● 非线性科学丛书

孤波和湍流

刘式达 刘式适 编著

上海科技教育出版社

非线性科学丛书

孤波和湍流

刘式达 刘式适 编著
郭柏灵 倪皖荪 审阅

上海科技教育出版社

(沪)新登字 116 号

内 容 提 要

孤立波和湍流都是物理中的非线性现象，混沌理论使它们联系起来了。本书首先以混沌和分形的观点来介绍对湍流的一些新的思想，接着介绍混沌和分形，以及对湍流有很大意义的子波变换、自组织临界性和数学中的几个序列，最后论述了同(异)宿轨道和孤立波及湍流涡旋的关系。本书可供理工科大学教师、高年级学生、研究生、博士后阅读，也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

本书由郭柏灵、倪皖荪审阅。

非线性科学丛书

孤波和湍流

刘式达　刘式适　编著

郭柏灵　倪皖荪　审阅

上海科技教育出版社出版发行

(上海市冠生园路 393 号)

各地新华书店经销　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1168　1/32　印张 4.5　字数 110,000

1994 年10月第1版　1994 年10月第1次印刷

印数 1—3200 本

ISBN 7-5428-0907-5/O·50　定价：4.20 元

出版说明

现代自然科学和技术的发展，正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法．“数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科，与日新月异的新技术相结合，使用数值、解析和图形并举的计算机方法，推出了横跨多种学科门类的新兴领域．这种发展的一个重要特征，可以概括为“非”字当头，即出现了以“非”字起首而命名的一系列新方向和新领域．其中，非线性科学占有极其重要的位置．这决非人们“想入非非”，而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升．

曾几何时，非线性还被人们当作个性极强，无从逾越的难题．每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法，运用新颖的技巧．诚然，力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程，物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型．不过，这些都曾是稀如凤毛麟角的“手工艺”珍品，人们还没有悟出它们的普遍启示，也没有看到它们之间的内在联系．

20世纪60年代中期，事情从非线性现象的两个极端同时发生变化．一方面，描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算，揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质．这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径，即所谓“反散射”方法．反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念，反映了这类方程内秉的对称和保守性质．到了80年代，反散射方法推广到量子问题，发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系．

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理．于是，非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来，成为一个广泛的研究领域．虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统，但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的．

另一方面，在“不可积”的极端，对KAM定理条件的“反面文章”，揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性，而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例．这些研究迅速地融成一片，一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识．原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统，其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感，同投掷骰子一样地随机和不可预测．然而，混沌不是无序，它可能包含着丰富的内部结构．

同时，由于计算科学特别是图形技术的长足进步，人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象．从随机与结构共存的湍流图象，到自然界中各种图样花纹的选择与生长，以及生物形态的发生过程，都开始展现出其内在的规律．如果说，混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为，则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程．标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用．

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中，许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散，同时也提出了新的深刻的数学问题．物理学中关于对称和守恒，对称破缺，相变和重正化群的思想，也在日益增多的新领域中找到应用．“非线性”一词曾经是数学中用以区别于“线性”问题的术语，非线性科学正在成为跨学科的研究前沿．各门传统学科中都有自己的非线性篇章，非线性科学却不是这些篇章的总和．非线性科学揭示各种非线性现象的共性，发展处理它们的普适方法．

这样迅猛发展的跨学科领域，很难设想用少数专著加以概括，

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步．于是，有了动员在前沿工作的教学和研究人员，以集体力量撰写一套“非线性科学丛书”的想法．在上海科技教育出版社的大力支持下，这一计划得以付诸实现．

这套“非线性科学丛书”不是高级科普，也不是大块专著．它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展，帮助大学高年级学生、研究生、博士后人员和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域，同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人员更新知识提供自学教材．非线性科学的全貌将由整套丛书刻划，每册努力讲清一个主题，一个侧面，而不求面面俱到，以免失之过泛．在写作风格上，作者们将努力深入浅出，图文并茂，文献丰富；力求有实质内容，无空洞议论，以真刀真枪脚踏实地武装读者．从读者方面，自然要求具备理工科大学本科的数学基础，和读书时自己主动思索与推导的习惯．

“非线性科学丛书”的成功，取决于读者和作者的支持．我们衷心欢迎批评和建议．

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

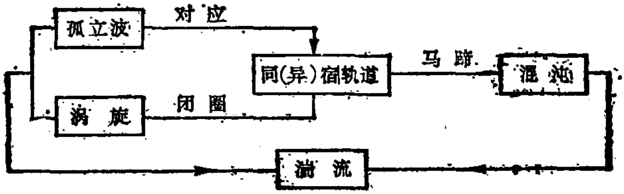
前　　言

将不规则的湍流现象与很规则的孤立波联系在一起作为本书的题目，也许读者不易理解．其实，研究湍流正是要将不规则的随机性和规则的确定性联系起来．这种联系早有实验证实：60年代就发现湍流中有相干结构(coherent structure)；更早些时候，40年代苏联著名科学家柯尔莫戈洛夫(A. H. Колмогоров)就从理论上论证了湍流是杂乱的，由大大小小涡旋组成；但大涡不断分成小涡的串级过程求到的功率谱却是有规律的幂函数，即具有自相似的结构．促使将随机性和确定性联系在一起的还是应该说是发现了混沌(chaos)．因为"混沌"的含义就是确定性中的随机，即确定的非线性动力系统中可以存在内在随机性．之后，分形(fractal)的发现又从反面告诉我们，像湍流这种含有大大小小涡旋的无特征尺度现象，却包含有自相似的结构，即尺度变化后还具有不变性，而湍流满足的纳维-斯托克斯方程就具有这种不变性．

在我们的工作中将湍流和孤立波联系起来的是，我们求非线性偏微分方程行波解时，原来孤立波就对应于常微分方程的同(异)宿轨道．同宿(homoclinic)轨道和异宿(heteroclinic)轨道是动力系统中的概念，孤立波是物理中保守系统中的现象．因此，孤立波和同(异)宿轨道相联系，体现了数学和物理两者的结合．数学家知道同(异)宿轨道，物理学家知道孤立波，但两者的联系却很少人知道．

湍流中有涡旋，这是很早大家就知道的．但是，很少有人发现涡旋和同(异)宿轨道有联系．像绕圆柱流后面出现的涡街是一个一个的螺旋涡，它们实际上就是一种鞍(点)-焦(点)异宿轨道．很多对称涡旋的出现必然伴随着同宿或异宿轨道构成的闭圈．这些都说明同(异)宿轨道和规则的孤立波及涡旋相联系，这只是问题

的一面．另一面是，数学家已为我们说明，同(异)宿轨道受到扰动很易横截相交形成马蹄和混沌，因此同(异)宿轨道又和随机的一面相联系．下图将同(异)宿轨道和确定性及随机性联系的线索绘出来：



从这图上看出，同(异)宿轨道是联系规则性的和随机性的桥梁和关键点，是研究湍流的核心．这样，本书把湍流和孤立波联系作为书名，主要就是这个用意．

湍流是一个复杂的问题，不可能通过本书就解决．有关湍流和孤立波的专著都很多，本书不是专门湍流及孤立波的论述．本书只是围绕着确定性和随机性联系的线索去论述湍流和孤立波．

本书共分四章．第1章介绍对湍流的一些看法和观点，以混沌和分形的非线性动力学的观点来论述．多数是近几年的最新看法，因此过去的有关湍流专著中是不易看到的．

第2章和第3章分别是确定性的随机和随机中的确定性．似乎看起来就是混沌和分形，内容上还是和湍流紧密相关的．特别叙述了几个数学上的序列：菲波那契(L. Fibonacci)序列，TM序列，法里(J. Farey)序列，它们在物理中已有很多应用，对湍流的应用有重要前景．这两章中还介绍了最新的对湍流有很大意义的子波变换和自组织临界性．

最后一章主要论述同(异)宿轨道和孤立波及湍流涡旋的关系．虽然一些重要的孤立波方程例如KdV方程、薛定谔方程已在很多书中讲到，但本书是着重从同(异)宿轨道和孤立波的对应上说的．这章中还着重介绍耗散系统中的KdV-Burgers方程、Fisher方程中的同(异)宿轨道，并用它们来论述湍流的串级过程．

最后部分是论述二维、三维欧拉方程的定常解所显示的实际物理场的同(异)宿轨道及其涡旋.

通过全书的论述,我们想使读者对湍流有个全面的认识,对今后研究湍流作为一个引子. 限于我们水平, 论述的观点及方法不免有不少错误.本书得到郭柏灵教授和倪皖荪教授的审核和指点,在此向他们表示感谢.

刘式达 刘式适

1993年2月28日于北京大学

目　　录

第 1 章

湍流是什么?

1883 年雷诺(O.Reynolds)在圆管中的流体实验中发现湍流,至今已有 110 年了. 湍流是什么?至今仍没有共识. 但是,随着科学技术的发展,人们对湍流的认识已经丰富多了. 尽管如此,还有许多问题仍在引起科学家们的思考:

湍流是随机的现象,但有无规律性可找?

湍流是确定性的?还是随机性的?

湍流和涡旋是什么关系?

湍流和波是什么关系?

湍流用什么模型和方法来描述?

本章力图从不同角度说明对湍流必须将确定性和随机性联系起来考虑;综述目前对湍流的一些主要论点和思想,以便使读者对湍流的认识有一个全貌,引发对湍流的深入讨论和研究。

§1 湍流中含有涡旋

到处都可见到,湍流中伴随着涡旋运动. 一支燃着的香烟,在平稳的气流中缓缓升起一缕烟气,突然卷曲成一团团剧烈扰动的烟雾,四处飘散. 烟囱中喷发出滚滚的浓烟,划船时桨后面一串串的旋涡,在湍流场中前进. 说明涡旋在湍流形成的作用的最典型的例子是粘性绕球问题. 一个半径为 L 的球,放在一个流速为 v 的粘性流体中,若流体的粘性系数为 ν,则流动的雷诺数定义为

$$R_e=\frac{vL}{\nu}. \tag{1.1}$$

当 R_e 较小时，球后部的运动可以看成是定常的．当 R_e 超过一临界值时，运动就变成周期的．当 R_e 再高时，运动成为周期运动的卡曼(Karman)涡街．最后，R_e 再高，就变成湍流运动．绕球湍流场中的涡旋见图 1-1．

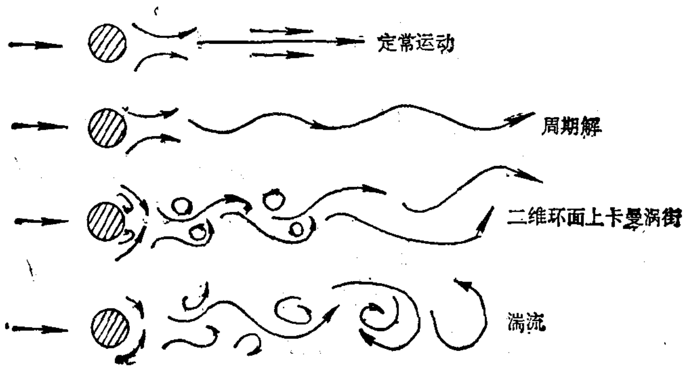


图 1-1

尽管由实验可确信湍流运动中有涡旋，但实际中我们常常测到湍流速度(或其他物理量)随时间变化的资料，怎么知道其中含有涡旋呢？图 1-2 是一个测量的湍流垂直速度 w' 资料的一段放大图．图上看出其曲线非常杂乱无章，且有大大小小的涨落或毛刺．何以造成这种不同程度的毛刺呢？我们可以想象成它们是由大大小小不同的湍流涡旋所组成，大的旋转的涡旋可以造成强度较大的 w' 的涨落，小的涡旋可以造成强度较小的 w' 的涨落．显然，若是大小都一样的涡旋，绝不会造成这种杂乱无章的信号．仔细分析还说明，大涡旋中还含有小涡旋，因为相对大的涨落中还含有小的涨落．

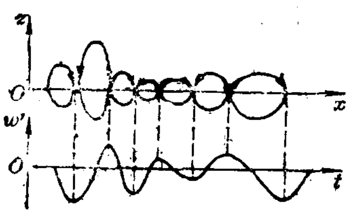
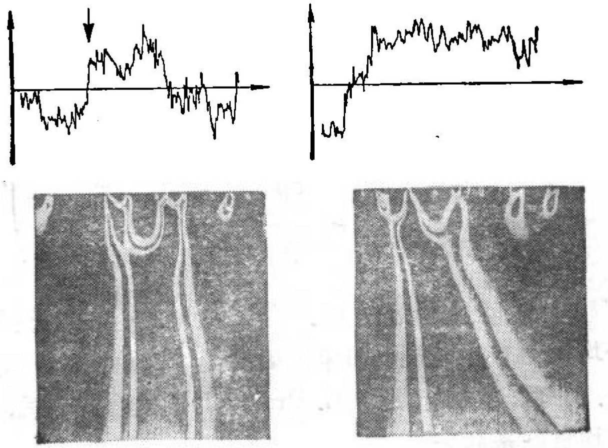


图 1-2

近几年来已经创立了一种子波变换 (wavelet transform)方法，它将一个时间序列变换成含有位置 t_0 和尺度因子 a 的函数

$T(a, t_0)$，其中尺度参数 a 的倒数 $\frac{1}{a}$ 代表放大倍数．图 1-3(i)就是一个湍流信号变换后的振幅 $T(a, t_0)$图，图中黑色表示振幅是负的或 0，白色代表振幅是正的或大的．放大倍数由底部向上是增加的．从图上可以看出：底部放大倍数较小时，信号粗略地可以分成三个黑色区域(相当于三个大涡旋)，但在到达顶部时，黑色区域被白色区域分隔成较多的块，显示出放大倍数增加后可以看见较小的涡旋．对图 1-3(i)中箭头所指的一段，若放大参数再加大 20 倍，就成了图 1-3(ii)上的图，据此可见图 1-3(i)中的小涡旋还含有更小的涡旋．图 1-3 也充分说明湍流中的大涡变小涡，小涡再分裂成更小涡的串级(cascade)过程．



(i) (ii)

图 1-3

§2 确定性的随机

湍流既然是随机的，如何描述它呢？

描述湍流的无因次的纳维-斯托克斯(C.Navier-G.G.Stokes)方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\nabla\left(\frac{P}{\rho}\right)+\frac{1}{R_e}\Delta\boldsymbol{v} \tag{2.1}$$

是由质点动力学的牛顿定律用于流场的结果.

由于确定论在一些人头脑中占统治地位，总认为一个确定的微分方程只要给出初始条件(称为初值问题)就可以有唯一确定的解，正如著名科学家拉普拉斯(P. S. M. de Laplace)所说:"只要给出初条件,我就可以决定未来的一切."既然如此,确定性的方程(2.1)怎么能给出湍流这种不确定性的解呢? 雷诺认为,湍流可以借助于速度场的平均量来描述. 于是，他把(2.1)式作平均运算后，导得所谓平均运动方程，其形式仍基本同于(2.1)式(当然,速度要改成平均速度)，但(2.1)式右端却多出了湍流扰动量对平均量的反馈项——雷诺应力项:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial(-\overline{u'u'})}{\partial x} & \dfrac{\partial(-\overline{u'v'})}{\partial y} & \dfrac{\partial(-\overline{u'w'})}{\partial z} \\ \dfrac{\partial(-\overline{v'u'})}{\partial x} & \dfrac{\partial(-\overline{v'v'})}{\partial y} & \dfrac{\partial(-\overline{v'w'})}{\partial z} \\ \dfrac{\partial(-\overline{w'u'})}{\partial x} & \dfrac{\partial(-\overline{w'v'})}{\partial y} & \dfrac{\partial(-\overline{w'w'})}{\partial z} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

其中 $\boldsymbol{v}'(u', v', w')$是湍流速度. 由于像 $-\overline{u'w'}$ 这种形式的雷诺应力在平均运动方程中是多出来的因变量，因而造成平均运动方程不封闭. 为此,借用普朗特(L. Prandtl)的混合长假说，将 $-\overline{u'w'}$ 项和平均量联系起来

$$-\overline{u'w'}=K\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}, \tag{2.3}$$

其中 K 称为涡旋粘性(eddy viscosity)系数，它类似于分子粘性系数 ν. 虽然方程似乎封闭了，但是 K 实质上并不知道，因为 ν 是介质的性质,而 K 是湍流的属性. 用(2.3)式使雷诺平均运动方程封闭,就是所谓"闭合问题".

由速度平均量来描述湍流的观点,是一种统计描述方法. 这种方法认为，湍流的随机来自外部的边界条件的强迫或热噪声等.

但是，1963年美国麻省理工学院的气象学家洛伦兹(E. N. Lorenz)用一台由大堆电线和真空管组成的皇家麦克比(Royal McBee)型计算机去解一个由三个天气变量组成的确定性的非线性一阶微分方程组:

$$
\begin{cases}
\dot{x} = -P_r x + P_r y, \\
\dot{y} = R_a x - y - xz, \\
\dot{z} = xy - bz,
\end{cases}
\tag{2.4}
$$

其中 P_r 是普朗特数，$b>0$ 是另一参数，

$$
R_a = -P_r R_e^2 R_i \tag{2.5}
$$

是莱雷(O. M. Rayleigh)数，

$$
R_i = \frac{\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}}{\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)^2} = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)^2}
$$

是里查逊(L. F. Richardson)数，N 叫 Brunt 频率，它是描述位温 $\bar{\theta}$ 分层，速度 $\bar{u}$ 分层的分层流体(例如大气)湍流的重要参数. 白天大气温度实际递减率超过绝热递减率(0.98 K/100 m)，使

$$
\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}<0, \qquad (R_i<0)
$$

晚上大气温度实际递减率小于绝热递减率，使

$$
\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}>0. \qquad (R_i>0)
$$

有意思的是，计算结果表明：当 $R_a>24.74$ 时，确定的方程组(2.4)确出现了随机的输出. 洛伦兹当时文章的题目为“确定性的非周期流”，就是今天所谓混沌的含义. 同时洛伦兹也观测到，两个几乎相同的初始条件出发，却得到完全不同的天气结果，这种性质称为“敏感初条件”，或称为“蝴蝶效应”. 他以夸张口吻说：南美洲亚马逊河流域热带雨林中一只蝴蝶，只要拍动翅膀所引起的扰动气流，随着时间的增长，两周后可能在美国得克萨斯州引起一场龙卷风.