纯粹数学与应用数学专著 第32号

亚纯函数唯一性理论

仪洪勋 杨重骏 著

科学出版社

纯粹数学与应用数学专著 第32号

亚纯函数唯一性理论

仪洪勋 杨重骏 著

科学出版社
1995

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书系统地总结了近 20 年来国内外关于亚纯函数唯一性理论的研究工作。主要内容为 Nevanlinna 基本理论、零级和有穷非整数级亚纯函数的唯一性、五值定理、重值与唯一性、四值定理及其改进、各种类型的三值定理、二值定理和一值定理、涉及到导数的唯一性以及具有公共值集的唯一性等。

本书可供大学数学专业高年级学生、研究生、教师及有关的研究人员阅读和参考。

纯粹数学与应用数学专著 第 32 号
亚纯函数唯一性理论
仪洪勋 杨重骏 著
责任编辑 刘嘉善
科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
华云电子数据中心照排
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1995 年 9 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1995 年 9 月第一次印刷 印张：20 插页：2
印数：1—1 000 字数：525 000
ISBN 7-03-004554-8/O·784
定价：42.00 元

序　言

所谓函数唯一性理论是探讨在什么情况下只存在一个函数满足所给的条件.大家都知道,多项式除了一常数因子外,由其零点(亦即取零值的点集)而定,但对超越整函数以至亚纯函数就不然了.如函数 e^z 和 e^{-z},它们具有共同取值 $\pm 1, 0$ 及 ∞ 的点集.因此,如何来唯一地确定一个亚纯函数的探讨也就显得有趣及复杂了.在这方面,R. Nevanlinna 所创立的值分布论也就自然地成为主要的研究工具,很早 Nevanlinna 本人也证明,任何一非常数亚纯函数可由其 5 个值的点集而确定.换言之,如两非常数亚纯函数 f 与 g 具有共同的取 5 个值的点集,则 $f \equiv g$.很明显,如有了些附加条件,则二个函数相应地可由具有共同地取 4 个值,3 个值,2 个值甚至一个值的点集而定.本书主要介绍在各种情况下亚纯函数可由少于 5 个值的点集而定的种种研究结果及方法.

本书共十章.第一章介绍 Nevanlinna 基本理论,其中包括杨乐最近得到的几个精密的基本不等式和解决 Hayman 提出的一个著名问题的研究工作,也包括 N. Steinmetz 最近得到的解决 Nevanlinna 提出的在第二基本定理的一般形式中把常数替换成小函数的著名问题的研究工作.第二章介绍有关一些有穷级(下级)亚纯函数的唯一性的研究工作,其中包括有理函数的唯一性,零级和有穷非整数级亚纯函数的唯一性,一些有穷级(下级)整函数的唯一性,也包括 J. Anastassiadis 得到的有穷级整函数的 Taylor 展式的系数,Picard 例外值,CM 公共值及唯一性的关系的研究工作.第三章介绍有关五值定理和重值与唯一性的研究工作,其中包括 Nevanlinna 五值定理的各种改进和推广,也包括处理重值问题的杨乐方法和仪洪勋所得到的关于重值与唯一性的研究工作.第四章介绍 Nevanlinna 四值定理的各种改进和推广,其中包

括 Gundersen，Mues 最近得到的关于四值定理改进的研究工作，也包括 Reinders 最近得到的 4DM 值定理. 第五章介绍各种类型的三值定理，其中包括仪洪勋得到的关于亏值与唯一性的研究工作，也包括 Brosch 最近得到的周期函数与偶函数的唯一性、微分方程解的唯一性、具有分式线性变换关系的各种充分条件等研究工作. 第六章介绍有关亚纯函数的三值集合的研究工作，其中包括 Rubel，杨重骏和 Ozawa 得到的有关整函数二值集合的研究工作，也包括 Ueda，Tohge 得到的有关亚纯函数三值集合的研究工作. 第七章介绍各种类型的二值定理及一值定理，其中包括仪洪勋最近得到的关于具有二个或一个公共值的亚纯函数唯一性的研究工作，也包括仪洪勋解决杨重骏一个猜测的研究工作. 第八章介绍有关函数与其导数具有公共值问题的研究工作，其中包括 Frank，Ohlenroth，Weissenborn，Schwick 得到的关于函数与其 k 阶导数具有二个 CM 公共值或三个 IM 公共值问题的研究工作，也包括 Mues，Reinders 最近得到的关于函数及其微分多项式具有二个 CM 公共值或三个 IM 公共值问题的研究工作. 第九章介绍有关两函数的导数具有公共值问题的研究工作，其中包括 Köhler，Tohge 解决 Hinkkanen 提出的一个著名问题的研究工作，也包括仪洪勋、杨重骏解决杨重骏提出的一个著名问题的研究工作. 第十章介绍具有公共值集亚纯函数唯一性的研究工作，其中包括仪洪勋得到的函数具有四个、三个、二个或一个公共值集问题的研究工作，也包括仪洪勋最近得到的解决 Gross 提出的一个著名问题的研究工作.

本书是世界上关于亚纯函数唯一性理论这一研究方向的第一本专著，大部分内容是近年来这一研究方向的新成果. 本书参阅了世界上近二十年来，包括不少是作者研究成果在内的二百余篇学术论文及一些博士论文. 在撰写中，还加入了我们新近获得尚未发表的结果. 另外，本书特别注重此方向不同的研究技巧的介绍，对

其中的许多研究成果给予了精简、巧妙的证明，使得读者能用它们来解决更广泛更深入的有关问题.最后我们希望本书的出版，对于亚纯函数唯一性理论的研究，在国外能引起更多的共鸣及交流，在国内能结出更丰硕的成果.

本书的出版得到杨乐教授、李忠教授、庄圻泰教授和龚升教授的大力支持，作者在此表示衷心的感谢. Bergweiler 博士帮助查找资料. 杨连中、扈培础、周长桐、张庆彩、李平、杨永增等同志帮助校阅书稿，并提出了许多宝贵的意见，谨向他们表示谢意. 本书的出版还得到中国科学院科学出版基金和香港大学及理工学院拨款委员会的资助，在此一并表示感谢.

书中不当之处，敬请读者批评指正.

仪洪勋

杨重骏

1994年6月

目　　录

第一章 预备知识,Nevanlinna 基本理论

R. Nevanlinna 所创立的值分布论是亚纯函数唯一性理论的主要研究工具.本章将扼要叙述 Nevanlinna 基本理论.

最近,杨乐建立了几个精密的基本不等式,解决了 Hayman 提出的一个著名问题,并给出导数亏量和的估计,我们将在 §1.4 中介绍他在这方面的部分研究工作.

R. Nevanlinna 曾提出在第二基本定理的一般形式中是否可以把常数都替换为小函数的问题.庄圻泰解决了整函数的情况. N. Steinmetz 本质上使用庄圻泰方法解决了 Nevanlinna 这个著名问题.我们将在 §1.5 中叙述并证明这个结果.

R. Nevanlinna 关于亚纯函数组的一个定理在亚纯函数唯一性理论的研究中起到重要作用,我们将在 §1.7 中叙述并证明这个定理及其各种类型的改进和推广.

要在本章中包罗万象地列出全部所需的预备知识,既难以做到,也无此必要,故在以后各章中对于所需的预备知识,我们将分别叙述.

§1.1 特征函数与第一基本定理

1.1.1 特征函数

我们先引进正对数.

定义 1.1 对于 $x \geqslant 0$,定义

$$\log^+ x = \max(\log x, 0) = \begin{cases} \log x, & x \geqslant 1 \\ 0, & 0 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

容易看出,对于任意正数 x 有

$$\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}.$$

设函数 $f(z)$ 在 $|z| \leqslant R$ $(0 < R < \infty)$ 上亚纯，对于 $0 < r < R$，Nevanlinna[1,2] 引进以下几个函数.

定义 1.2 $m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta.$

$m(r,f)$ 也记为 $m(r,f=\infty)$ 或 $m(r,\infty)$，是 $|f(z)|$ 的正对数在 $|z| = r$ 上的平均值.

定义 1.3 $N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,f) - n(0,f)}{t} dt + n(0,f)\log r,$

这里 $n(t,f)$ 表示 $f(z)$ 在 $|z| \leqslant t$ 上的极点个数，重级极点按其重数计算，$n(0,f)$ 表示 $f(z)$ 在原点处极点的重级（当 $f(0) \neq \infty$ 时，则 $n(0,f) = 0$）.

$N(r,f)$ 有时也记为 $N(r,f=\infty)$ 或 $N(r,\infty)$，称为 $f(z)$ 极点的计数函数.

定义 1.4 $T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$

$T(r,f)$ 称为 $f(z)$ 的特征函数，显然它是非负函数.

设 a 为任一有穷复数，则 $\frac{1}{f(z)-a}$ 在 $|z| \leqslant R$ 上亚纯. 根据上述定义，Nevanlinna[1,2] 引进以下几个函数.

定义 1.2′ $m\left(r,\frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta.$

$m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$ 也记为 $m(r,f=a)$ 或 $m(r,a)$.

定义 1.3′

$$N\left(r,\frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t,\frac{1}{f-a}\right) - n\left(0,\frac{1}{f-a}\right)}{t} dt + n\left(0,\frac{1}{f-a}\right)\log r,$$

这里 $n\left(t,\frac{1}{f-a}\right)$ 表示在 $|z| \leqslant t$ 上 $f(z) - a$ 的零点个数，重级零点按其重数计算，$n\left(0,\frac{1}{f-a}\right)$ 表示 $f(z) - a$ 在原点的重级.

$n\left(t,\frac{1}{f-a}\right)$ 也记为 $n(t,f=a)$ 或 $n(t,a)$，$n\left(0,\frac{1}{f-a}\right)$ 也记为 $n(0,f=a)$ 或 $n(0,a)$，$N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$ 有时记为 $N(r,f=a)$ 或

$N(r,a)$，称作 $f(z)$ 的 a 值点的计数函数.

定义 1.4′ $T(r,\frac{1}{f-a})=m(r,\frac{1}{f-a})+N(r,\frac{1}{f-a})$.

$T(r,\frac{1}{f-a})$ 称为 $\frac{1}{f(z)-a}$ 的特征函数.

1.1.2 函数的积与和的特征函数

为了讨论有限个亚纯函数的积与和的特征函数，我们先注意正对数的几个性质.

设 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 为 p 个有穷复数，根据正对数的定义，容易推出

$$\log^+\left|\prod_{j=1}^{p}a_j\right|\leqslant\sum_{j=1}^{p}\log^+|a_j|$$

及

$$\log^+\left|\sum_{j=1}^{p}a_j\right|\leqslant\sum_{j=1}^{p}\log^+|a_j|+\log p.$$

于是，若 $f_j(z)(j=1,2,\cdots,p)$ 为 p 个于 $|z|<R$ 内的亚纯函数，则对于 $0<r<R$ 有

$$m(r,\prod_{j=1}^{p}f_j)\leqslant\sum_{j=1}^{p}m(r,f_j)\tag{1.1.1}$$

及

$$m(r,\sum_{j=1}^{p}f_j)\leqslant\sum_{j=1}^{p}m(r,f_j)+\log p.\tag{1.1.2}$$

此外对于 $0<r<R$ 显然有

$$n(r,\prod_{j=1}^{p}f_j)\leqslant\sum_{j=1}^{p}n(r,f_j)\tag{1.1.3}$$

及

$$n(r,\sum_{j=1}^{p}f_j)\leqslant\sum_{j=1}^{p}n(r,f_j).\tag{1.1.4}$$

若 $R>1$，则对于 $1\leqslant r<R$，显然有 $\log r\geqslant 0$，从(1.1.3)及(1.1.4)即可导出

$$N(r,\prod_{j=1}^{p}f_j)\leqslant\sum_{j=1}^{p}N(r,f_j)\tag{1.1.5}$$

及
$$N(r,\sum_{j=1}^{p}f_j)\leqslant\sum_{j=1}^{p}N(r,f_j).\tag{1.1.6}$$
于是,从(1.1.1),(1.1.2),(1.1.5),(1.1.6) 即可得出不等式
$$T(r,\prod_{j=1}^{p}f_j)\leqslant\sum_{j=1}^{p}T(r,f_j)\tag{1.1.7}$$
及
$$T(r,\sum_{j=1}^{p}f_j)\leqslant\sum_{j=1}^{p}T(r,f_j)+\log p.\tag{1.1.8}$$

若 $f_j(0)\neq\infty(j=1,2,\cdots,p)$,则对于 $0<r<R$,从(1.1.3)及(1.1.4) 也可导出(1.1.5) 及(1.1.6). 于是(1.1.7) 及(1.1.8)也成立.

1.1.3 Poisson-Jensen 公式

在 Nevanlinna 理论中,下述 Poisson-Jensen 公式起着十分重要的作用.

定理1.1 设函数 $f(\zeta)$ 在 $|\zeta|\leqslant R(0<R<\infty)$ 上亚纯,$a_\mu(\mu=1,2,\cdots,M)$,$b_\nu(\nu=1,2,\cdots,N)$ 分别为 $f(\zeta)$ 在 $|\zeta|<R$ 内的零点和极点.若 $z=re^{i\theta}$ 为 $|\zeta|<R$ 内不与 a_μ,b_ν 相重的任意一点,则
$$\log|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\varphi$$
$$+\sum_{\mu=1}^{M}\log\left|\frac{R(z-a_\mu)}{R^2-\bar{a}_\mu z}\right|-\sum_{\nu=1}^{N}\log\left|\frac{R(z-b_\nu)}{R^2-\bar{b}_\nu z}\right|.\tag{1.1.9}$$

证. 我们区分三种情形.

1) 假设 $f(\zeta)$ 在 $|\zeta|\leqslant R$ 上无零点和极点,故函数 $\frac{R^2-|z|^2}{R^2-\bar{z}\zeta}\log f(\zeta)$ 在 $|\zeta|\leqslant R$ 上全纯,于是由 Cauchy 公式有
$$\log f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{R^2-|z|^2}{(R^2-\bar{z}\zeta)(\zeta-z)}\log f(\zeta)d\zeta.\tag{1.1.10}$$
在上式中,将圆周 $|\zeta|=R$ 上的点以 $\zeta=Re^{i\varphi}(0\leqslant\varphi<2\pi)$ 表之,

于是(1.1.10)变成

$$\log f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\log f(Re^{i\varphi})d\varphi. \tag{1.1.11}$$

取实部,即得

$$\log|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\varphi \tag{1.1.12}$$

于是(1.1.9)成立.

2) 假设$f(\zeta)$仅在$|\zeta|=R$上有零点和极点,在$|\zeta|<R$内无零点和极点.

此时,(1.1.10)式右端的被积函数仅仅具有对数奇性,因而积分仍然有意义.在每个零点和极点处,只需对积分线圆周$|\zeta|=R$稍许作些改动,然后通过极限过程,即可证明(1.1.12)式成立,从而(1.1.9)式也成立.

3) 假设$f(\zeta)$在$|\zeta|<R$内有零点$a_\mu(\mu=1,2,\cdots,M)$和极点$b_\upsilon(\upsilon=1,2,\cdots,N)$.

置

$$F(\zeta)=f(\zeta)\frac{\prod\limits_{\upsilon=1}^{N}\left\{\dfrac{R(\zeta-b_\upsilon)}{R^2-\bar{b}_\upsilon\zeta}\right\}}{\prod\limits_{\mu=1}^{M}\left\{\dfrac{R(\zeta-a_\mu)}{R^2-\bar{a}_\mu\zeta}\right\}}. \tag{1.1.13}$$

则易见$F(\zeta)$在$|\zeta|<R$内全纯,且无零点.对$F(\zeta)$应用(1.1.12)式,并注意到,当$\zeta=Re^{i\varphi}$,$|a|<R$时,

$$\left|\frac{R(\zeta-a)}{R^2-\bar{a}\zeta}\right|=\left|\frac{Re^{i\varphi}-a}{R-\bar{a}e^{i\varphi}}\right|=\left|\frac{R-ae^{-i\varphi}}{R-\bar{a}e^{i\varphi}}\right|=1,$$

则得到

$$\log|F(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\varphi. \tag{1.1.14}$$

由(1.1.13)得

$$\log|F(z)| = \log|f(z)| + \sum_{\nu=1}^{N}\log\left|\frac{R(z-b_\nu)}{R^2-\bar{b}_\nu z}\right| - \sum_{\mu=1}^{M}\log\left|\frac{R(z-a_\mu)}{R^2-\bar{a}_\mu z}\right|.$$

将此代入(1.1.14)即得(1.1.9).

定理1.1中的公式(1.1.9)是复分析中的一个重要公式,由定理1.1可以推出

系1. 在定理1.1的条件下,若$f(\zeta)$在$|\zeta|\leqslant R$上没有零点和极点,则对于任意点z,$|z|=r<R$,有

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\varphi. \tag{1.1.15}$$

这就是Poisson公式.

系2. 在定理1.1的条件下,若$f(0)\neq 0,\infty$,则

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|d\varphi - \sum_{\mu=1}^{M}\log\frac{R}{|a_\mu|} + \sum_{\nu=1}^{N}\log\frac{R}{|b_\nu|}. \tag{1.1.16}$$

这就是Jensen公式.

若$f(0)=0$或∞,设$f(\zeta)$在原点邻域内的Laurent展式为

$$f(\zeta) = c_\lambda\zeta^\lambda + c_{\lambda+1}\zeta^{\lambda+1} + \cdots,\ c_\lambda \neq 0,$$

显然有

$$\lambda = n(0,\frac{1}{f}) - n(0,f).$$

命

$$g(\zeta) = \begin{cases} f(\zeta)(\frac{R}{\zeta})^\lambda, & \zeta\neq 0 \\ c_\lambda R^\lambda, & \zeta = 0. \end{cases}$$

显然$g(\zeta)$在$|\zeta|\leqslant R$上亚纯,且$g(0)\neq 0,\infty$.对$g(\zeta)$应用Jensen公式(1.1.16),并注意到$|g(Re^{i\varphi})|=|f(Re^{i\varphi})|$,则得

$$\log|c_\lambda| + \lambda\log R = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|d\varphi$$

$$-\sum_{0<|a_\mu|<R}\log\frac{R}{|a_\mu|}+\sum_{0<|b_\upsilon|<R}\log\frac{R}{|b_\upsilon|}.$$

即

$$\log|c_\lambda|+n(0,\frac{1}{f})\log R=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|d\varphi$$
$$-\sum_{0<|a_\mu|<R}\log\frac{R}{|a_\mu|}+\sum_{0<|b_\mu|<R}\log\frac{R}{|b_\mu|}+n(0,f)\log R.$$
(1.1.17)

这就是 Jensen 公式的一般形式.

1.1.4 第一基本定理

引理 1.1 设 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant R$ $(0<R<\infty)$ 上亚纯，在原点邻域内的 Laurent 展式为

$$f(z)=c_\lambda z^\lambda+c_{\lambda+1}z^{\lambda+1}+\cdots,\ c_\lambda\neq 0,$$

则对于 $0<r<R$ 有

$$T(r,f)=T(r,\frac{1}{f})+\log|c_\lambda|. \tag{1.1.18}$$

证. 设 $a_\mu(\mu=1,2,\cdots,M)$，$b_\upsilon(\upsilon=1,2,\cdots,N)$ 分别为 $f(z)$ 在 $0<|z|<r$ 内的零点和极点，由(1.1.17)得

$$\log|c_\lambda|+n(0,\frac{1}{f})\log r=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta$$
$$-\sum_{\mu=1}^{M}\log\frac{r}{|a_\mu|}+\sum_{\upsilon=1}^{N}\log\frac{r}{|b_\upsilon|}+n(0,f)\log r.$$
(1.1.19)

注意到

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})|}d\theta,$$

$$\sum_{\mu=1}^{M}\log\frac{r}{|a_\mu|}=\int_0^r\frac{n(t,\frac{1}{f})-n(0,\frac{1}{f})}{t}dt,$$
$$\sum_{\upsilon=1}^{N}\log\frac{r}{|b_\upsilon|}=\int_0^r\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt.$$

于是(1.1.19) 可以写成

$$\log|c_\lambda| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})|}d\theta$$

$$+\int_0^r \frac{n\left(t,\frac{1}{f}\right)-n(0,\frac{1}{f})}{t}dt + n(0,\frac{1}{f})\log r$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta + \int_0^r\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt$$

$$+n(0,f)\log r. \qquad (1.1.20)$$

使用特征函数的符号,(1.1.20) 即化为(1.1.18).

公式(1.1.18) 表示了亚纯函数 $f(z)$ 与$\frac{1}{f(z)}$ 的特征函数之间的关系，这是 Jensen 公式的另一种写法，所以也称它为 Jensen-Nevanlinna 公式. 利用公式(1.1.18) 还可以推出亚纯函数 $f(z)$ 的特征函数 $T(r,f)$ 与$\frac{1}{f(z)-a}$ 的特征函数 $T(r,\frac{1}{f-a})$ 之间的关系,这就是下面 Nevanlinna 关于亚纯函数的第一基本定理.

定理 1.2 设 $f(z)$ 于 $|z|<R(\leqslant\infty)$ 内亚纯. 若 a 为任一有穷复数,则对于 $0<r<R$ 有

$$T(r,\frac{1}{f-a}) = T(r,f) + \log|c_\lambda| + \varepsilon(a,r), \qquad (1.1.21)$$

其中 c_λ 为$\frac{1}{f(z)-a}$ 在原点的 Laurent 展式中第一个非零系数,而

$$|\varepsilon(a,r)| \leqslant \log^+|a| + \log 2. \qquad (1.1.22)$$

证. 对于$\frac{1}{f(z)-a}$ 应用公式(1.1.18) 有

$$T(r,\frac{1}{f-a}) = T(r,f-a) + \log|c_\lambda|.$$

再由(1.1.8) 得

$$T(r,f-a) \leqslant T(r,f) + \log^+|a| + \log 2$$

及

$$T(r,f) = T(r,f-a+a)$$
$$\leqslant T(r,f-a) + \log^+|a| + \log 2,$$

便立即有定理的结论.

公式(1.1.21) 可简单写作

$$T(r,\frac{1}{f-a})=T(r,f)+O(1). \qquad (1.1.23)$$

它表达了,对任一有穷复数 a,$T(r,\frac{1}{f-a})$ 与 $T(r,f)$ 仅仅相差一个有界量.

1.1.5 Cartan 恒等式,级

为了获得特征函数的一些性质,我们需要 Cartan[1] 的一个恒等式,为此先证明

引理 1.2 设 a 为任一有穷复数,则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|a-e^{i\theta}|d\theta=\log^+|a|. \qquad (1.1.24)$$

证. 当 $a=0$ 时,(1.1.24) 显然成立. 当 $|a|>1$ 时,$a-z$ 在 $|z|<1$ 内既无零点也无极点,于是由 Jensen 公式得

$$\log|a|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|a-e^{i\theta}|d\theta.$$

当 $0<|a|\leqslant 1$ 时,$a-z$ 在 $|z|<1$ 内有一个零点 a 而无极点,于是由 Jensen 公式得

$$\log|a|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|a-e^{i\theta}|d\theta-\log\frac{1}{|a|}.$$

这就证明,无论在哪种情况都有(1.1.24).

定理 1.3 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内亚纯,且 $f(0)\neq\infty$,则对于 $0<r<R$ 有

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}})d\theta+\log^+|f(0)|. \qquad (1.1.25)$$

证. 对 $f(z)-e^{i\theta}$ 应用 Jensen 公式有

$$\log|f(0)-e^{i\theta}|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|d\varphi$$
$$+N(r,f)-N(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}).$$

再对 θ 积分,并交换右端首项的积分次序,则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(0)-e^{i\theta}|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|d\theta\right\}d\varphi$$