信号检测与估值

高等学校教材

信号检测与估值

田琬逸 张效民 编

西北工业大学出版社

高等学校教材

信号检测与估值

田琬逸　张效民　编

西北工业大学出版社
1990年3月　西安

内容简介

本书比较系统地介绍了在噪声中检测信号、估计信号参量和波形的基本理论和方法. 其主要内容是信号检测理论及其应用; 信号参量估计方法; 维纳和卡尔曼滤波. 还简单地介绍了自适应滤波原理和LMS算法.

本书是高等院校应用电子技术专业的专业基础课教材, 亦可供从事雷达、自动控制、通信、水声工程、生物电子工程等工作的科技人员自学和参考.

高等学校教材
信号检测与估值
编 者 田琬逸 张效民
责任编辑 李 珂
责任校对 钱伟峰
*
西北工业大学出版社出版
(西安市友谊西路127号)
陕 西 省 新 华 书 店 发 行
西北工业大学出版社印刷厂印装
ISBN 7-5612-0239-3 / TN·9(课)
*
开本787×1092毫米 1/16 13.25印张 321千字
1990年3月第1版 1990年3月第1次印刷
印数1-2000册 定价: 2.69元

前　言

本书是应用电子技术专业高年级学生的教科书，根据本专业教学大纲编写而成。

本书共分六章：第一章概略地介绍了随机信号及其描述方法，作为学习后续内容的准备；第二章和第三章阐述信号检测的基本理论，包括各种判决准则、最佳检测系统的设计与构成方法；第四章讨论信号参量估计问题，介绍常用的估计方法及其质量评价标准；第五章是信号波形估计，讨论维纳和卡尔曼滤波的基本理论及其应用；第六章简单地介绍自适应滤波原理及 LMS 算法。

本书在阐述方式上注重基本概念和基本方法，附有大量例题，以便加深对基本理论的理解，掌握实际应用的方法。

在学习本课程之前，应具有概率论与数理统计、线性代数、信号与系统、电路基础等方面的知识。

本书第二章和第三章由张效民编写，其余各章由田琬逸编写，全书由田琬逸统稿。

本书由陕西机械学院麻俊副教授审阅，对书稿提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

编者向参考文献的作者和编写过程中给予关心和支持的同事表示感谢。

限于编者水平，肯定会有缺点和不足之处，欢迎读者提出批评和建议。

编　者

1989 年 9 月

目　录

第一章　随机信号的特性与描述方法

在进行信号检测与估计时，要处理的信号，或者是本身就是随机信号，或者受传输介质与噪声的影响而变为随机信号．随机信号不能用确定的时间函数来描述，只能研究它在某种概率范围内的统计平均特性．

本章简要地介绍随机信号的特性及描述方法，作为学习后续内容的必要基础．

§1.1　条件概率与贝叶斯公式

随机变量是指这样的量，它在每次试验中预先不知取什么值，但知道以怎样的概率取值．对于某一次试验结果，随机变量取样本空间中一个确定的值．

为了研究离散随机变量 X 的统计特性，必须知道 X 所有可能取的值，以及取每个可能值的概率．概率表示随机变量 X 取某个值（如 x）可能性的大小，用 $P(x)$ 表示

$$P(x)=P(X=x) \tag{1-1}$$

若用 $F(x)$ 表示随机变量 X 取值不超过 x 的概率，称为 X 的概率分布函数

$$F(x)=P(X\leqslant x) \tag{1-2}$$

由于连续随机变量可能取的值不能一一列出，其分布函数表示取值落在某一区间的概率，常用概率密度函数 $p(x)$ 描述其统计特性，概率密度函数和概率分布函数的关系为

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}p(x)dx \tag{1-3}$$

$$p(x)=\frac{dF(x)}{dx} \tag{1-4}$$

两个随机变量 X 和 Y 可以是独立的（彼此毫无影响），也可以是不独立的．两个随机变量相互依赖的程度用条件概率密度函数来表示，若用 $p(x,y)$ 表示 X 和 Y 的联合概率密度函数，由贝叶斯公式得

$$p(x,y)=p(x|y)p(y)=p(y|x)p(x) \tag{1-5}$$

如果 X 和 Y 彼此没有影响，则

$$p(x|y)=p(x)$$

$$p(y|x)=p(y)$$

其联合概率密度函数等于边缘（单独）概率密度函数的乘积

$$p(x,y)=p(x)\cdot p(y) \tag{1-6}$$

则称 X 和 Y 彼此统计独立．

贝叶斯公式也称为逆概率公式，常用于已知先验概率密度函数求后验概率密度函数。

例如，在某一时间内，测得观测值是信号与噪声之和

$$x=s+n$$

s 和 n 相互独立，且 s 与 n 的先验概率密度函数是已知的，即给定了 $p(s)$ 和 $p(n)$，要求出

当观测值 x 给定时 s 的条件概率密度函数 $p(s|x)$.

由 (1－5) 式可得

$$p(s|x)=\frac{p(x|s)p(s)}{p(x)}=\frac{p(x|s)p(s)}{\int_{-\infty}^{\infty}p(x|s)p(s)ds} \tag{1－7}$$

其中 $p(x|s)$ 是 s 给定时 x 的条件概率密度函数，当信号给定时，观测值 x 的随机特性是由噪声的分布规律 $p(n)$ 来决定的.

§1.2 统计独立、不相关与正交

如上所述，两个随机变量 X 和 Y 彼此独立的条件是其联合概率密度函数必须等于边缘概率密度函数的乘积.

我们知道两个随机变量的协方差函数

$$\mathrm{Cov}(X,\ Y)=E\left\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\right\}=E[XY]-E[X]E[Y] \tag{1－8}$$

表示两个随机变量的相关程度.

若 $$\mathrm{Cov}(X,\ Y)=0$$

即 $$E[X,\ Y]=E[X]E[Y] \tag{1－9}$$

则 X 和 Y 不相关.

若 $$E[XY]=0 \tag{1－10}$$

则X和Y正交.

根据

$$E[XY]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyp(x,\ y)dxdy \tag{1－11}$$

和(1－9) 式可知，统计独立的两个随机变量必定不相关，但是，两个不相关的随机变量不一定独立. 只有正态分布的随机变量不相关与独立是等价的. 两个均值都为零的随机变量，不相关与正交是一致的. 两个均值为零且为联合正态分布的随机变量其不相关、独立与正交是一致的.

§1.3 随机信号及其描述方法

一、随机过程

随机过程可以看作是随时间变化的随机变量，预先不知它的变化规律，但能通过实验来观测。若重复观测多次，得到一组随时间变化的曲线，如 $x_1(t)$，$x_2(t)$，……，$x_n(t)$，称为样本函数，如图 1.1 所示. 我们把样本函数的集合称为样本空间.

定义随机过程是参数集（时间 t_1，t_2，……）上的一簇随机变量，$X(t_1)$，$X(t_2)$，……。或者定义为样本空间中的一簇样本函数，$x_1(t)$，$x_2(t)$，……。

研究这一簇随机变量 $X(t_1)$，$X(t_2)$，…… 的统计平均特性称为集平均，而研究某一样本函数的统计平均特性称为时间平均.

二、幅度描述

随机过程的幅度描述是研究随机过程的幅度分布规律.

假设随机过程为 $X(t)$，在 t_1 时刻观测可得到一组随机变量，用$X(t_1)$表示，$X(t_1)$的幅度落在小于或等于某一幅值x_1范围内的概率

$$P(x_1;\ t_1)=P\{X(t_1)\leqslant x_1\} \quad (1-12)$$

称为$X(t_1)$的一维分布函数。

$$\text{而}p(x_1;\ t_1)=\frac{\partial p(x_1;\ t_1)}{\partial x_1} \quad (1-13)$$

称为随机过程$X(t)$的一维概率密度函数.

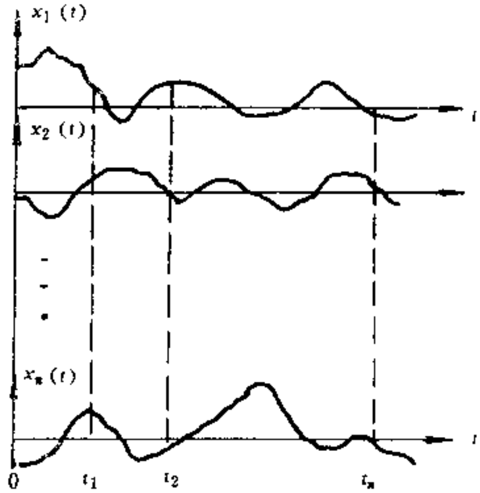

图 1.1 随机过程样本函数的集合

为了反映不同时刻 $X(t)$ 的幅度分布，可以在t_1和t_2两个时刻测得两组随机变量$X(t_1)$和$X(t_2)$，其两维分布函数为

$$P(x_1,\ x_2;\ t_1,\ t_2)=P\left\{X(t_1)\leqslant x_1,\ X(t_2)\leqslant x_2\right\} \quad (1-14)$$

两维概率密度函数为

$$p(x_1,\ x_2;\ t_1,\ t_2)=\frac{\partial^2 P(x_1,\ x_2;\ t_1,\ t_2)}{\partial x_1\partial x_2} \quad (1-15)$$

要完整地反映随机过程 $X(t)$ 的统计特性，应按上述方法继续取下去，就可以得到 $X(t_1)$，$X(t_2)$，……，$X(t_n)$ 的 n 维分布函数和 n 维概率密度函数.

若随机过程$X(t)$的n维概率密度与时间起点无关

$$\begin{aligned}&p(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n;\ t_1,\ t_2,\ \cdots\cdots,\ t_n)\\&=p(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n;\ t_1+\tau',\ t_2+\tau',\ \cdots\cdots,\ t_n+\tau')\end{aligned} \quad (1-16)$$

则称$X(t)$ 为严平稳随机过程.

若随机过程$X(t)$ 的数学期望为常数，其自相关函数是时间间隔τ的函数，即

$$E[X(t)]=m_X \quad (1-17)$$

$$R_X(t_1,\ t_2)=E[X(t_1)\ X(t_2)]=R_X(\tau) \quad (1-18)$$

$$\text{且}\quad E[X^2(t)]<\infty \quad (1-19)$$

则称$X(t)$ 为宽平稳随机过程.

一般来说，宽平稳随机过程的时间平均不等于集平均，但对于各态历经过程，其时间平均以概率 1 接近于集平均，故可以用时间平均来代替集平均，即对于这类随机过程可用对一个样本特性的研究来代替对整个随机过程特性的研究.

下边说明具有各态历经性随机过程的概率密度函数的测量方法.

设观测得到的随机信号是随机过程 $X(t)$ 的一个样本函数，用 $x(t)$ 表示，如图 1、2 所示。

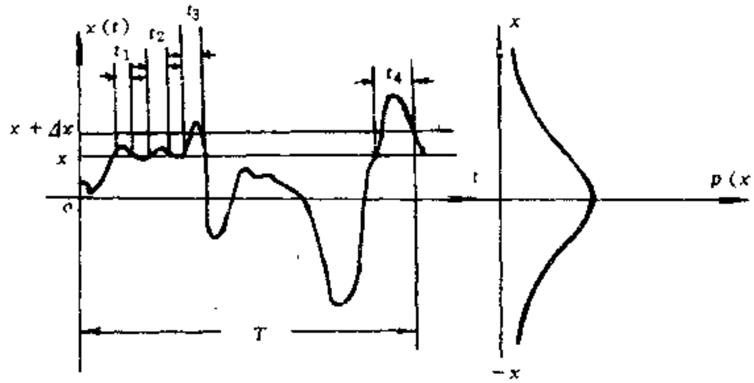

图 1.2 概率密度函数的测量

在观测时间 T 内，将 $X(t)$ 的幅值落在 x 和 $x+\triangle x$ 之间的时间记录下来，如图中 t_1，t_2，t_3 和 t_4。则 $x(t)$ 的幅值落在 x 和 $x+\triangle x$ 之间的概率为

$$P\left[x < x \leqslant x+\triangle x\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{\sum t_i}{T};\quad 其中\sum t_i = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$$

其概率密度函数为

$$p(x) = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{P\left[x < x \leqslant x+\triangle x\right]}{\triangle x} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ T\to\infty}}\frac{\sum t_i}{T\Delta x} \qquad (1-20)$$

若把 $x(t)$ 幅度的变化范围等间隔（$\triangle x$）的划分，记录落在每个间隔内的时间和，按（1－20）式进行计算，就可以得到 $p(x)$ 与 x 的关系曲线。

也可用数字化仪器进行测量，设最小量化单位为Q，则

$$p(x) = \frac{1}{Q}P\left[x_{i-1} < x \leqslant x_i\right] = \frac{1}{Q}\lim_{N\to\infty}\frac{N_i}{N} \qquad (1-21)$$

式中 N_i 表示 $x(t)$ 的幅值落在 x_{i-1} 和 x_i 之间的个数；N 是采样点数（或数据长度）；Q 是量化单位。若被测量的是噪声电压，假定其最大幅度为 $V\max$，最小幅度为 $V\min$，则

$$Q = \frac{V\max - V\min}{N}$$

显然，N越大，测量的精度越高。实际上只能按

$$p(x) = \frac{1}{Q}\frac{N_i}{N}$$

的关系式来进行测量。

三、时域描述

随机过程的多维概率密度函数，最能完整地描述随机过程的特性，但是在实际应用中不易获得。若用统计平均的方法来描述随机过程的中心趋势与散布情况等，就能解决许多工程问题。

将对随机变量数字特征的描述方法推广到随机过程，其区别在于随机变量的数字特征是确定的数值，而随机过程的数字特征是确定的时间函数.

1. 均值

$$E[X(t)] \doteq \int_{-\infty}^{\infty} xp(x,\ t)dx \tag{1-22}$$

如果随机过程是噪声电压，则 $E[X(t)]$ 表示这个电压的瞬时平均值. 若 $X(t)$ 是平稳随机过程时，$E[X(t)] = m_X$（常数）.

2. 均方值（二阶原点矩）

随机过程$X(t)$的均方值为

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x,\ t)dx \tag{1-23}$$

若 $X(t)$ 是噪声电压，则 $E[X^2(t)]$ 表示消耗在单位电阻（1 欧）上的平均功率.

3. 方差（二阶中心矩）

$$D[X(t] = E\left\{\left(X(t) - E[X(t)]\right)^2\right\} \tag{1-24}$$

若$X(t)$是噪声电压，则$D[X(t)]$表示消耗在单位电阻上的交流功率.

均值、方差和均方值之间的关系为

$$E\left[X^2(t)\right] = D\left[X(t)\right] + \left\{E[X(t)]\right\}^2$$

4、自相关函数和自协方差函数

随机过程的自相关函数为

$$R_X(t_1,\ t_2) = E\left[X(t_1)X(t_2)\right] \tag{1-25}$$

表示随机过程在 t_1 与 t_2 时刻的相似程度. 对于平稳随机过程 $R_X(t_1,\ t_2) = R_X(\tau)$.

其自协方差函数为

$$\begin{aligned} C_X(t_1,\ t_2) &= E\left\{\left([X(t_1) - E[X(t_1)]\right)\left(X(t_2) - E[X(t_2)]\right)\right\} \\ &= E[X(t_1)X(t_2)] - E[X(t_1)]E[X(t_2)] \end{aligned} \tag{1-26}$$

5、互相关函数和互协方差函数

随机过程的互相关函数表示两个随机过程之间的相似程度. 设两个随机过程分别为 $X(t)$ 和 $Y(t)$，其互相关函数为

$$R_{XY}(t_1,\ t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] \tag{1-27}$$

互协方差函数为

$$C_{XY}(t_1,\ t_2) = R_{XY}(t_1,\ t_2) - E[X_1(t_1)]E[Y(t_2)] \tag{1-28}$$

若$C_{XY}(t_1,\ t_2) = 0$表示$X(t)$和$Y(t)$不相关.

四、频域描述

对于随机信号也可以采用变换域的分析方法，其频域特性是指随机信号的功率谱密

度，用 $G_X(\omega)$ 表示．平稳随机信号的功率谱密度和相关函数是富里叶变换关系，即

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_X(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega \tag{1-29}$$

$$G_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \tag{1-30}$$

当$\tau=0$时

$$R_X(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_X(\omega)d\omega=E[X^2(t)] \tag{1-31}$$

说明随机信号的功率谱密度与时域的相关函数所提供的信息是相同的．

§1.4 高斯随机过程

在实际中常遇到的随机信号是由许多独立的源所产生的随机变量之和，根据中心极限定理，它应当服从高斯分布．

高斯随机信号的一维概率密度函数，用$p(x_1)$表示

$$p(x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x_1-m_1)^2\right\} \tag{1-32}$$

其中$m_1=E[X(t)]$；σ_1^2为方差．

其二维概率密度函数为

$$p(x_1,\ x_2)=\frac{1}{2\pi|C|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T\mathbf{c}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\right] \tag{1-33}$$

其中$\mathbf{x}=[x_1x_2]^T$；$\mathbf{m}=[m_1m_2]^T=[E(X(t_1)E(X(t_2))]^T$；

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} E[X(t_1)-m_1]^2 & E[X(t_1)-m_1][X(t_2)-m_2] \\ E[X(t_2)-m_2][X(t_1)-m_1] & E[X(t_2)-m_2]^2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{C}^{-1}$是$\mathbf{C}$的逆矩阵；$|\mathbf{C}|$是$\mathbf{C}$的行列式；T表示转置．

其n维概率密度函数为

$$p(\mathbf{x})-\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T\mathbf{c}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\right\} \tag{1-34}$$

其中$\mathbf{C}$为协方差矩阵．若用C_{ij}表示矩阵中的元素，$C_{ij}=E[X(t_i)\ -m_i][X(t_j)\ -m_j]$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \tag{1-35}$$

高斯随机过程的特点是 n 维概率密度函数可由均值和协方差矩阵来决定，因此，若

已知其一阶矩和二阶矩就可以写出 n 维概率密度函数；高斯过程不相关和独立是等价的，这是由于在不同时刻采样所得的随机变量若互不相关的话，其协方差必然为零，即协方差矩阵中的元素

$$C_{ij}=\begin{cases}\sigma_i^2 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

则

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & & & \mathbf{0}\\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \sigma_n^2\end{bmatrix}$$

且

$$(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T\mathbf{c}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sigma_k^2}(x_k-m_k)^2$$

故

$$p(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sigma_k^2}(x_k-m_k)^2\right]$$

$$=\prod_{k=1}^{n}p(x_k)=p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)$$

此结论也适用于多个高斯过程，若两个高斯过程互不相关，则这两个高斯过程也是统计独立的。

§1.5 白噪声

如果一个随机信号起伏变化非常快，使得在两个相邻时间（不管两个时刻多么近）进行采样所得到的随机变量是互不相关的，即

$$R_X(t_1,\ t_2)=\begin{cases}\sigma_n^2\delta_{ij} & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\tag{1-36}$$

且

$$\sigma_n^2=\text{常数}\tag{1-37}$$

即

$$G_X(\omega)=\text{常数}\tag{1-38}$$

则称这种随机信号为白噪声。若白噪声又服从高斯分布规律则称为高斯白噪声。

第二章 信号的统计检测理论

在声纳、雷达、通信及其他系统中，都有从噪声中检测信号的问题。由于传输介质的不均匀性和噪声（或干扰）的存在，接收机观测到的信号会发生畸变并被噪声污染，变成随机信号，使得判断信号是否出现或重现其波形会发生错误。为了减少错误就必须降低噪声电平，提高信号电平。虽然通过加大发射功率、增强系统方向性的办法可以提高接收机输入端的信噪比，但这些措施往往受到战术或技术上的限制，因此必须研究对接收到的随机信号经过怎样的加工处理才能够减少判断错误。人们用概率论与数理统计方法来解决从噪声中检测信号的问题，形成了信号的统计检测理论。

信号的统计检测理论是以假设检验为工具、充分利用信号和噪声的统计特性，依据不同的判决准则来设计最佳接收机的理论。本章讨论假设检验和各种判决准则，最佳接收机的设计问题将在下一章讨论。

§2.1 假设检验

假设检验是统计推断理论的重要方法，可用来解决在若干个可能发生的情况中作出选择的问题，如在数字通信系统中，接收机要从含有噪声的观测波形中判断发射的是哪一种信号；气象员要对某地区未来的天气作出预报等。假设是研究对象可能的情况或状态，对应于一种情况作出一个假设；检验是按照一定的准则来进行判断，以确定哪一个假设成立的过程。

一、二元假设检验

二元假设检验也称为“双择一”假设检验。它只作两种假设，可以是雷达系统中的目标存在与否，也可以是通信系统中发射的两种信号等。若以雷达信号检测为例，用 H_1 假设表示接收到的波形中有回波信号，H_0 假设则表示没有回波信号，即

$$H_1: \qquad x(t)=s(t)+n(t)$$

$$H_0: \qquad x(t)=n(t)$$

其中 $x(t)$表示在接收机输入端观测到的波形；$n(t)$是加性噪声；$s(t)$是有用信号。

接收机必须根据对 $x(t)$的一次观测或多次观测来判断上述两个假设中哪一个成立，即选择一个而拒绝另一个。

二、多元假设检验

如果有用信号不止一个，如有 m 个，而只需要判断信号的“有”与“无”，仍可只作两个假设：

$$H_0: \qquad x(t)=n(t)$$

$$H_1: \qquad x(t)=m\text{个信号中的任一个}+n(t)$$

若需要判断 m 个有用信号中哪一种信号出现，就称为多元假设检验，或"多择一"假设检验，可表示为

$$
\begin{aligned}
H_0:&\quad x(t)=n(t)\\
H_1:&\quad x(t)=s_1(t)+n(t)\\
H_2:&\quad x(t)=s_2(t)+n(t)\\
\cdots\cdots&\quad \cdots\cdots\\
H_m:&\quad x(t)=s_m(t)+n(t)
\end{aligned}
$$

上述二元和多元假设检验都属于简单假设检验问题。在检测信号时，若信号的参量是已知的就是这类假设检验的实例。

若信号中含有随机参量，如正弦信号的相位、幅度等，对这类信号的检测采用复合假设检验，将在第三章讨论。

上边提到的假设检验都是在观测时间（或观测值的数目）是固定的情况下进行的，如果我们按观测值出现的次序进行处理并作出判断，则称为序贯检测。

三、统计信号检测系统的设计思想

本节用二元假设检验来说明统计信号检测系统的基本构思。

二元假设检验是对下面两个假设

$$
\begin{aligned}
H_0:&\quad x(t)=s_0(t)+n(t)\\
H_1:&\quad x(t)=s_1(t)+n(t)
\end{aligned}
$$

进行推断，以确定哪一个成立。

我们先根据一个观测值来进行检验，设

$$
\begin{aligned}
H_0:&\quad x=s_0+n\\
H_1:&\quad x=s_1+n
\end{aligned}
$$

其中 s_0 和 s_1 是已知的常数；n 表示噪声的样本值，是个随机变量；观测值 x 也是个随机变量。

在进行判断时，我们希望错误判决的可能性越小越好。直观地想，如果观测值 x 中包含信号 s_1 的可能性比包含 s_0 的可能性大，就应当选择 H_1，即用比较条件概率的方法来进行判决。为了讨论问题方便，我们把 x 中包含 s_1 和 s_0 的概率 $P(s_1|x)$ 和 $P(s_0|x)$ 分别用 $P(H_1|x)$ 与 $P(H_0|x)$ 来表示，并作出判决：

若 $\quad P(H_1|x)\geqslant P(H_0|x)$: $\quad$ 判为 H_1 成立

$\quad P(H_1|x)<P(H_0|x)$: $\quad$ 判为 H_0 成立

或写成

$$
\frac{P(H_1|x)}{P(H_0|x)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}1 \tag{2-1}
$$

$P(H_1|x)$和$P(H_0|x)$都称为后验概率。因此这种判决方法就是最大后验概率法则。

在实际应用中，后验概率难以求得，我们可将（2－1）式加以变换。根据概率乘法

公式

$$P(H_1|x)=\frac{P(x|H_1)P(H_1)}{P(x)} \quad 和 \quad P(H_0|x)=\frac{P(x|H_0)P(H_0)}{P(x)}$$

将（2－1）式改写为

$$\frac{P(x|H_1)}{P(x|H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \tag{2－2}$$

式中$P(H_0)$和$P(H_1)$表示s_0和s_1的先验概率。

（2－2）式也可以用条件概率密度函数来表示

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \tag{2－3}$$

$p(x|H_1)$和$p(x|H_0)$分别表示当s_1和s_0给定时x的条件概率密度函数，也称为似然函数。它们的比值称为似然比，用$\lambda(x)$表示；$\dfrac{P(H_0)}{P(H_1)}$用λ_0表示，称为似然比门限。

上面是根据一个观测值来讨论二元假设检验问题。对于多个观测数据，用$\mathbf{x}$表示

$$\mathbf{x}=[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N]^T$$

其似然比用$\lambda(\mathbf{x})$表示

$$\lambda(\mathbf{x})=\frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)}=\frac{p(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N|H_1)}{p(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N|H_0)} \tag{2－4}$$

它是观测数据的多维条件概率密度函数之比。

似然比$\lambda(\mathbf{x})$在信号检测中特别重要，必须加以说明。$\lambda(\mathbf{x})$是观测数据$\mathbf{x}$的函数，由于$\mathbf{x}$是随机变量，因此$\lambda(\mathbf{x})$也是随机变量；$\lambda(\mathbf{x})$是$\mathbf{x}$的两个条件概率密度函数之比，因此不管观测空间的维数如何，判决空间是由$\lambda(\mathbf{x})$的维数来决定的，对于二元信号检测问题，$\lambda(\mathbf{x})$总是一维的。

$\lambda(\mathbf{x})$是观测数据$\mathbf{x}$的函数（可以是线性或非线性函数），不含任何未知参量，因此可以作为检验统计量。必须指出，对于二元信号检测，似然比$\lambda(\mathbf{x})$还是充分统计量，所谓充分统计量是指包含了关于信号全部信息的统计量。如果我们把观测数据x_1，x_2，…，x_N看作N维观测空间中的一个点，而$\lambda(\mathbf{x})$可以看作是转换到另一坐标系（判决空间）来描述该点，因此依据$\lambda(\mathbf{x})$对信号进行统计推断与根据全部数据$\mathbf{x}$进行是等效的，$\lambda(\mathbf{x})$是个充分统计量就意味着以似然比与似然比门限进行比较来作出判决充分地利用了全部$\mathbf{x}$关于信号的信息量。

下边举例说明似然比的计算。

例1　二元通信系统中，在时间间隔T内发射机发射1伏的信号（“1”）或者不发射信号（“0”），而接收机观测到的波形为$x(t)=s(t)+n(t)$，$n(t)$是零均值，方差为σ_n^2的高斯噪声即服从$N(0,\ \sigma_n^2)$分布，试根据一次观测结果，计算观测值的似然函数与似然比。

$$H_0: \quad x = n$$

$$H_1: \quad x = 1 + n$$

对于一个观测值，x 是一维随机变量，当信号给定时 x 的分布规律是由噪声 n 来决定的。写出 n 的概率密度函数

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\left\{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

则x的似然函数为

$$p(x|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$p(x|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

其似然比为

$$\lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} = \exp\left\{\frac{2x-1}{2\sigma_n^2}\right\} \gtrless \lambda_0$$

两边取对数，得

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{1}{2} + \sigma_n^2 \ln\lambda_0 = x_0$$

式中 x_0 称为检测门限。在这一例中，以观测值 x 作为检验统计量与检测门限 x_0 进行比较，若大于或等于 x_0，判为有信号，小于 x_0 则判为无信号。

例 2 为了提高检测质量，减少判断错误，应当进行多次观测，根据多个观测值来作出判决。设对 $x(t) = s(t) + n(t)$ 进行 N 次观测，得到 N 个独立的观测数据 $x_1, x_2, \cdots, x_N$，若在观测时间内信号的参数保持不变，$n(t)$ 是均值为零、方差为 σ_n^2 的高斯噪声，试求似然函数与似然比。

作出两个假设

$$H_1: \quad x_i = s + n_i \qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, N$$
$$H_0: \quad x_i = n_i$$

对于每个观测值可以写出似然函数

$$p(x_i|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\left[-\frac{(x_i - s)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

$$p(x_i|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\left[-\frac{x_i^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

由于N个观测值彼此是独立的，其N维联合条件概率密度函数为

$$p(\mathbf{x}|H_1) = p(x_1, x_2, \cdots, x_N|H_1) = \prod_{i=1}^{N} p(x_i|H_1)$$