应用数学丛书

广义函数及其解析和调和表示

李邦河　李雅卿　编著

国防工业出版社

51.624
231

应用数学丛书

广义函数及其解析和调和表示

李邦河　李雅卿　编著

国防工业出版社

(京)新登字106号

2015/12-3

内容简介

本书是由我国学者编著的关于广义函数的一本专著。全书共九章。前四章是广义函数的基本理论，第五章给出了带参数的广义函数的一般理论及例。对仅想了解广义函数基础知识的读者，可以只读这五章。

第六章给出了单变量广义函数的解析表示的一般形式，这是本书的重要部分。第七章至第九章的内容，均是作者自己的工作，其中第八章的内容则是首次发表。关于广义函数在一点的阶及广义函数的乘法，系作者首创。

本书和国外同类书相比较，最大的特色就是尽可能自封地来系统叙述广义函数的解析和调和理论。在解析表示的具体求法上，本书不仅方法统一，且所得结果丰富。

本书适用于供数学、力学和物理学工作者及高等院校师生使用，亦可供有关专业的工程技术人员参考。

应用数学丛书
广义函数及其解析和调和表示
李邦河　李雅卿　编著
*
国防工业出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路23号）
（邮政编码 100044）
新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装
*
850×1168毫米　32开本　印张$9^5/_8$　247千字
1992年11月第一版　1992年11月第一次印刷　印数：0001—2500册

ISBN 7-118-01011-1/O·80　定价：8.85元

应用数学丛书目录

第　一　批

1. Z变换与拉普拉斯变换　关肇直　王恩平　编著
2. 常微分方程及其应用　秦化淑　林正国　编著
3. 实变函数论基础　胡钦训　编著
4. 正交函数及其应用　柳重堪　编著
5. 沃尔什函数与沃尔什变换　关肇直　陈文德　编著
6. 圆柱函数　刘　颖　编著

第　二　批

1. 集合论　程极泰　编著
2. 图论　王朝瑞　编著
3. 概率论　狄昂照　编著
4. 矩阵理论　王耕禄　史荣昌　编著
5. 复变函数论　杨维奇　编著
6. 逼近论　徐利治　周蕴时　孙玉柏　编著
7. 矢量与张量分析　冯潮清　赵愉深　何浩法　编著
8. 应用泛函分析　柳重堪　编著

第　三　批

1. 网络理论　张正寅　编著
2. 线性系统与多变量控制　叶庆凯　编著
3. 椭圆函数及其应用　高本庆　编著
4. 拓扑理论及其应用　王则柯　凌志英　编著
5. 数理逻辑　沈百英　编著
6. 误差理论与数据处理　贾沛璋　编著
7. 随机过程理论及应用　熊大国　编著
8. 线性估计与随机控制　卢伯英　陈宗基　编著
9. 渐近分析方法及应用　徐利治　陈文忠　编著

* 表示即将出版的书目。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

出 版 说 明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术研究的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相联，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学；应用数学有关领域的基础介绍；应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成系统，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前　　言

广义函数理论的创立是本世纪数学发展史上一件重大的事情。它使微积分学进入一个新的阶段。今天，广义函数已进入许多数学分支，成为现代数学家手中的有力武器。在量子力学，量子场论和对某些工程技术问题的数学处理中，广义函数也是不可缺少的工具。

广义函数概念的形成经历了漫长的时期。数学上不严格的广义函数，也早已为物理学家所使用。目前广泛采用的广义函数的定义首先由索伯列夫（С.Л.Соболев）于1936年明确引进，并被他应用于微分方程理论。施瓦兹（L.Schwartz）于1945～1950年期间出版了若干篇论文和一本专著，创立了广义函数的系统理论。他的工作在数学界产生了很大的影响。施瓦兹因此而于1950年获得当时数学界的最高荣誉——菲尔兹奖章。

本书写作的目的：一是给出广义函数理论的基础知识，二是介绍这一分支某些新近的发展。前四章是广义函数的基本理论，第五章给出带参数的广义函数的一般理论和各种例子。第六章是本书的重要部分，给出了单变量广义函数的解析表示的一般理论，并用统一的方法算出了各种常见的特殊广义函数的解析表示，其中有些解析表示为作者首先求出。第七章至第九章，主要是作者自己的工作，其中第八章的材料是不曾发表过的。此外，对于广义函数的一种推广——超函数，本书也已用调和函数给出了它的一个定义。

在写作本书时，作者力图做到的是：

一、尽可能地通俗。例如，1. 本书避免了线性拓扑空间的抽象概念，只在线性空间中引进极限运算。2. 通常在证明拉普拉斯方程的基本解时，要用到斯托克斯公式或它的特殊形式——奥高公式，我们避免了这些公式的使用，直接采用分部积分法，

因而要初等一些。3. 我们尽量避免运用泛函分析的知识，如在证明广义函数在有界开集上是连续函数的某阶导数时，通常总要运用汉-巴拿赫定理，而我们则从调和表示出发证明，避去了汉-巴拿赫定理。

二、尽可能地自封。除了微积分、点集拓扑、实变函数论和复变函数论的最基本的知识外，本书基本上是自封的。例如，关于调和函数可展开成齐次调和多项式级数的事实，我们没有求助于调和分析理论，而是从证明调和函数的解析性着手，作泰勒级数而得到的。

三、尽可能地不雷同。广义函数的书，由国人写的虽未见过（冯康教授有系统介绍广义函数的长文），但已出版盖尔芳特等人著的名著《广义函数》中译本数卷。此外，外文版的同类书更是不少见。因此，本书在取材和书写上尽量做到有自己的特色。第七章和第八章的内容基本上未曾在其他书中出现过。写广义函数的解析表示的，已有勃雷沫曼（H.Bremermann）的流传颇广的好书（见书末参考文献〔15〕）。论述这一专题的本书第六章，则是在第五章系统论述带参数的广义函数的基础上，强调带解析参数的广义函数的解析表示，在理论的广度和具体求解析表示的方法上都避免了与〔15〕的雷同。关于缓增广义函数的傅里叶变换的解析表示是很精彩的，但在〔15〕中，对此已有很好的阐述。因此，我们在本书中就忍痛割爱了。为了体现易读初等的特色，作者在广义函数领域的不少工作被忍痛割爱了。例如未写入书中的关于广义函数的黎斯变换，解析和调和延拓与广义极限的关系，拉普拉斯方程的初值理论等的工作都是本书内容的深化。此外，作者运用非标准分析于广义函数乘法的一系列工作亦未在书中涉及，有兴趣的读者可参阅书末所附的参考文献。

广义函数，顾名思义是普通函数的推广，因而自然包括了某些“坏”的函数，而解析函数则是一类很“好”的函数。但广义函数却可以用解析函数（对于多变量广义函数而言，事实上是调和函数，也是一类很“好”的函数）来表示。“坏”的函数与“好”

的函数之间的这种内在联系体现了广义函数理论的优美。揭示“好”与“坏”之间的这种奇妙的联系，正是本书的主线，也是本书命名的原因所在。

对于仅仅想通过本书来了解广义函数的基础知识的读者，可以只读前五章或甚至只读前四章。在那里，函数论的知识所用较浅。因而对更多的读者来说是更容易读的。

本书追求论证的详尽和初等，而不是论证的简短，为的是使更多的读者读起来要轻松些。但由于写作的匆忙，书中失之过繁或失之过简以及安排不当或错误之处，恐在所难免，敬请读者不吝指正。

李邦河　李雅卿

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　广义函数的定义和例子

§1.1　从δ函数谈起

为什么从 δ 函数谈起呢？因为最为人熟知的不是普通函数的广义函数大概就是 δ 函数。通过对 δ 函数的分析，可以看到，即将引进广义函数的定义是很自然的，有着明显的实际背景的。当然，由这样的分析而走向广义函数的定义的过程，并不是发现广义函数的历史过程。一个科学的定义的发现的历史过程，往往是很曲折的，因为科学家们是在黑暗中摸索着去接近这个合理的定义。而这个合理的定义一旦被发现，它就会从黑暗中走出来，暴露在光天化日之下。人们也会立刻明白过来：呵，原来它是这样的！在这一节里要说明的就是：原来广义函数是这样的！

按物理学家的定义，1 维 δ 函数是实轴上除原点外取值零，而在原点取值正无穷大，且在整个实轴上积分为 1 的函数，即

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ \infty, & x=0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1$$

如果把 $\delta(x)$ 看作是一个勒贝格可积函数，则因它几乎处处等于零．由实变函数论可知，其勒贝格积分应该是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=0$$

因此 $\delta(x)$ 不是勒贝格可积函数，当然更不是黎曼可积函数。它是一个真正奇异的函数！

把 δ 函数排斥在普通函数的大门之外的是它的性质 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1$。设 $(a,\ b)$ 是一个开区间，则应有

9310291

$$\int_a^b \delta(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\notin(a,\ b)\\ 1, & \text{当 } 0\in(a,\ b)\end{cases}$$

δ 函数的物理意义是集中在原点的单位物理量：单位质量、单位电荷等等。而$\int_a^b \delta(x)\mathrm{d}x$反映的是落在区间（$a$，$b$）中的总的物理量。设有一物理量$T$分布在实轴上，我们不知道该物理量$T$在每一点的分布密度，却知道在每一开区间$U$中的总量是$T(U)$。若有

$$T(U)=\begin{cases}0, & 0\notin U\\ 1, & 0\in U\end{cases}$$

则显然T的总量是1，而且全部集中在原点，故T的密度函数就是$\delta(x)$。因此，不把δ函数看成是实轴上的函数，而把它看成是由实轴上的开区间形成的集合上的函数，则对应

$$U\longrightarrow\delta(U)=\int_U \delta(x)\mathrm{d}x$$

完全刻划了δ函数。这也可以说是δ函数的一个严格的数学定义。

设$f(x)$是一个连续函数，U是有限开区间，令$f(U)=\int_U f(x)\mathrm{d}x$，则对应$U\longrightarrow f(U)$确定了一个从有限开区间的集合到实数集合的对应。如果$g(x)$是另一个连续函数，且对任意有限开区间U有

$$f(U)=g(U)$$

则容易证明$f(x)\equiv g(x)$。熟悉实变函数论的读者可设想上面的f和g是局部勒贝格可积函数，而得到f和g几乎处处相等的结论。即从实变函数的观点来看，这样的f和g是一样的。

综合上述，可知通过考虑有限开区间集合到实数集合的对应，不仅可以描述连续函数，勒贝格可积函数，而且还可以描述δ函数。这就是说，有限开区间的集合上的函数的概念真正扩充了连续函数，甚至是实变函数的概念。

但有限开区间的集合与实数的集合比较，有一个明显的缺点：不能进行线性运算。即若U_1，U_2是两个有限开区间，α_1，α_2是两个实数，$\alpha_1 U_1+\alpha_2 U_2$没有意义。用$\chi_U$表示$U$的特征函数，即

$$\chi_U(x)=\begin{cases}0, & x\notin U\\ 1, & x\in U\end{cases}$$

则可把$\alpha_1 U_1+\alpha_2 U_2$理解为函数$\alpha_1\chi_{U_1}(x)+\alpha_2\chi_{U_2}(x)$。但此时$\alpha_1\chi_{U_1}+\alpha_2\chi_{U_2}$一般地说已不再是某有限开区间的特征函数。设$f$是连续函数，则有

$$f(U)=\int_U f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\chi_U(x)\mathrm{d}x$$

令$f(\chi_U)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\chi_U(x)\mathrm{d}x$，定义

$$f(\alpha_1\chi_{U_1}+\alpha_2\chi_{U_2})=\alpha_1 f(\chi_{U_1})+\alpha_2 f(\chi_{U_2})$$

则f可被看成某种线性泛函。对δ函数，一个熟知的性质是：对任意连续函数φ，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)$$

因此，δ函数可被看成连续函数空间上的线性泛函。

于是，得到了把普通函数视为某类函数空间上的线性泛函来推广函数概念的途径。下面将看到，适当地选取这类函数空间，将不仅可以推广函数的概念，而且可使微分与积分等运算不受约束，比在普通微积分中还要灵活自如。因此，广义函数理论的出现，不仅在数学上严格地描述了来自物理学中的δ函数一类的“奇异函数”，而且对微积分以及微分方程理论等的发展也有着重要的意义。它是人类对自然界中存在的数量关系的认识的深化的一个反映。

§1.2 试验函数空间

上一节中已谈到：推广普通的函数概念的一条自然的途径是把它们看成某种函数空间上的线性泛函。这种函数空间中的元素

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com