北京大学教材

有限元方法讲义

应 隆 安

北京大学出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了有限元方法的基本原理和基本方法，包括椭圆型方程的协调、非协调、混合、杂交有限元方法，特征值问题，发展方程的有限元方法等。

本书层次清晰，取材精炼，简明易学，每章末都配有数量不多，但有一定深度的习题，可作为高等院校理工科高年级学生、研究生的教材或参考书，也可供从事于应用工作的有关科技人员参考。

北京大学教材

有限元方法讲义

应 隆 安

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

轻工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

787×1092毫米 32开本 5.5印张 130千字

1988年6月第一版　1988年6月第一次印刷

印数：00001—5200册

统一书号：ISBN 7-301-0009-X/0-004

定价：1.30元

序

从1983年开始，作者为北京大学数学系四年级学生和北京计算机学院计算机科学系四年级学生讲授了一门有限元方法入门课，名为“有限元方法引论”．选修本课程的还有校内外的研究生和进修教师．讲授时数为每周三学时，整个学期共计四十五至五十学时．到现在为止，已讲了四遍，每遍在材料的取舍与编排方面都有一些改动．本书是在原讲义的基础上经补充修改而成的．

有限元方法的内容十分丰富，作者试图将本书写成一本内容简明，难易适度的教材，主要供高等学校本科生学习之用．贯穿全书的是两条主要线索：第一，如何将一个偏微分方程的定解问题化为代数方程组或常微分方程组；第二，如何分析一个方法的收敛性．凡与这两条主线关系不大的材料都舍去了，如：与有限元方法有关的力学、物理知识，求解代数方程组的技巧，程序的编制与使用等等．就有限元方法理论而言，本书也仅是一本入门书，希望能为读者使用与深入学习有限元方法提供一个扎实的基础．对于在有限元方法的实践方面已经积累了丰富经验的读者，作者希望本书能对他们在理论上的提高有所帮助．

阅读本书，读者需具备大学理科教学大纲中规定的数学物理方程以及泛函分析的知识．考虑到有些知识，如Соболев空间的一些概念与术语，不一定在这两门课程中讲授过，本书安排了第一章，这一章简要地介绍了一些预备知识．就学习有限元方法的需要而言，读者只需记住结论，而

不必深究一些定理的证明.

第四章是本书最困难的一章. 有关的文献一般比较艰深. 因此作者在处理一些材料时, 并不追求数学上的严格性, 而只力图使内容通俗易懂一些. 即使这样, 在教学实践中, 教与学两方面都仍感到吃力. 读者如果只准备学习协调有限元方法, 这一章可略去不读.

作者在每章的后面都安排了一些习题, 在本书的最后给了部分习题的答案及提示. 有一些习题不很容易, 希望读者们在阅读的同时, 在习题上多化一些时间, 如不能完成全部, 只完成一部分也是有益的.

姜礼尚教授曾经阅读过作者的讲义, 提出了宝贵的意见. 此外, 在每次讲授过程中, 听众的反映都给作者以不少启发. 借此机会, 作者向以上同志表示衷心的感谢.

由于作者学识浅薄, 本书中错误在所难免, 选材方面也定有失当之处, 请读者批评指正.

应隆安

1986年1月于北京大学

目　　录

引　言

在讲正文以前，我们先考察一个例子，它极其简单，也不是有限元方法，但是也许能对我们理解有限元方法的基本思想有一些启示.

考虑二元一次代数方程

$$\begin{cases} k_{11}x+k_{12}y=f_1, \\ k_{21}x+k_{22}y=f_2. \end{cases} \tag{1}$$

它的解法很多，常用的一个是消元法. 以常数a乘第一式，常数b乘第二式，两式相加得

$$a(k_{11}x+k_{12}y)+b(k_{21}x+k_{22}y)=f_1a+f_2b. \tag{2}$$

适当取a和b，就可以使x的系数或y的系数等于零，先求出一个未知数，另一个未知数的求解就不难了.

现在，让我们改变一个观点看(2)式，提出如下问题：

问题G　求x,y，使(2)式对于任意的常数a,b都成立.

容易看出，问题G与方程组(1)是等价的，即(1)的解必为问题G的解，反之也对.

我们再换一个观点，假设有一个可微函数$F(x,y)$，它满足

$$\frac{\partial F}{\partial x}=k_{11}x+k_{12}y-f_1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=k_{21}x+k_{22}y-f_2.$$

在(2)中分别将a,b记为dx,dy，则(2)式可以改写成

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0,$$

即
$$dF(x,y)=0,$$

亦即(x,y)是函数F的驻点.

问题R 求函数F的驻点(x,y).

显然，问题R与问题G又是等价的.

函数F不一定存在，如果F存在，则有

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x},$$

即
$$k_{12}=k_{21}, \tag{3}$$

即方程组(1)的系数矩阵是对称的.条件(3)又是充分条件，因为在此情况下

$$F(x,y)$$
$$=\frac{1}{2}k_{11}x^2+k_{12}xy+\frac{1}{2}k_{22}y^2-f_1x--f_2y.$$

用矩阵和向量的记号，令

$$K=\begin{pmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix},$$

$$F(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^TK\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{f},$$

其中上标T表示转置. 三种提法就是

原问题 求$\boldsymbol{u}$使$K\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}$;

问题G 求$\boldsymbol{u}$使$\boldsymbol{v}^TK\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{f}$, $\forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^2$;

问题R 求$\boldsymbol{u}$使$dF(\boldsymbol{u})=0$,

其中$\boldsymbol{R}^2$表示二维向量空间.

问题R使人想到极值问题. 但是在一般情况下$\boldsymbol{u}$不是极值点. 当K是正定矩阵时，F是三维空间中的一个凸曲面，

问题R才是求F的最小值点.

以上考虑问题的思路与习惯的过程相反. 习惯的过程是将一个极值问题通过求微分化为方程组(1). 然而，将方程组(1)化为问题G或问题R正是变分方法的特色. 有限元方法就是一种变分方法.

以上三种提法有其物理背景，我们举下面的例子说明这一点.

考虑弹簧在外力作用下的平衡，在A, B点分别作用有外力f_1与f_2. 求这两点的位移x与y（图1）.

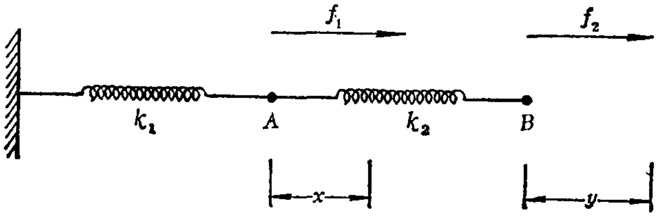

图 1

方法1 平衡方程

$$k_1 x = f_1 + f_2,$$
$$k_2(y-x) = f_2,$$

可以化为

$$(k_1+k_2)x - k_2 y = f_1,$$
$$-k_2 x + k_2 y = f_2.$$

以上方程组的系数矩阵是对称正定的，求解可得x与y.

方法2 虚功原理. 设在A, B两点各有虚位移a, b. 则虚功为

$$W = -k_1 x a - k_2(y-x)(b-a) + f_1 a + f_2 b = 0.$$

即

$$a((k_1+k_2)x-k_2y)+bk_2(y-x)=f_1a+f_2b, \quad \forall a,b.$$

方法3 最小总势能原理. 系统的总势能是

$$F=\frac{1}{2}k_1x^2+\frac{1}{2}k_2(y-x)^2-f_1x-f_2y.$$

令它的一阶微商$\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$等于零，可以求解x与y。

以上三种方法恰与前面的三种提法对应.

我们已经考虑了具有两个自由度的系统. 与偏微分方程对应的是无穷多个自由度的系统. 为此，我们需要考虑相应的无穷维空间，即Соболев空间，以及无穷维空间上的微分.

第一章　预备知识

§1　Соболев空间初步

本书中的材料远不是Соболев空间理论的完整叙述，所有定理都不给证明，只是向读者介绍一些与学习有限元方法有关的必备知识．读者若要系统学习这部分知识，可参看参考书目．我们永远假定Ω是n维空间$\boldsymbol{R}^n$中有界且连通的区域，边界是$\partial\Omega$．空间$\boldsymbol{R}^n$中的点以$x=(x_1,\cdots,x_n)$表示，当$n=2$时，以(x,y)表示．设m是一个非负整数，或者是∞，在Ω内m次连续可微的函数的集合记作$C^m(\Omega)$；在闭区域$\bar{\Omega}$上m次连续可微的函数的集合记作$C^m(\bar{\Omega})$；$C^m(\Omega)$中所有在Ω内有紧支集的函数的集合记作$C_0^m(\Omega)$．当$m=0$时，可以不写m而简单地记作$C(\Omega)$，$C(\bar{\Omega})$与$C_0(\Omega)$．函数u的偏微商可以写成

$$\partial^{\alpha}u=\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

其中$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$是一个行向量，它也称作多重指标，$\alpha_1\cdots,\alpha_n$是非负整数，记$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$.

1.1　广义微商

定义 1　如果函数u在区域Ω上在Lebesgue意义下局部可积，而且有一个也在Ω上局部可积的函数v，使

$$\int_{\Omega}v\varphi dx=-\int_{\Omega}u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx,\qquad \forall\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega),$$

其中x_i是某一自变量，$1\leqslant i\leqslant n$，则称v是u对自变量x_i的一

阶广义微商，记作$v=\partial u/\partial x_i$.

如果u是连续的，而且在古典意义下的微商$\partial u/\partial x_i$也是连续的，利用Green公式可以看出以上等式是成立的. 因此广义微商概念是古典微商概念的一个推广. 以上定义可以推广为任意阶广义微商.

定义 2 如果函数u在Ω上局部可积，而且有一个也在Ω上局部可积的函数v，使

$$\int_\Omega v\varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u\partial^\alpha\varphi dx, \qquad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega),$$

则记$v=\partial^\alpha u$，称v是u的一个$|\alpha|$阶广义微商.

例 1 设区域Ω由一光滑曲面S分割为子区域Ω_1与Ω_2（图2），函数$u\in C(\Omega)$，在集合$\Omega\backslash S$上u的一阶古典微商连续且有界. 一般而言，在古典意义下u在Ω上是不可微的. 但是在Ω上广义微商$v=\partial u/\partial x_i$ $(i=1,\cdots,n)$存在. 在$\Omega\backslash S$上v等于古典微商$\partial u/\partial x_i$，在S上v的值是无关紧要的，因为S是一个零测度的集合.

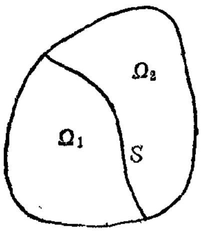

图 2

证明 对于任意的$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，由Green公式得

$$\int_\Omega v\varphi dx=\int_{\Omega_1}v\varphi dx+\int_{\Omega_2}v\varphi dx$$

$$=\int_{\Omega_1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi dx+\int_{\Omega_2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi dx$$

$$=-\int_{\Omega_1}u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx+\int_S u\varphi\cos\alpha_i ds$$

$$-\int_{\Omega_2} u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx-\int_S u\varphi\cos\alpha_i ds,$$

其中α_i是Ω_1在S上的外法向量与x_i轴的夹角（对于Ω_2是内法向量），ds是$n-1$维曲面微分．因此

$$\int_\Omega v\varphi dx=-\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx.$$

按定义，v就是广义微商$\partial u/\partial x_i$.

例 2 对于以上区域，设

$$u=\begin{cases}1, & x\in\Omega_1,\\ 2, & x\in\Omega_2,\end{cases}$$

则至少有一个一阶广义微商不存在.

证明 如果广义微商$v\doteq\partial u/\partial x_i$（$i=1,\cdots,n$）都存在，则在$\Omega_1$与$\Omega_2$上，$v$也是广义微商．但是在$\Omega_1$与$\Omega_2$上$u$的古典微商等于零，因此$v$分别在$\Omega_1$与$\Omega_2$上等于零，即它几乎处处为零．按定义 1

$$-\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx=\int_\Omega v\varphi dx=0.$$

由Green公式

$$-\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx=\int_S\varphi\cos\alpha_i ds.$$

但是对于$i=1,\cdots,n$，$\cos\alpha_i$不可能都等于零．由φ的任意性，以上等式不可能恒成立．于是导致一个矛盾．因此u的一阶广义微商中，至少有一个不存在．

从例1，2可以看出，条件$u\in C(\Omega)$是本质的．但是它不是必要条件，在本章习题中有一个反例．

1.2 Соболев空间

定义 3 设m为非负整数，$1\leqslant p\leqslant\infty$，作集合

$$W^{m,p}(\Omega)=\{u\in L^p(\Omega);\ \partial^\alpha u\in L^p(\Omega)(|\alpha|\leqslant m)\},$$

并且赋予范数

$$\|u\|_{m,p}=\left(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|\partial^\alpha u\|_{0,p}^p\right)^{1/p},\quad 1\leqslant p<\infty,$$

$$\|u\|_{m,\infty}=\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|\partial^\alpha u\|_{0,\infty},$$

其中$\|\cdot\|_{0,p}$表示空间$L^p(\Omega)$中的范数，则所得到的线性赋范空间$W^{m,p}(\Omega)$称为是一个Соболев空间.

容易证明，$W^{m,p}(\Omega)$是一个Banach空间. 显然，当$m=0$，$W^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$，因此$W^{m,p}(\Omega)$是$L^p(\Omega)$的一个推广. 当$p=2$，$W^{m,p}(\Omega)$又可以记作$H^m(\Omega)$，它是一个Hilbert空间. 如果需要特别地指出函数的定义域，我们将范数记作$\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$，如果$p=2$，我们可以简单地将范数记作$\|\cdot\|_m$.

以下定理在Соболев空间理论中是基本的.

定理 1 如果区域Ω的边界$\partial\Omega$是Lipschitz连续的曲面，$1\leqslant p<\infty$，则$C^\infty(\bar{\Omega})$在$W^{m,p}(\Omega)$中稠密.

换句话说，任给$u\in W^{m,p}(\Omega)$，存在序列$\{u_k\}\subset C^\infty(\bar{\Omega})$，使当$k\to\infty$时

$$\|u-u_k\|_{m,p}\to 0,$$

对于上述区域，我们就可以给出Соболев空间的一个等价的定义：

定义 4 空间$C^\infty(\bar{\Omega})$在范数$\|\cdot\|_{m,p}$下的完备化空间称为Соболев空间$W^{m,p}(\Omega)$.

按照同样思路，我们对于任意区域作如下的定义：

定义 5 空间$C_0^\infty(\Omega)$在范数$\|\cdot\|_{m,p}$下在空间$W^{m,p}(\Omega)$内的闭包称为Соболев空间$W_0^{m,p}(\Omega)$.

容易证明，$W_0^{m,p}(\Omega)$也是一个Banach空间．当$p=2$，可以记作$H_0^m(\Omega)$．它是一个Hilbert空间．$W_0^{m,p}(\Omega)$内的函数一般不再在Ω内有紧支集，在边界上它的性质将由迹定理所刻划．

在$W^{m,p}(\Omega)$中还可以引进半范数

$$|u|_{m,p}=\left(\sum_{|\alpha|=m}\|\partial^\alpha u\|_{0,p}^p\right)^{1/p},\quad 1\leqslant p<\infty,$$

$$|u|_{m,\infty}=\max_{|\alpha|=m}\|\partial^\alpha u\|_{0,\infty}$$

显然，只要$m>0$，以上半范数就不是范数．

1.3 嵌入定理

我们首先考虑一元函数的情形．

例 3 设(a,b)为$\boldsymbol{R}$中的有界区间，$u\in W^{1,p}(a,b)$，$1\leqslant p<\infty$，则存在一个与u几乎处处相等的函数，仍记作u，使$u\in C([a,b])$，而且存在与u无关的常数C，使

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|u(x)|\leqslant C\|u\|_{1,p}.\tag{1}$$

证明 首先设$u\in C^\infty([a,b])$，证明（1）式成立．由积分中值定理，存在某个$\sigma\in[a,b]$，使

$$\|u\|_{0,p}^p=\int_a^b|u(x)|^p dx=(b-a)|u(\sigma)|^p.$$

对任意的$x\in[a,b]$有

$$u(x)=u(\sigma)+\int_\sigma^x u'(t)dt;$$

当$p\neq1$，由Hölder不等式

$$|u(x)|^p\leqslant2^{p-1}\left(|u(\sigma)|^p+\left|\int_\sigma^x u'(t)dt\right|^p\right)$$

$$\leqslant 2^{p-1}\left(|u(\sigma)|^p + |x-\sigma|^{p-1} \left|\int_\sigma^x |u'(t)|^p dt\right| \right),$$

当$p=1$，以上不等式也成立，即有

$$|u(x)|^p$$

$$\leqslant 2^{p-1}\left\{\frac{1}{b-a}\|u\|_{0,p}^p + (b-a)^{p-1}\|u'\|_{0,p}^p\right\}.$$

令 $$C=\left(\max\left\{\frac{2^{p-1}}{b-a},\ 2^{p-1}(b-a)^{p-1}\right\}\right)^{1/p}$$

就有 $$|u(x)|\leqslant C\|u\|_{1,p}.$$

由x的任意性得(1)式．对于任意的$u\in W^{1,p}(a,b)$，取$\{u_k\}\subset C^\infty([a,b])$，使当$k\to\infty$时

$$\|u-u_k\|_{1,p}\to 0.$$

由(1)式

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|u_k(x)-u_l(x)|\leqslant C\|u_k-u_l\|_{1,p},\quad \forall k,l.$$

因此$\{u_k\}$在区间$[a,b]$上一致收敛，它的极限函数是连续的，与u几乎处处相等，且满足(1)式．证完．

我们知道，在$C([a,b])$中如引进范数

$$\|u\|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|u(x)|,$$

则它是一个Banach空间．因此，由例3，恒同算子$Iu=u$是一个从$W^{1,p}(a,b)$到$C([a,b])$的连续算子，它称为嵌入算子．我们将以上嵌入关系记作

$$W^{1,p}(a,b)\to C([a,b]),$$

它不仅表示集合$W^{1,p}(a,b)$包含于集合$C([a,b])$之中（几乎处处相等的函数看作是同一个），而且还表示恒同算子I是连续的。

按嵌入算子的定义，以下的嵌入关系是明显的：

$$W^{m,p}(\Omega)\to W^{m,q}(\Omega),\qquad p>q,$$

$$W^{m,p}(\Omega)\to W^{k,p}(\Omega),\qquad m>k.$$

但是，下面的嵌入定理反映了Соболев空间的深刻性质：

定理 2 如果$\partial\Omega$是Lipschitz连续的曲面，$m\geqslant 1$，则

当$m<n/p$，$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$，$1\leqslant q\leqslant\dfrac{np}{n-mp}$；

当$m=n/p$，$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$，$1\leqslant q<\infty$；

当$m>n/p$，$W^{m,p}(\Omega)\to C(\bar{\Omega})$.

推论 如果$\partial\Omega$是Lipschitz连续的曲面，$m\geqslant k+1$，则

当$m<k+n/p$，

$$W^{m,p}(\Omega)\to W^{k,q}(\Omega),\qquad 1\leqslant q\leqslant\frac{np}{n-(m-k)p};$$

当$m=k+n/p$，$W^{m,p}(\Omega)\to W^{k,q}(\Omega)$，$1\leqslant q<\infty$；

当$m>k+n/p$，$W^{m,p}(\Omega)\to C^k(\bar{\Omega})$.

定理 3 在定理2的假设条件下，下面的嵌入算子还是紧的：

当$m<n/p$，$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$，$1\leqslant q<\dfrac{np}{n-mp}$；

当$m=n/p$，$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$，$1\leqslant q<\infty$，

当$m>n/p$，$W^{m,p}(\Omega)\to C(\bar{\Omega})$.

特别地，算子

$$I:H^1(\Omega)\to L^2(\Omega)$$

是连续的紧算子.

1.4 迹定理