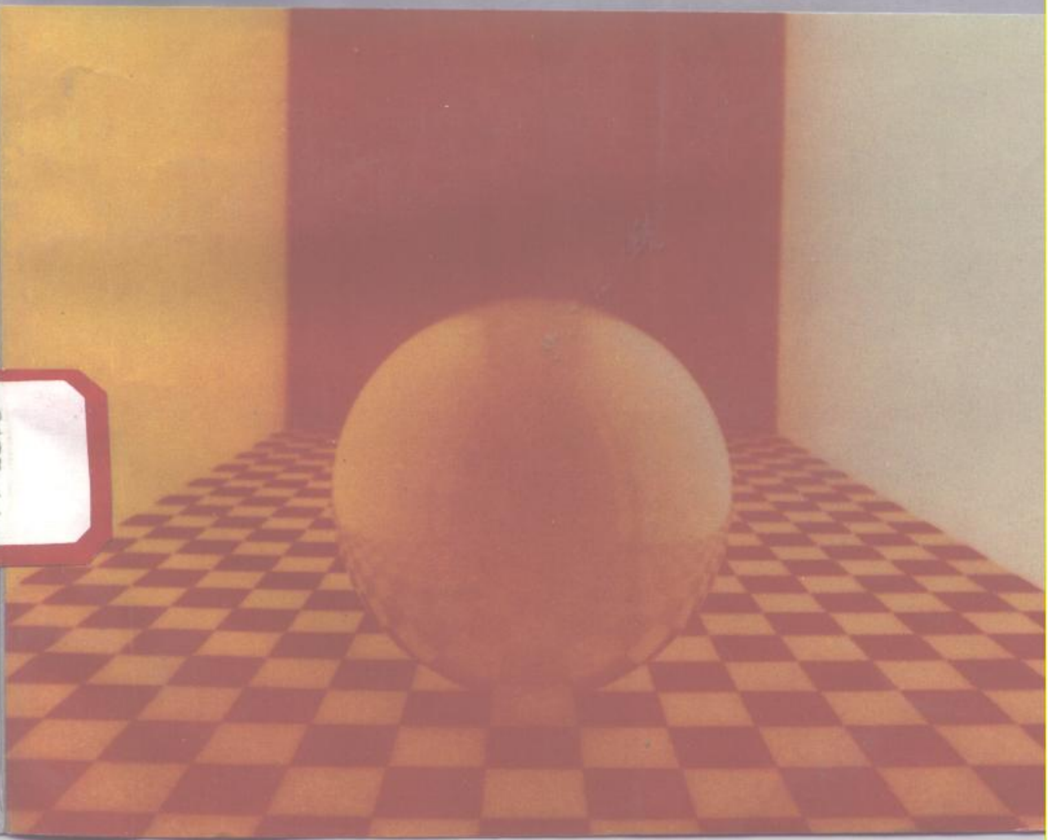
21 数学天元基金

当代数学园地 2

哈密顿系统的指标理论及其应用

龙以明 著

科学出版社



当代数学园地2

哈密顿系统的指标理论及其应用

龙以明 著

科学出版社

1993

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书是关于非线性 Hamilton 系统理论研究进展的一本专门著作.

本书系统介绍一般线性 Hamilton 系统的指标理论，并应用这一理论研究非线性 Hamilton 系统的周期解的存在性和多重性. 作为这一指标理论研究的基础，书中还对辛群的拓扑结构，典则变换和生成函数，Hamilton 系统的变分方法，Conley 同伦指标，Morse 理论和对称泛函的临界点理论等都作了详细介绍. 书中包含了80年代以来这一领域中的许多新结果.

本书可用作数学专业的研究生教材，也可供数学和物理专业的大学生、研究生、教师和有关的科技工作者参考.

当代数学园地 2

哈密顿系统的指标理论及其应用

龙以明 著

责任编辑 吕 虹

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100[illegible]

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1993年11月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1993年11月第一次印刷 印张：4 1/2

印数：1—1 000 字数：110 000

ISBN 7-03-003619-0/O・642

定价：5.50 元

《当代数学园地丛书》前言

《当代数学园地》是国家自然科学基金会数学天元基金支持出版的，该项基金是为“我国数学在21世纪率先赶上世界先进水平”这一目标而设的．这也是本丛书的出版目的．中国数学要跃入世界前列，光靠从国外引入尖子是不行的．在大学以上层次，增强对现代数学思想的训练及对现代数学发展的了解，很有必要．事实上，只有这样，才会使一批尖子人才，在中国成长壮大．

本丛书包含数学专著、译著、讲义和通俗读物，其宗旨是以不拘一格的形式向数学研究者、教育工作者，以及数学专业的研究生和大学生传播当今数学的最新发展，包括新理论、新概念、新方法、新思想和新动态．因此，它的组织原则有二条：一、取材新，二、可读性强．

所谓取材新，意味着书的内容须为中文图书中不多见者，尤其欢迎来自崭新的数学分支或者当今十分活跃的数学方向的题材．这是本丛书有别于其它丛书的基本特点．

所谓可读性强，意味着书须写得通俗易懂，起点要低，终点要高，最好图文并茂，这条原则对列入丛书的专著和讲义也不例外．换句话说，即便是专著和讲义，也要尽力在文笔上、组织上下功夫，达到生动活泼，深入浅出，照顾到所提及的读者面．

本丛书欢迎符合上述两原则的各类书稿，不拘篇幅大小．特别欢迎优秀留学人员来稿．对怀有报效祖国之心、但由于种种原因暂时不能回归祖国的留学人员来说，利用书的形式使自己的知识能为祖国的科学技术发展做份贡献，这是切实可行，也是深受欢迎的好事．让我们大家携起手来，不分国内国外，不分资历深

浅，共同为我国数学的发展，及在21世纪率先赶上世界先进水平而努力！

《当代数学园地》编委会

前　　言

天体力学中质点的运动规律通常可以归结为一个非线性的常微分方程组，称为 Hamilton（哈密顿）系统．天体运动的轨道即可由此系统描述出来．例如天体运动的最简单方式——周期运动就对应于此系统的周期解．于是，寻找一般的 Hamilton 系统所具备的各种不变量，用以研究该系统的解，特别是周期解的存在性，多重性和其它性质，自然就成为人们非常关心的问题．本书所介绍的一般 Hamilton 系统的指标理论就给出这样的不变量．

关于线性 Hamilton 系统的指标理论，即分类理论的研究可以追溯到 50 年代 M. Krein, I. Gelfand, V. Lidskii 和 J. Moser 等人关于一类特殊的，即强稳定的线性 Hamilton 系统的研究工作．自 1978 年 P. Rabinowitz 的开创性工作以来，由于变分方法在非线性 Hamilton 系统的周期解的研究上获得了突破性的进展，这就要求更全面深入地认识一般的线性 Hamilton 系统，研究此类系统的分类问题和由此产生的不变量，然后利用它们来进一步研究非线性系统的各种性质．由于与 Hamilton 系统相应的泛函的 Morse 指标总是无穷的，为了使大范围分析的重要工具 Morse 理论能够得以应用，寻找相应泛函的 Morse 指标的有限表示是问题的关键．近年来，I. Ekeland 利用对偶变分原理，建立了线性凸 Hamilton 系统的指标理论，获得了凸系统的 Morse 指标的有限表示，并在非线性凸系统的应用方面做出了杰出的工作．一个突出的例子是：P. Rabinowitz 在 1978 年的著名工作中关于超二次 Hamilton 系统的给定最小周期解的存在性问题所提出的猜测．1985 年，I. Ekeland 和 H. Hofer 合作，用上述 Ekeland 指标理论作为主要工具之一，对凸 Hamilton 系统的情形证明了 Rabinowitz 猜测．

对于不附加凸性条件的一般 Hamilton 系统的情形，对偶变分原理不再成立，这就使得问题变得更加复杂. 例如迄今不附加凸性条件的上述 Rabinowitz 猜测还远未解决. 关于这种一般 Hamilton 系统的指标理论的研究始于 C. Conley 和 E. Zehnder 的工作. 1984 年,他们合作给出了维数不小于四的偶数维 Euclid 空间上的一般非退化线性 Hamilton 系统的同伦分类定理，并由此定义了相应的指标理论. 1988 年,作者与 E. Zehnder 合作,证明了二维 Euclid 空间上的一般非退化线性 Hamilton 系统的同伦分类定理，建立了相应的指标理论. 1990 年，作者进一步建立了一般退化线性 Hamilton 系统的分类定理，从而完整地解决了具有连续周期对称系数的线性 Hamilton 系统的分类问题，并由此给出了不附加凸性条件的一般线性 Hamilton 系统的指标理论的完整定义. 在本书中我们称这一理论为 Conley-Zehnder 指标理论. 这一理论给出了不附加凸性条件时一般 Hamilton 系统的相应泛函的 Morse 指标的有限表示，为 Morse 理论的应用奠定了基础. 与近十余年来发展起来的 Hamilton 系统的变分方法和临界点理论，特别是 Morse 理论结合起来，Conley-Zehnder 指标理论在非线性 Hamilton 系统的研究中已经发挥了很大的作用. 这一指标理论已被用来描述非线性系统在原点和无穷远点引起的扭转，从而给出该系统周期解的存在性与多重性. Conley-Zehnder 指标理论近来已开始被用于研究一般非线性 Hamilton 系统的周期解的迭代性质，进而研究解的周期的最小性. 例如，关于上述一般情形下的 Rabinowitz 猜测已开始有了进展. 在把 Conley-Zehnder 指标理论推广到流形上,与 Floer 同调理论相结合，来研究给定能量面上 Hamilton 周期轨道的存在性和个数以及辛映射的不动点等方面也已出现了初步的工作. 这一指标理论在不附加凸性条件时的非线性 Hamilton 系统的研究中已表现出了极大的潜力.

近二百年来，非线性 Hamilton 系统一直是数学家和物理学家的重要研究领域. 近年来这一领域中的新的研究成果已经在非

线性分析、代数拓扑、数学物理和微分几何（特别是辛几何）等诸多学科中产生了重大影响。作为这一研究领域中的重要工具之一，Conley-Zehnder 指标理论本身的进一步深化及其广阔的应用前景是可以预见的。

本书旨在系统介绍一般线性 Hamilton 系统的 Conley-Zehnder 指标理论及其在非线性 Hamilton 系统研究中的一些应用。在内容的选择上，力求兼顾学习这一课题的必要的基础知识和这一领域中的最新进展，循序渐进，便于读者理解和掌握基本内容并进入研究前沿。作者力求使本书成为自封闭的，书中的定理均给出完整的证明。学习过线性代数、微分方程、线性泛函分析和代数拓扑等大学数学专业本科课程后，本书的内容是不难理解的。

作为建立一般 Hamilton 系统的指标理论的基础，本书的前三章系统介绍辛矩阵的代数性质，辛群及其子集的拓扑结构理论，典则变换和生成函数的经典理论和 Hamilton 系统的变分方法。第四、五两章介绍 Conley 指标理论和 Morse 理论，作为同伦论证和指标计算的工具。然后，在第六章中介绍一般线性 Hamilton 系统的分类定理，从而建立相应的 Conley-Zehnder 指标理论。在给出严谨的数学证明的同时，我们着重阐述了这一指标理论所由产生的直观的几何背景。本书的最后两章介绍这一指标理论在非线性 Hamilton 系统的周期解的存在性与多重性研究中的应用。每章的末尾对该章的内容均附有简短的评注，并介绍有关的参考文献以便读者进一步查阅。书中的有些结果尚属初次发表。

本书中，“定理 2.1”表示同一章中的“2.1 定理”。而“定理 3.2.1”则表示第三章中的“2.1 定理”。我们用 $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 分别记自然数，整数，实数和复数的集合。

本书的主要内容以作者近年为南开大学南开数学研究所讲授的研究生课程的讲稿为基础，补充改写而成。由于课题较新，涉及诸多学科，许多内容直接取材于近年的文献，重新加以系统改写、简化。因作者学识所限，加之时间仓促，书中错漏不当之处在所难

免。恳请读者批评指正。

本书的写作与出版，得到了南开数学研究所的大力支持，并得到了国家自然科学基金及其天元项目和国家教委优秀青年教师基金的资助，谨此致谢。

龙以明

1991年7月于南开大学

目　　录

第一章　辛矩阵与辛群

我们考虑如下的线性 Hamilton 系统

$$\dot{x} = JB(t)x, \qquad x \in \boldsymbol{R}^{2n}.$$

设矩阵函数 $M(t)$ 是该系统的基本解，则对每一时刻 t，矩阵 $M(t)$ 都是辛矩阵. 而定义在区间 $[0,1]$ 上的矩阵函数M可被视为辛矩阵群中的一条道路. 因此辛矩阵的代数性质和辛群的拓扑性质必然反映到线性 Hamilton 系统的结构中来. 作为具有对称连续和周期系数的一般线性 Hamilton 系统的指标理论研究的基础,我们在本章中介绍辛矩阵及其特征值的分布,和辛群及其子集的拓扑结构的理论.

§1. 辛　矩　阵

在这一节中,我们将给出辛矩阵的定义,并讨论它的性质. 对任意自然数 n，记所有的 $n\times n$ 阶实矩阵所组成的矩阵群为 $\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$. 把它等同于 n^2 维的 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^{n^2}$，就成为一个拓扑群. 对它的所有子群,我们都赋予其诱导拓扑,而得到相应的拓扑子群. 记 $\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 的对称子矩阵群为 $\mathscr{L}_s(\boldsymbol{R}^n)$.

1.1 定义. 称矩阵 $M\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^{2n})$ 为一个辛矩阵,若有

$$M^{\tau}JM = J, \tag{1.1}$$

其中 $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, I 是恒等矩阵，0 是零矩阵，M^{τ} 记M的转置矩阵.

若记 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 中的内积为 $a\cdot b$，则辛矩阵可以等价地如下定义：称矩阵 $M\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^{2n})$ 是辛的,若

$$JMa\cdot Mb = Ja\cdot b, \ \forall a,b\in\boldsymbol{R}^{2n}.$$

易见所有 $2n\times 2n$ 阶辛矩阵关于矩阵的乘法成一群，记作 $\mathrm{Sp}(2n,\boldsymbol{R})$。在本书中当不致发生混淆时也记作 $\mathrm{Sp}(2n)$。

由定义立得，每个辛矩阵M满足 $(\det M)^2=1$。特别地，辛矩阵都是非奇异的。后面我们将证明，事实上，还有 $\det M=1$。

考虑 2×2 阶实辛矩阵

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

由定义 1.1，我们有 $ad-bc=1$。这一结果有如下推广。

1.2 引理. 若 $2n\times 2n$ 阶矩阵M有如下分块形式

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

则1° M是辛的当且仅当 $A^\tau C$ 与 $B^\tau D$ 皆为对称的，并且 $A^\tau D-C^\tau B=I$。

2° 特别当 $B=0$ 时，M是辛的当且仅当A是非奇异的，并且M可表为形式

$$M=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^\tau)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ E & I \end{pmatrix},$$

其中E为一对称矩阵。

证明. 1° 由定义直接计算可得。

2° 由1°有 $A^\tau D=I$。令 $E=A^\tau C$ 即得结论。 □

类似于复数的极坐标表示，辛矩阵也有其极分解式。下面的引理即给出这一结果。

1.3 引理. 任一辛矩阵 $M\in\mathrm{Sp}(2n)$ 可以表为下述形式

$$M=AU, \tag{1.2}$$

其中A是一个正定对称辛矩阵，U是一个正交辛矩阵，它们都由M唯一确定。

证明. 令 $A=\sqrt{MM^\tau}$，则A是对称非负定的。

因M非奇异，A是正定的。再令 $U=A^{-1}M$，则由 $UU^\tau=A^{-1}MM^\tau A^{-1}=A^{-1}A^2A^{-1}=I$，知$U$为正交矩阵，而且得到

(1.2) 式.

若M有二极分解式 $M = A_1U_1 = A_2U_2$，则 $U_1^\tau A_1 = U_2^\tau A_2$. 从而

$$A_1^2 = A_1U_1U_1^\tau A_1 = A_2U_2U_2^\tau A_2 = A_2^2.$$

由于 A_1 与 A_2 皆非负定，我们得到 $A_1 = A_2$. 因M非奇异，$A_1 = A_2$ 为可逆. 从而 $U_1 = U_2$. 这就证明了 (1.2) 式分解的唯一性.

按照辛矩阵的定义，$M = J^{-1}(M^\tau)^{-1}J$. 将(1.2)式代入，即得

$$M = J^{-1}A^{-1}(U^\tau)^{-1}J = J^{-1}A^{-1}JJ^{-1}(U^\tau)^{-1}J.$$

注意到 $J^{-1}A^{-1}J$ 是正定对称的，$J^{-1}(U^\tau)^{-1}J$ 是正交的，由刚证明的 (1.2) 式分解的唯一性，我们得到 $A = J^{-1}A^{-1}J$ 和 $U = J^{-1}(U^\tau)^{-1}J$. 从而A与U都是辛矩阵. $\square$

我们知道每个对称正定矩阵P可以唯一地表示为

$$P = \exp(M),$$

其中M是一个实对称矩阵，记

$$\exp(M) = I + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \cdots,$$

M称为P的对数矩阵. 特别地，对于辛矩阵下述结果成立.

1.4 引理. 一个正定对称矩阵P是辛的，当且仅当它有形式

$$P = \exp(M),$$

其中 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$，$A$ 和 B 为 $n \times n$ 阶对称矩阵.

证明. 充分性. 因为 $\exp(M) = P$ 是辛的，

$$\exp(M) = J^{-1}(\exp(M))^{-1}J = J^{-1}\exp(-M)J$$
$$= \exp(-J^{-1}MJ).$$

因 $-J^{-1}MJ$ 是实对称的，由上式的唯一性立得

$$M = -J^{-1}MJ. \tag{1.3}$$

记 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 代入上式立得 $D = -A$, $B = C$. 另一方面，由于M是对称的，$B^\tau = C^\tau = B$, $A^\tau = A$. 充分性得证.

必要性. $P = \exp(M)$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$ 和 A,B 对称蕴涵 (1.3) 式，并且M为对称矩阵，从而P是辛的. $\square$

1.5 引理. 1° 一个正交矩阵U是辛的，当且仅当它有形式

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

其中 $A^\tau B$ 是对称的，而且 $A^\tau A + B^\tau B = I$.

2° 这些条件也是使复矩阵 $A + iB$ 为酉矩阵的充分必要条件.

证明. 1° 必要性. 由直接计算可得.

充分性. 由给定的条件有 $U^\tau KU = K$, 其中$K = I$ 或 J. 从而也对 $K = I + iJ$ 成立. 记

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

则有

$$\begin{pmatrix} A^\tau & C^\tau \\ B^\tau & D^\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & iI \\ -iI & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & iI \\ -iI & I \end{pmatrix}.$$

比较上式两端，我们得到

$$E^*E = F^*F = I, \quad E^*F = iI, \tag{1.5}$$

其中 $E = A + iC$, $F = B + iD$, E^* 记E的转置共轭矩阵. 这蕴涵

$$E^*(E + iF) = 0.$$

由 (1.5) 式知 E^* 非奇异. 从而 $E + iF = 0$. 这就给出 $D = A$ 和 $C = -B$.

$A^\tau B$ 的对称性和 $A^\tau A + B^\tau B = I$ 由U之正交性立得.

2° 的证明是类似的，留给读者. $\square$

上述引理建立了一个同构

$$\mathrm{Sp}(2n, \boldsymbol{R}) \cap O(2n) \cong U(n),$$

其中 $O(n)$ 记 $n \times n$ 阶实正交矩阵群, $U(n)$ 记 $n \times n$ 阶酉矩阵群. 在拓扑群的意义下这也是一个同胚.

定义 $2n \times 2n$ 阶复矩阵

$$T = \begin{pmatrix} I & iI \\ I & -iI \end{pmatrix}.$$

则引理 1.5 中的矩阵 U 变换为

$$TUT^{-1} = \begin{pmatrix} A - iB & O \\ O & A + iB \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

1.6 引理. 对任意辛矩阵 M,

$$\det M = 1.$$

证明. 由引理 1.3, M 有极分解式 $M = PU$, 其中 P 为正定对称辛的, U 为正交辛的. 从而

$$\det M = \det P \det U.$$

由 (1.6) 式即有

$$\begin{aligned} \det U &= \det(TUT^{-1}) = \det[(A - iB)(A + iB)] \\ &= \det[(A + iB)^*(A + iB)] = \det I = 1. \end{aligned}$$

这里 $A^* = A, B^* = B$, 和 $A + iB$ 为酉矩阵. 因为 P 是辛的, $(\det P)^2 = 1$, 而 P 是正定的, 故 $\det P = 1$. 所以

$$\det M = 1.$$

引理得证. ∎

本节我们证明了每个辛矩阵的行列式为 1, 更重要的是, 在第四节将会看到的, 由此讨论出发可以得到辛群的整体拓扑结构.

§2. 辛矩阵的特征值

设 $M \in \mathrm{Sp}(2n)$ 为任一给定的辛矩阵. 按照惯例我们用 $\sigma(M)$ 记矩阵 M 的所有特征值的集合. 为确定 M 的特征值, 我们考虑其特征多项式

$$f(\lambda) = \det(M - \lambda I).$$

它是一个具实系数的 $2n$ 次多项式. 由 M 为辛矩阵, 我们有

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det(M(I - \lambda M^{-1})) \\ &= \det M \det(I - \lambda J^{-1} M^{\tau} J) \end{aligned}$$