起源于感觉经验，如导数和定积分的形成。但他竭力歪曲和贬低唯物论的认识论，说什么“唯物论者不同意给予数学它的正常发展所必要的对于经验的独立性”。其实，对于什么是支配微积分概念发展的原因这个根本的问题，他是无法回答的。只有马克思主义的辩证唯物论，才能对这个问题作出科学的回答。恩格斯指出：“和所有其他的思维领域一样，从现实中抽象出来的规律，在一定的发展阶段上就和现实世界相脱离，并且作为某种好似独立的东西，好似从外面来的、而世界必须与之相适应的规律，以同现实世界相对立”，但是这“只能表面地掩盖它的来自现实世界的根源”。（《反杜林论》第39页）人类的社会实践是数学的源泉，也是推动数学发展的根本动力。

此外，作者在数学发展的问题上，只承认继承的作用，而不承认从量变到质变的观点等，也都是违反科学发展的辩证法的。

在数学史的研究中，从来就存在着两种世界观的斗争。本书的作者是资产阶级学者，他宣扬这些错误观点是不足为奇的。我们对他的著作，要批判地阅读。

本书由李锐夫、周克希、魏宗舒、凌康源、周彭年等同志翻译，程其襄、应制夷、朱水林和复旦大学全增嘏等同志校阅。原书脚注只选译一部分，索引略去未译。

上海师范大学数学系翻译组

1977年3月

前 言

微积分学,或者数学分析,是人类思维的伟大成果之一。它处于自然科学与人文科学之间的地位,使它成为高等教育的一种特别有效的工具。遗憾的是,微积分的教学方法有时流于机械,不能体现出这门学科乃是一种撼人心灵的智力奋斗的结晶;这种奋斗已经历了两千五百多年之久,它深深扎根于人类活动的许多领域,并且,只要人们认识自己和认识自然的努力一日不止,这种奋斗就将继续不已。凡要真正懂得科学的力量和全貌的教师、学生或学者,对这门知识的现状是历史发展的结果这一点,都必须有所了解。事实上,在科学的教学法中对教条主义的抵制,已引起对科学史日益增长的兴趣。近几十年来,对于一般科学,特别对于数学,在探索它们的历史根源方面,取得了成绩斐然的进步。

本书有幸得以再版,它对弄清微积分概念自古至今如何逐步发展起来这一点,作出了重要的贡献;并且,它对这个引人入胜的内容,作了前后呼应、流畅易读的叙述。本书,数学教师都应人手一册;这样必将对数学教学的健康改革产生强烈的影响。

纽约大学研究院数学系主任

R·柯朗

序 言

约在十年前，哥伦比亚大学的弗雷德里克·巴里教授对我谈起，迄今还没有一本令人满意的微积分史。当时我因有其它任务，准备也不充分，没有能把这一建议付诸实行。但我通过近年来的一些研究，更进一步证实了他的看法。确实，关于微积分的起源以及有关的内容，材料并不缺乏，本书附录的参考书目就是一个明证。我们所急需的，是对这门学科的基本观念的由来——从古代的发祥直到最后用每个学过现代数学分析原理的学生所熟悉的精确概念作出的表达——给以令人满意的、带有评论性的阐述。著者目前的工作就是试图在某种程度上弥补这种不足之处。对基础微积分的整个历史的权威性的、综合性的论述，固然很有需要；但这种抱负很大的计划是远远超出本书的范围和宗旨之外的。这本书不是一本面面俱到的微积分史，而是关于基础概念发展的一个带有启发性的纲要。这样做，对学数学的学生和研究思想史方面的学者，应该都是不无裨益的。因此，我的目的始终是力求解释清楚，而不是罗列一大堆无所不包、杂乱烦琐的细节，也不是炫耀锱铢必较的渊博。这样，就必须对这些材料作出恰如其分的选择和表达，使之保持思想的连贯性，而又不致牺牲历史的准确性和观点。

书末附有为数可观的书目，包括所有正文中曾加引用的著作，因而在脚注中似可不必详引。现在脚注中仅列作者和作品名称——有时是略写的；书名用斜体字，期刊文章名称用罗马字体并加引号*。我想把材料来源开列出来，也许对进一步研究微积分史会有所促进。

多承巴里教授的启发和鼓励，这项研究工作才得以规划和完成。巴里教授以其在科学史方面的博闻强识，在本书写作过程中曾予以大力协助，提出了宝贵的意见。哥伦比亚大学的 L·桑戴克教授惠予审阅中世纪的贡献一章，并提出中肯的批评。哥伦比亚大学的 L·R·沙斯洛夫教授、密执安大学的 L·C·卡宾斯基教授和布鲁克林学院的 H·F·麦克内胥教授也都曾披阅原稿，提出了极有价值的帮助和建议。波耶夫人始终是这项工作热诚的支持者和促进者，并不辞劳苦地担当了全部打字工作。附录是哥伦比亚大学出版社编纂的。最后，美国学界委员会拨款资助，承担了出版经费，才使本书得以问世。对于所有这些帮助本书的准备与出版的人，谨志诚挚的谢意。

卡尔·B·波耶

布鲁克林学院

1939年1月3日

* 译本中对原书的脚注只选译一部分，对书名用《》号，文章名称用“ ”号。——译者

第二次付印序言

看到一本关于微积分历史的著作应迫切需要而再次付印,是令人高兴的事。看来这是一个证据,说明学术界正日益意识到对科学和数学需要有一种广泛的见解。虽然这些年来工程技术上有了惊人的成就,可是人们感受最深的是:科学不仅是生活的工具,也是一种思想的习惯,而数学则不仅是一大堆算法,也是文化的一个组成部分。这些学科的历史决不能取代实验室的工作或专门技术的训练,但它们能有效地改善人文科学与自然科学之间一贯互不通气的情况。对于提高专业人员的文化修养,使之具有和他们的学科相称的常识,数学史与科学史也许能发挥更大的作用。熟悉其专业历史背景的学者,对于初学者所极易体验到的那种好象大局已定的感觉,大多是不会苟同的。别的且不说,仅仅为了这个理由,如果未来的教师们都能不仅懂得本专业的内容,而且还知道它的历史发展,这应是明智的。

这次付印,正文中个别小错已予改正。假如再版,理应有更多的改动。但即使那样,一般性的叙述或观点并不会有实质性的改变;不过,由于 J·R·派斯特(《阿其翁》,1940年,卷 XXIII,第 199—203 页)、J·B·柯亨(《依西思》,1940年,卷 XXXII,第 205—210 页)以及

其他诸人,已有不少高明的评论,再版时本书的论据将根据他们提供的思路表达得更清晰些。也将增添部分参考书目,其中特别值得提出的是 G·卡斯丹努伏的《近代微积分的起源》(波洛尼亚,1938 年)。这本书几乎和本书同时出版;这位著名几何学家对近代的情况提供了更丰富的材料。

著者近年来在写一本关于解析几何历史的小册子,业已脱稿,不久将由《数学文丛》协助出版。

《微积分概念史》脱销已逾六年之久。这次付印应归功于 H·阿克赛罗得和 M·N·赖特。由于他们的倡议,本书得以再次付印。著者在此谨向他们致谢。承蒙 R·柯朗教授为这次付印写了前言,著者深为铭感。

卡尔·B·波耶

1949 年 1 月 27 日

目 录

第一章	引论	1
第二章	古代的观念	16
第三章	中世纪的贡献	67
第四章	一个世纪的酝酿	102
第五章	牛顿和莱布尼茨	198
第六章	犹豫时期	237
第七章	严格的表达	281
第八章	结论	315
参考书目		327
译名对照表		352

第一章 引 论

至少近二千五百年来，数学是人类智力训练和精神遗产的一个有机组成部分。然而在这漫长的年代中，关于数学的本质仍然众说纷纭，对数学并无一个公认的定义。

在观察自然界的过程中，古代巴比伦人和埃及人积累了一套数学知识，并用以作进一步的观察。泰勒斯大概已经引进了演绎的方法；早期毕达哥拉斯学派的数学则肯定是以演绎推理为其特色的。毕达哥拉斯学派和柏拉图都注意到，演绎推理所得的结果跟观察的结果或归纳推理所得的结果非常符合。他们无法用别的方法去说明这种符合，于是就认为，数学乃是对于自然界和宇宙中内在的终极、永恒的实在的研究，而并非逻辑学的一个分支或科学、技术的一种工具。他们认为对数学原理的认识，必定先于任何对经验的确切解释。反映这种观点的，有毕达哥拉斯的名言：万物皆数；还有据传为柏拉图的箴言：上帝常以几何学家自居。

确实，后来希腊的怀疑论者提出过疑问：不论由理性或由经验，究竟能否得到这样绝对性的知识？但与此同时，亚里士多德学派指出，通过观察和逻辑推理，人们至少能得到与现象相符的说明。到了欧几里得，数学终于

成为一种演绎关系的理想模式。它从一些跟观察中归纳出来的结论完全符合的公设导出，对解释自然界是有所裨益的。

流行于中世纪的经院派观点，认为宇宙是“井然有序”而易于理解的。在十四世纪，人们清楚地认识到，逍遥派关于运动和变化的定性观点，可以更好地被定量的研究所替代。这两种观念，随着柏拉图观点的再度风靡，约在十五、十六世纪又促成了下述信念的复活：数学是以某种方式独立于且先于经验的直观的知识。这种观念表现在库萨的尼古拉、开普勒和伽利略的思想中，在某种程度上也表现在利奥那多·达·芬奇的思想中。

数学是宇宙结构的基础这个观念，十六、十七世纪时又有所变化。在数学中引起这种变化，是由于对早在十三世纪就已经从阿拉伯传入，后来在意大利得到了进一步发展的代数不那么审慎而更侧重于实用的结果。在自然科学中，这种变化是由实验方法的产生所引起的。这样，笛卡儿、波义耳等人所谓的数学的确切性，就应解释为包含于数学的推理论证特点之中的一致性，而并非任何本体论上先验的需要所含有的一致性。

十八世纪在科学和数学问题中应用了微积分所取得的辉煌的成功，使人们把注意力首先放在运算，而不放在研究数学的基础上。但到十九世纪，人们力图为新的无限小分析中的有关概念寻找一个令人满意的基础，这种坚持不懈的努力，带来了一种更富于批判精神的态度。数学的严格性又提上了日程；人们发现，欧几里得的公设并非如康德所主张的那样是绝对的综合判断，而只不过

是一些假设。这种作为推理根据的前提，可以随心所欲地自由选取——唯一的要求是它们彼此之间相协调——它们甚至可以跟感觉上显而易见的事实相矛盾。到了十九世纪末，由于数学分析的算术化倾向，人们进一步看到，先于一切直观或分析的无限性概念，可以引进数学中而无损于逻辑的相容性。

倘使数学的假设是完全独立于感觉世界之外的，倘使它的原理是超出一切经验之上的，^① 那末，这门学科充其量不过是纯粹的形式逻辑，甚至会流于符号上的同义反复。数学形式符号化和算术化的趋势，在连续性的研究上取得了引人瞩目的进展，但也引出了一些棘手的悖论。这就激起人们更大的兴趣，去探讨数学的本质：诸如数学在智力生活中的地位和范围，其原理和公设的心理根源，其命题的逻辑力量以及解释感性世界的可靠性。

数学是量的科学或者空间与数的科学的这种旧观念，在很大程度上销声匿迹了。人们意识到，朴素的空间直观会导致种种矛盾，这个事实推翻了康德的公设观。但尽管如此，数学家要受外部感性世界的引导，虽然并不受它的支配。连续性的数学理论发源于直接经验，但最终为数学家采用的连续统定义，却超越于感官的想象力之上。从这一点出发，数学上的形式主义者认为，既然在数学的定义和前提中不必用到直观，那就没有必要去解释公理，也没有必要去考虑诸如有关的对象和关系的本质

① 伯特兰·罗素曾利用这种进退维谷的境况，很滑稽地将数学定义为“我们既不知道自己在讲些什么，也不知道讲得对不对的一门科学”。见《数学原理近作》，第84页。

等问题。不过，直观主义者仍坚持有关的数学符号应该表达一定的思想。^① 数学法则何以会具有无可争辩的精确性，在这个问题上虽然有两种（或更多种）观点，但只要承认一点，即数学概念纵然不是由直观所定义，却是由直观所提示的，那末就不难解释为什么数学演绎论证的结果总是跟经验归纳所得的结果如此相符了。导数和积分的源泉，蕴伏于自然界两个最明显的属性——多样性和可变性之中，但它们最后还是在无限元素序列的极限这个基本概念的基础上，作为数学的抽象而定义的。如果追溯一下整个发展过程，就很容易理解到这些观念对于解释自然界的力量之大和生命力之旺盛。

当古希腊数学家试图用他们视为离散的数，来表示跟线段（他们模糊地感到线段是连续的）的比或比例有关的直观观念时，碰到了逻辑上的困难，这就孕育了微积分的发生。它几乎是立刻就跟逻辑上不能令人满意（而直观上却很诱人）的无限小概念交织在一起了。古希腊人以其思想的严谨性，从几何的证明中排除无限小，而代之以方法略胜但相当繁冗的穷竭法。对变化问题，希腊科学家没有从定量方面去着手。企图用以避开芝诺疑难中的那些困难，一如穷竭法之对于几何学那样给运动学另辟途径的方法，毕竟没有能够发展起来。对于变化性问题的定量研究，直到十四世纪才由经院派哲学家开始进行。他们所用的方法主要是辩证的，但也借助于图形的说明。这种研究方法，为十七世纪解析几何和变量的系统表示法的产生提供了可能性。

^① 布劳威尔：“直观主义与形式主义”。

这种新型分析方法的应用和启人思绪的无限小的灵活运用,以及数的概念更为广泛的应用,很快就导致了牛顿和莱布尼茨的计算方法,那就是微积分。但即使在这个阶段,对这门学科的逻辑基础,仍然缺乏清晰的概念。十八世纪时,人们力图找到这个基础,结果虽则在这一点上收效甚微,却大大地把微积分从连续运动和几何量的直观中解放了出来。十九世纪初,导数概念成了基本的出发点,随着在下半世纪所建立的数及连续统的严格定义,一个坚实的基础业已完成。将近两千五百年来,人们一直试图解释清楚对于连续性的那种模糊的、本能的感觉究竟是什么。通过这种努力,终于达到了精确的概念,它们是从逻辑上定义出来的,但表示了超越于感觉经验世界之上的推断。经过审慎的考虑之后,直观,即似乎无法适当表达出来的对经验要素的所谓直接的认识,终于被严谨明确的、抽象的理性概念所取代,这种理性概念对科学与数学的思维经济是大有裨益的。

微积分的基本定义,即导数与积分的定义,现在的微积分教科书中叙述得如此清楚,要掌握有关的运算也如此不费力,以致我们很容易忘记这些基础定义发展起来的困难。对于作为一门知识基础的基本概念,要能具有一种清晰、恰当的理解,往往要在它的发展过程的较后阶段才办得到。微积分就是最好的例证。微积分的法则,一开始就显得叙述精确、应用自如,这在一定程度上反而使得数学家们对于这门学科的逻辑发展所需要的细致工作视而不见。他们只是力图用传统的、从空间直观发展而来的几何与代数的概念,来建立微积分。但到十八世

纪,要想系统阐述微积分基本概念时,无法回避的困难越来越明显,于是,谈论“微积分的形而上学”的风尚就时行了起来;言下之意是,要对微积分基础作出令人满意的说明,数学已无能为力了。十九世纪,由于使用了精确的数学术语,微积分基础观念终于得到了澄清,于是数学家们在自然界具体事物的直观(它也许蕴伏在几何与代数之中)和冥想的心灵内省(它也许是在超验的形而上学上萌发的)之间就找到了一条安全的航道。导数概念在其整个发展过程中,就这样摇摆于速度这个科学上的现象和运动这个哲学上的纯理性概念之间。

积分学的历史也相仿。一方面,它在许多场合都可以用近似值或误差抵偿的实证论想法来加以解释——这两种观点是基于科学测量中所许可的近似性和一般通用的迭置效应理论之上的。另一方面,从唯心论的形而上学出发,同时又可以认为,它说明了在有限的感知之外,另有一个超验的无限存在,人类的经验和理性只能可望而不可即地去无限接近它。只是由于导数和积分——在上一世纪——得到了数学定义的精确性,它们才能维持其作为抽象概念的独立自主的地位,这种抽象概念或许是来源于物理的叙述和形而上学的解释,但并不依赖于这样的叙述和解释。

在这里,来讨论一下这些概念由之而来的直观和思辨以及它们最后的严格公式化,或许还是一件值得做的事。这会帮助我们对于目前导数和积分概念的精确性有一个鲜明的印象,从而对整个发展过程的来龙去脉有一个清晰的认识。

导数是用以表示曲线或函数在一点的性质的数学工具，因此，它跟科学上的运动物体的瞬时性质，譬如说该物体在任一时刻的速度，是相似的。在科学中，考察某一时间区间的平均速度时，可定义它为这段时间内通过的路程对于该时间区间的变化率。这个变化率可以很方便地记作 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 。既然科学的法则要在感觉的基础上方能归纳，乍看起来，在科学上似乎根本不可能有什么瞬时速度，即路程与时间区间都为零的速度。感觉无从感知，因而科学也无从测量位置或时间的乌有的变化。感觉器官的能力为感觉下界所限，^① 所以从科学观察的角度来看，只要距离和相应的时间区间小到低于测量中的感觉下界，从而无法辨认时，运动和速度就都无从谈起——更不用说假定时间区间为零的情况了。

另一方面，假如把通过的路程看作所费时间的函数，在数学上把它们的函数关系表示为方程 $s=f(t)$ ，那么对于抽象的差商 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 而言，就不复存在什么感觉下界了。不管时间或路程的区间多么微小，这个式子在数学上总是有意义的——当然，只要时间区间不为零。在数学上，连续量无最小区间可言——对路程和时间都可作如是观，因为显然并无不作如是观的理由。要想作出能跟数学的整体相一致的所谓无限小的最小量的逻辑定义的种种努力，都失败了。然而，“瞬时速度”这个词，看来指的是时间区间不止是任意之小，而确确实实是零。这样一

① 马赫：《热学原理》，第 71—77 页。