

应用数学丛书

广义函数及其解析和调和表示

李邦河 李雅卿 编著

国防工业出版社



11.624
251

应用数学丛书

广 义 函 数 及 其解析和调和表示

李邦河 李雅卿 编著

国防工业出版社

(京)新登字106号

2015/23

内 容 简 介

本书是由我国学者编著的关于广义函数的一本专著。全书共九章。前四章是广义函数的基本理论,第五章给出了带参数的广义函数的一般理论及例。对仅想了解广义函数基础知识的读者,可以只读这五章。

第六章给出了单变量广义函数的解析表示的一般形式,这是本书的重要部分。第七章至第九章的内容,均是作者自己的工作,其中第八章的内容则是首次发表。关于广义函数在一点的阶及广义函数的乘法,系作者首创。

本书和国外同类书相比较,最大的特色就是尽可能自封地来系统叙述广义函数的解析和调和理论。在解析表示的具体求法上,本书不仅方法统一,且所得结果丰富。

本书适用于供数学、力学和物理学工作者及高等院校师生使用,亦可供有关专业的工程技术人员参考。

应用数学丛书

广义函数及其解析和调和表示

李邦河 李雅卿 编著

*

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号)

(邮政编码 100044)

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168毫米 32开本 印张9⁵/₈ 247千字

1992年11月第一版 1992年11月第一次印刷 印数: 0001—2500册

ISBN 7-118-01011-1/O·80 定价: 8.85元

应用数学丛书目录

第 一 批

- | | | | |
|------------------|------------|-----|----|
| 1. Z 变换与拉普拉斯变换 | <u>关肇直</u> | 王恩平 | 编著 |
| 2. 常微分方程及其应用 | 秦化淑 | 林正国 | 编著 |
| 3. 实变函数论基础 | | 胡钦训 | 编著 |
| 4. 正交函数及其应用 | | 柳重堪 | 编著 |
| 5. 沃尔什函数与沃尔什变换 | <u>关肇直</u> | 陈文德 | 编著 |
| 6. 圆柱函数 | | 刘 颖 | 编著 |

第 二 批

- | | | | |
|------------|-----|-----|----|
| 1. 集合论 | | 程极泰 | 编著 |
| 2. 图论 | | 王朝瑞 | 编著 |
| 3. 概率论 | | 狄昂照 | 编著 |
| 4. 矩阵理论 | 王耕禄 | 史荣昌 | 编著 |
| 5. 复变函数论 | | 杨维奇 | 编著 |
| 6. 逼近论 | 徐利治 | 周蕴时 | 编著 |
| 7. 矢量与张量分析 | 冯潮清 | 赵愉深 | 编著 |
| 8. 应用泛函分析 | | 柳重堪 | 编著 |

第 三 批

- | | | | |
|---------------|-----|-----|----|
| 1. 网络理论 | | 张正寅 | 编著 |
| 2. 线性系统与多变量控制 | | 叶庆凯 | 编著 |
| 3. 椭圆函数及其应用 | | 高本庆 | 编著 |
| 4. 拓扑理论及其应用 | 王则柯 | 凌志英 | 编著 |
| 5. 数理逻辑 | | 沈百英 | 编著 |
| 6. 误差理论与数据处理 | | 贾沛璋 | 编著 |
| 7. 随机过程理论及应用 | | 熊大国 | 编著 |
| 8. 线性估计与随机控制 | 卢伯英 | 陈宗基 | 编著 |
| 9. 渐近分析方法及应用 | 徐利治 | 陈文忠 | 编著 |

IV

- | | | |
|-------------------|-----|----|
| 10. 预测的数学方法 | 张有为 | 编著 |
| 11. 变分法及其应用 | 叶庆凯 | 编著 |
| 12. 应用离散数学 | 陈文德 | 编著 |
| 13. 多项式与多项式矩阵 | 王恩平 | 编著 |
| 14. 群论 | 刘木兰 | 编著 |
| *15. 应用组合论 | 刘振宏 | 编著 |
| 16. 广义函数及其解析和调和表示 | 李邦河 | 编著 |

* 表示即将出版的书目。

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术研究的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相联，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学；应用数学有关领域的基础介绍；应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成系统，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前 言

广义函数理论的创立是本世纪数学发展史上一件重大的事情。它使微积分学进入一个新的阶段。今天，广义函数已进入许多数学分支，成为现代数学家手中的有力武器。在量子力学，量子场论和对某些工程技术问题的数学处理中，广义函数也是不可缺少的工具。

广义函数概念的形成经历了漫长的时期。数学上不严格的广义函数，也早已为物理学家所使用。目前广泛采用的广义函数的定义首先由索伯列夫（С. Л. Соболев）于1936年明确引进，并被应用于微分方程理论。施瓦兹（L. Schwartz）于1945~1950年期间出版了若干篇论文和一本专著，创立了广义函数的系统理论。他的工作在数学界产生了很大的影响。施瓦兹因此而于1950年获得当时数学界的最高荣誉——菲尔兹奖章。

本书写作的目的：一是给出广义函数理论的基础知识，二是介绍这一分支某些新近的发展。前四章是广义函数的基本理论，第五章给出带参数的广义函数的一般理论和各种例子。第六章是本书的重要部分，给出了单变量广义函数的解析表示的一般理论，并用统一的方法算出了各种常见的特殊广义函数的解析表示，其中有些解析表示为作者首先求出。第七章至第九章，主要是作者自己的工作，其中第八章的材料是不曾发表过的。此外，对于广义函数的一种推广——超函数，本书也已用调和函数给出了它的一个定义。

在写作本书时，作者力图做到的是：

一、尽可能地通俗。例如，1. 本书避免了线性拓扑空间的抽象概念，只在线性空间中引进极限运算。2. 通常在证明拉普拉斯方程的基本解时，要用到斯托克斯公式或它的特殊形式——奥高公式，我们避免了这些公式的使用，直接采用分部积分法，

因而要初等一些。3. 我们尽量避免运用泛函分析的知识, 如在证明广义函数在有界开集上是连续函数的某阶导数时, 通常总要运用汉-巴拿赫定理, 而我们则从调和表示出发证明, 避去了汉-巴拿赫定理。

二、尽可能地自封。除了微积分、点集拓扑、实变函数论和复变函数论的最基本的知识外, 本书基本上是自封的。例如, 关于调和函数可展开成齐次调和多项式级数的事实, 我们没有求助于调和分析理论, 而是从证明调和函数的解析性着手, 作泰勒级数而得到的。

三、尽可能地不雷同。广义函数的书, 由国人写的虽未见过(冯康教授有系统介绍广义函数的长文), 但已出版盖尔芳特等人著的名著《广义函数》中译本数卷。此外, 外文版的同类书更是不少见。因此, 本书在取材和书写上尽量做到有自己的特色。第七章和第八章的内容基本上未曾在其他书中出现过。写广义函数的解析表示的, 已有勃雷沫曼(H. Bremermann)的流传颇广的好书(见书末参考文献[15])。论述这一专题的本书第六章, 则是在第五章系统论述带参数的广义函数的基础上, 强调带解析参数的广义函数的解析表示, 在理论的广度和具体求解析表示的方法上都避免了与[15]的雷同。关于缓增广义函数的傅里叶变换的解析表示是很精彩的, 但在[15]中, 对此已有很好的阐述。因此, 我们在本书中就忍痛割爱了。为了体现易读初等的特色, 作者在广义函数领域的不少工作被忍痛割爱了。例如未写入书中的关于广义函数的黎斯变换, 解析和调和延拓与广义极限的关系, 拉普拉斯方程的初值理论等的工作都是本书内容的深化。此外, 作者运用非标准分析于广义函数乘法的一系列工作亦未在书中涉及, 有兴趣的读者可参阅书末所附的参考文献。

广义函数, 顾名思义是普通函数的推广, 因而自然包括了某些“坏”的函数, 而解析函数则是一类很“好”的函数。但广义函数却可以用解析函数(对于多变量广义函数而言, 事实上是调和函数, 也是一类很“好”的函数)来表示。“坏”的函数与“好”

的函数之间的这种内在联系体现了广义函数理论的优美。揭示“好”与“坏”之间的这种奇妙的联系，正是本书的主线，也是本书命名的原因所在。

对于仅仅想通过本书来了解广义函数的基础知识的读者，可以只读前五章或甚至只读前四章。在那里，函数论的知识所用较浅。因而对更多的读者来说是更容易读的。

本书追求论证的详尽和初等，而不是论证的简短，为的是使更多的读者读起来要轻松些。但由于写作的匆忙，书中失之过繁或失之过简以及安排不当或错误之处，恐在所难免，敬请读者不吝指正。

李邦河 李雅卿

目 录

第一章 广义函数的定义和例子	1
§ 1.1 从 δ 函数谈起	1
§ 1.2 试验函数空间	3
1.2.1 $\mathcal{D}$ —具紧支集的 C^∞ 函数空间	4
1.2.2 $\mathcal{D}^m$ — m 次连续可微的具紧支集的函数空间	5
1.2.3 空间 $\mathcal{D}_S$ 和 $\mathcal{D}'_S$	6
1.2.4 空间 C^m 和 C^∞	6
1.2.5 急降函数空间 $\mathcal{S}$	6
1.2.6 各种试验函数空间的关系	7
1.2.7 稠密性定理	12
§ 1.3 广义函数的定义	12
1.3.1 施瓦兹广义函数空间 $\mathcal{D}'$, 支集	13
1.3.2 单位分解	14
1.3.3 广义函数的支集的特征性质	15
1.3.4 用支集表征的零广义函数的特性	16
1.3.5 广义函数的局部性	16
1.3.6 紧支集广义函数空间 $(C^\infty)'$	16
1.3.7 阶 $\leq m$ 的广义函数空间 $(\mathcal{D}^m)'$	17
1.3.8 阶 $\leq m$ 的紧支集的广义函数空间 $(C^m)'$	17
1.3.9 缓增广义函数空间 $\mathcal{S}'$	18
1.3.10 只需考虑实值试验函数	18
1.3.11 广义函数的实部和虚部	18
§ 1.4 广义函数的例子	18
1.4.1 普通函数作为广义函数	18
1.4.2 δ 函数	19
1.4.3 拉冬测度空间 $(\mathcal{D}^0)'$	19
1.4.4 广义函数 x^{-1}	20
1.4.5 通过取阿达玛有限部分定义的广义函数 $x^{\pm 1}_0$	21
1.4.6 广义函数 $x^{\pm 1}_0, x ^{\pm 1}, x ^{\pm 1} \operatorname{sgn} x$	24
1.4.7 $\mathbb{R}^1$ 上的函数不是广义函数的例子	25
1.4.8 由奇异积分定义的广义函数	26
1.4.9 不连续的线性泛函	28

第二章 广义函数的极限和导数	29
§ 2.1 广义函数的极限	29
2.1.1 各种广义函数空间的完备性	29
2.1.2 缓增和紧支集广义函数都是有阶的	37
§ 2.2 广义函数的极限的例子	39
2.2.1 在紧集上一致收敛的连续函数序列	39
2.2.2 局部可积函数的受控收敛	40
2.2.3 广义函数 $\ln(x+i0)$ 和 $\ln(x-i0)$	42
2.2.4 δ -序列	44
§ 2.3 广义函数的导数	49
2.3.1 若 $T \in (\mathcal{D}'_S)'$, 则 $\frac{\partial T}{\partial x_i} \in (\mathcal{D}'_S)^{n+1}'$	50
2.3.2 若 $T \in (C^m)'$, 则 $\frac{\partial T}{\partial x_i} \in (C^{m+1})'$	50
2.3.3 若 $T \in \mathcal{S}'$, 则 $\frac{\partial T}{\partial x_i} \in \mathcal{S}'$	50
2.3.4 收敛的广义函数级数可以逐项求导数	51
§ 2.4 广义函数的导数的例子	52
2.4.1 海维赛函数的导数是 δ 函数	52
2.4.2 δ 函数的导数	52
2.4.3 $\ln x_+$ 的导数是 x_+^{-1}	53
2.4.4 $\ln x $ 的导数是 x^{-1}	53
2.4.5 $\ln(x+i0)$ 的导数	53
2.4.6 x_+^λ 的导数是 $\lambda x_+^{\lambda-1}$, 当 $\lambda \neq$ 负整数	53
2.4.7 x_+^{-n} 的导数 $(x_+^{-n})' = -nx_+^{-n-1} + \frac{(-1)^n}{n!} \delta^{(n)}(x)$	54
2.4.8 x^{-n} 的导数 $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$	55
2.4.9 广义函数 $(x+i0)^\lambda$ 和 $(x-i0)^\lambda$ 及其导数	55
2.4.10 $n \geq 3$ 时, $\Delta r^{2-n} = \frac{(2-n)2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \delta$	56
2.4.11 $n=2$ 时, $\Delta \ln r = 2\pi \delta$	62
第三章 直积、卷积和原函数	66
§ 3.1 广义函数的直积	66
§ 3.2 广义函数的原函数	72
§ 3.3 广义函数的卷积	76
3.3.1 勒贝格可积函数的卷积	73

3.3.2	任意广义函数与紧支集广义函数的卷积的定义与可交换性	77
3.3.3	卷积的连续性	79
3.3.4	广义函数与 C^∞ 函数的卷积	80
3.3.5	广义函数用 C^∞ 函数逼近	84
3.3.6	卷积的导数	84
3.3.7	卷积的结合律	85
3.3.8	卷积的支集	86
3.3.9	卷积的奇异支集	86
§ 3.4	柯西-黎曼方程的广义函数解	88
第四章	缓增广义函数的傅里叶变换	92
§ 4.1	空间 $\mathcal{S}$ 的傅里叶变换	92
§ 4.2	空间 $\mathcal{S}'$ 的傅里叶变换	97
§ 4.3	紧支集广义函数的傅里叶变换	100
§ 4.4	乘积和卷积的傅里叶变换	103
4.4.1	试验函数空间的乘子	103
4.4.2	Φ 的乘子与 Φ -广义函数的乘积	103
4.4.3	卷积的傅里叶变换	103
§ 4.5	对常系数微分方程的应用	105
4.5.1	拉普拉斯方程的缓增广义函数解	105
4.5.2	拉普拉斯算子的缓增广义特征函数	109
4.5.3	常系数微分方程的基本解	109
第五章	带参数的广义函数	111
§ 5.1	带参数的广义函数的一般理论	111
§ 5.2	带参数的广义函数的例子	117
5.2.1	x_+^λ 和 $x_+^\lambda/\Gamma(\lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}^1$	117
5.2.2	x_-^λ 和 $x_-^\lambda/\Gamma(\lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}^1$	120
5.2.3	$ x ^\lambda$, $ x ^\lambda/\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)$, $ x ^\lambda \operatorname{sgn} x$ 和 $ x ^\lambda \operatorname{sgn} x/\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)$	120
5.2.4	$x_+^\lambda \ln^k x$ 和 $x_+^\lambda \ln^k x$, $\lambda \in \mathbb{C}$, k 非负整数, $x \in \mathbb{R}^1$	121
5.2.5	$ x ^\lambda \ln^k x $ 和 $ x ^\lambda \ln^k x \operatorname{sgn} x$, $\lambda \in \mathbb{C}$, k 非负整数, $x \in \mathbb{R}^1$	122
5.2.6	r^λ , $\lambda \in \mathbb{C}$, $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$	123
5.2.7	$r^\lambda \ln^k r$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots$	131
§ 5.3	多重拉普拉斯方程的基本解	132
第六章	单变量广义函数的解析表示	135

§ 6.1	解析表示的定义和紧支集广义函数的柯西表示	135
§ 6.2	解析表示的存在性	137
§ 6.3	解析表示的特征性质	141
§ 6.4	解析微分算子对解析表示的作用	150
§ 6.5	解析表示的例子和反例	154
6.5.1	反例	154
6.5.2	δ 函数和它的导数的柯西表示	155
6.5.3	广义函数 δ_+ 和 δ_-	155
6.5.4	广义函数 $(x+i0)^\lambda \ln^k(x+i0)$ 和 $(x-i0)^\lambda \ln^k(x-i0)$	156
6.5.5	$(x \pm i0)^\lambda$ 对 λ 和对 x 的导数	157
6.5.6	$\ln(x+i0)$ 和 $\ln(x-i0)$ 的导数	158
6.5.7	$\lambda \neq$ 整数时, x_+^λ 和 x_-^λ 的解析表示	158
6.5.8	n 是整数时, x_+^n 和 x_-^n 的解析表示	159
6.5.9	海维赛函数的解析表示	161
6.5.10	$x_+^\lambda \ln^k x_+$ 和 $x_-^\lambda \ln^k x_-$ 的解析表示, $\lambda \neq$ 整数	162
6.5.11	$x_+^n \ln^k x_+$ 和 $x_-^n \ln^k x_-$ 的解析表示, n 是整数	162
6.5.12	$\ln x_+$ 和 $\ln x_-$ 的解析表示	167
6.5.13	$\ln^2 x_+$ 和 $\ln^2 x_-$ 的解析表示	167
6.5.14	$\lambda \neq$ 整数时, $ x ^\lambda$ 和 $ x ^\lambda \operatorname{sgn} x$ 的解析表示	168
6.5.15	$ x ^n$ 和 $ x ^n \operatorname{sgn} x$ 的解析表示	168
6.5.16	x^n 的解析表示	169
6.5.17	x^n 和 $(x+i0)^n$, $(x-i0)^n$ 的关系	169
6.5.18	x^n 的导数	170
6.5.19	x^{-n} 和 δ_+ , δ_- 的关系	170
6.5.20	有理函数作为广义函数及其解析表示	171
§ 6.6	解析表示在实轴附近的性状	172
§ 6.7	局部解析表示	178
6.7.1	P_+^1 的局部解析表示系	179
6.7.2	亚纯函数作为广义函数及其局部解析表示系	181
第七章	广义函数的调和表示	183
§ 7.1	拉普拉斯方程的广义解	183
§ 7.2	广义极限与调和延拓	185
§ 7.3	广义极限和解析延拓	195
§ 7.4	单变量广义函数的调和表示和解析表示的关系	199

§ 7.5	调和函数的泰勒级数	202
§ 7.6	调和表示的存在性	207
7.6.1	紧支集广义函数的泊松表示	207
7.6.2	$\mathbf{R}^n$ 上任意广义函数的调和表示	212
§ 7.7	调和表示的特征性质	215
§ 7.8	调和表示的例子	223
7.8.1	广义函数的导数的调和表示	223
7.8.2	δ 函数的导数的调和表示	223
7.8.3	$(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}$ 的调和表示	224
7.8.4	$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}$ 的调和表示	224
7.8.5	整函数的调和表示	226
7.8.6	多项式的调和表示	230
7.8.7	调和函数和广义函数的直积的调和表示	231
§ 7.9	广义函数的局部结构	231
第八章	广义函数在一点的阶	236
§ 8.1	在开集上的阶	237
§ 8.2	在一点的阶	239
§ 8.3	单变量广义函数的阶的判定	241
§ 8.4	单变量 m 阶广义函数的 m 阶点的集合	250
§ 8.5	阶 $\leq m$ 的单变量广义函数的分解	256
§ 8.6	比较单变量广义函数的阶的两种定义	264
第九章	广义函数的乘法	267
§ 9.1	调和乘法作为乘子乘法的推广	269
§ 9.2	单变量广义函数的调和乘积的例子	276
§ 9.3	关于单变量广义函数的调和乘积的一个定理	281
参考文献		293

第一章 广义函数的定义和例子

§ 1.1 从 δ 函数谈起

为什么从 δ 函数谈起呢？因为最为人熟知的不是普通函数的广义函数大概就是 δ 函数。通过对 δ 函数的分析，可以看到，即将引进广义函数的定义是很自然的，有着明显的实际背景的。当然，由这样的分析而走向广义函数的定义的过程，并不是发现广义函数的历史过程。一个科学的定义的发现的历史过程，往往是很曲折的，因为科学家们是在黑暗中摸索着去接近这个合理的定义。而这个合理的定义一旦被发现，它就会从黑暗中走出来，暴露在光天化日之下。人们也会立刻明白过来：呵，原来它是这样的！在这一节里要说明的就是：原来广义函数是这样的！

按物理学家的定义，1维 δ 函数是实轴上除原点外取值零，而在原点取值正无穷大，且在整个实轴上积分为1的函数，即

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

如果把 $\delta(x)$ 看作是一个勒贝格可积函数，则因它几乎处处等于零，由实变函数论可知，其勒贝格积分应该是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 0$$

因此 $\delta(x)$ 不是勒贝格可积函数，当然更不是黎曼可积函数。它是一个真正奇异的函数！

把 δ 函数排斥在普通函数的大门之外的是它的性质
 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ 。设 (a, b) 是一个开区间，则应有

$$\int_a^b \delta(x) dx = \begin{cases} 0, & 0 \notin (a, b) \\ 1, & 0 \in (a, b) \end{cases}$$

δ 函数的物理意义是集中在原点的单位物理量: 单位质量、单位电荷等等。而 $\int_a^b \delta(x) dx$ 反映的是落在区间 (a, b) 中的总的物理量。设有一物理量 T 分布在实轴上, 我们不知道该物理量 T 在每一点的分布密度, 却知道在每一开区间 U 中的总量是 $T(U)$ 。若有

$$T(U) = \begin{cases} 0, & 0 \notin U \\ 1, & 0 \in U \end{cases}$$

则显然 T 的总量是 1, 而且全部集中在原点, 故 T 的密度函数就是 $\delta(x)$ 。因此, 不把 δ 函数看成是实轴上的函数, 而把它看成是由实轴上的开区间形成的集合上的函数, 则对应

$$U \longrightarrow \delta(U) = \int_U \delta(x) dx$$

完全刻划了 δ 函数。这也可以说是 δ 函数的一个严格的数学定义。

设 $f(x)$ 是一个连续函数, U 是有限开区间, 令 $f(U) = \int_U f(x) dx$, 则对应 $U \longrightarrow f(U)$ 确定了一个从有限开区间的集合到实数集合的对应。如果 $g(x)$ 是另一个连续函数, 且对任意有限开区间 U 有

$$f(U) = g(U)$$

则容易证明 $f(x) \equiv g(x)$ 。熟悉实变函数论的读者可设想上面的 f 和 g 是局部勒贝格可积函数, 而得到 f 和 g 几乎处处相等的结论。即从实变函数的观点来看, 这样的 f 和 g 是一样的。

综合上述, 可知通过考虑有限开区间集合到实数集合的对应, 不仅可以描述连续函数, 勒贝格可积函数, 而且还可以描述 δ 函数。这就是说, 有限开区间的集合上的函数的概念真正扩充了连续函数, 甚至是实变函数的概念。

但有限开区间的集合与实数的集合比较, 有一个明显的缺点: 不能进行线性运算。即若 U_1, U_2 是两个有限开区间, α_1, α_2 是两个实数, $\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2$ 没有意义。用 χ_U 表示 U 的特征函数, 即

$$\chi_U(x) = \begin{cases} 0, & x \notin U \\ 1, & x \in U \end{cases}$$

则可把 $\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2$ 理解为函数 $\alpha_1 \chi_{U_1}(x) + \alpha_2 \chi_{U_2}(x)$ 。但此时 $\alpha_1 \chi_{U_1} + \alpha_2 \chi_{U_2}$ 一般地说已不再是某有限开区间的特征函数。设 f 是连续函数, 则有

$$f(U) = \int_U f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \chi_U(x) dx$$

令 $f(\chi_U) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \chi_U(x) dx$, 定义

$$f(\alpha_1 \chi_{U_1} + \alpha_2 \chi_{U_2}) = \alpha_1 f(\chi_{U_1}) + \alpha_2 f(\chi_{U_2})$$

则 f 可被看成某种线性泛函。对 δ 函数, 一个熟知的性质是: 对任意连续函数 φ , 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

因此, δ 函数可被看成连续函数空间上的线性泛函。

于是, 得到了把普通函数视为某类函数空间上的线性泛函来推广函数概念的途径。下面将看到, 适当地选取这类函数空间, 将不仅可以推广函数的概念, 而且可使微分与积分等运算不受约束, 比在普通微积分中还要灵活自如。因此, 广义函数理论的出现, 不仅在数学上严格地描述了来自物理学中的 δ 函数一类的“奇异函数”, 而且对微积分以及微分方程理论等的发展也有着重要的意义。它是人类对自然界中存在的数量关系的认识的深化的一个反映。

§1.2 试验函数空间

上一节中已谈到: 推广普通的函数概念的一条自然的途径是把它们看成某种函数空间上的线性泛函。这种函数空间中的元素