数理经济学的基本方法

〔美〕 ALPHA C. CHIANG 著

（上）

湘潭大学经济系

一九八三年四月

再版前言

自本书出版以来，许多经济学家善意地给我提出了很多意见和富有思想性的建议。为了使这些建议大部分得到实现，同时使我自己的一些想法得以具体化，因此，出版了第二版。同第一版比较，大部分章节适当地扩充了，而另一些章节适当地精简了。我希望本版较之第--版对读者更有帮助。

非线性规划一章(第二十章)改动最大，现在面目全新。在这一章中，我介绍了著名的库恩-塔克（Kuhn-Tucker）定理（凹规划）以及阿罗（Arrow）和艾索文（Enthoven）所作的推广（拟凹规划）。在讨论中还对通常所说的“约束规范”这个重要而复杂的概念给予充分的注意。第二个重要修改是明确地使用了隐函数定理。隐函数定理是讨论一般函数比较静态模型的分析基础（第八章)。这一章的后半部分我现在强调要用全微分法而不是用全导数法求出比较静态导数。

其余的变动散见各章，其中包括：使用了凹函数和凸函数这些标准术语（第九章后的各章)，并介绍了关于拟凹和拟凸函数的一些新内容（第十二，二十章）；作为检验二次型符号定则的另一方法，引进了矩阵的特征方程概念（第十一章），而且后来又与微分方程和差分方程的特征方程进行了比较(第十七章)；本版还讨论了洛必达法则（第十二章)和分部积分法(第十三章)；详细解释了拉格朗日乘数的经济含义（第十二章)，后面又介绍了它与线性规划(第十九章)中对偶选择变量的联系；现在用较简单的方法处理了恰当微分方程（第十四章)；在动态模型中（第十四到十七章)，仔细地区分了瞬间（Intertemporal）与市场交换（Market Clearing）的均衡含义；在很多章中，都增加了习题。根据一些人的建议，我也想把习题稍为“加难”一点，但我决不放弃原来的想法，习题的目的是使学生巩固所学知识，增强学习兴趣，而不是智力挑战，无意挫伤初学者的学习积极性。

本版虽然修改较多，但书的基本形式和方法仍保持完整。我认为它在使用上较之第一版前言中所提出的有更大的灵活性。例如，在学完矩阵代数（第五章）后，读者可直接学习线性规划（第十八章和第十九章）和对策论（第二十一章），不会产生困难。同样，在学完约束最优化（第十二章）专题后，无论有无线性规划知识，均可进行非线性规划的学习。原来对最优化问题就感兴趣的读者也可不学一般函数模型的比较静态分析（第八章)，读完第七章直接读第九章。若是那样的话，也可省去11.6节和12.4节比较静态部分的学习。

下列教授所提意见在许多方面影响到本版最后定型，我对他们表示感谢。他们是：Nancg S.Barrett 教授（美利坚大学），Thomas Bi-rnberg 教授（耶鲁大学），

E.J.R.Booth 教授（康涅狄大学），Harald Dickson 教授（瑞典，哥德堡大学）（University of Gothenburg,Sweden),Roger N·Folsom教授(海军研究生学院）Jcak Hirshleifer 教授(洛杉机,加利福尼亚大学),James C·Hsiao 教授（南康涅狄卅立学院）,Ki-Jun Jeong 教授（朝鲜汉城国立大学）(Seoul National University, Korea), J·Frank Sharp 教授（纽约大学商业行政学院） DennisR.Starleaf 教授（衣阿华州立大学)和Chiou Nan Yeh教授（麻省大学）。然而，由于我没有全部接受他们的意见，对此书必须由我个人负责。特别是，没有接受本版应写一个动态最优化引论的建议，很感抱歉。本书由于没有进一步使用变分法、最优控制论和动态规划这些数学方法，动态最优化问题不可能适当处理。如果使用这些数学方法，那末篇幅很可能过长。较好的处理是把动态最优化单独成册，这样就不受篇幅所限了。

ALPHA C.CHIANG

第一版前言

本书是为经济学家而编写的。编写此书有两个主要目的：第一,系统地讲述一些基本数学方法；第二,把数学方法应用于各种类型的经济分析,从而明显地揭示数学与经济学这两门学科的相互关系。因此，本书对下面两种读者都有所帮助：首先对那些具有数学基础而正探讨这两门学科相互关系的读者有帮助；其次对于懂经济但还需学习数学的读者也有帮助。因为大多数读者也许属于后者，我尽量详细地介绍数学内容。——假定他们具有很少的基础知识，且采取循序渐进的方式，使读者阅读不致迷失方向。此外，在表述方面我不愿取宠于纯数学家，在很大程度上使用非正规的数学语言。因为我认为这种类型的书，首先要考虑的应该是通俗易懂。

为使读者掌握足够的数学知识，有把握地博览当代经济文献，本书包含有广泛的数学内容。虽然处理数学内容的方法难免限于初等水平，但读者如能坚持刻苦攻读全书，至少将学到，甚至能运用下述数学知识：集合概念，集合运算，关系和函数，矩阵代数，微积分，简易微分方程和差分方程，凸集的基本概念。

为了使这些数学知识同经济分析相结合，书中列举了很多用数学式子表示的经济模型实例。更突出的是，全书实际按经济体系而不是按数学体系编排。全书共分六大部分，第一部分包括简短的绪论，数学模型的性质及其结构。其余五部分，分别研究下述不同的经济类型：

第二部分　静态（或均衡）分析

第三部分　比较静态分析

第四部分　最优化问题

（均衡分析的特殊情况）

第五部分　动态分析

第六部分　数学规划和对策论

（最优化的不同结构）

在每一部分的经济结构中按一定次序适当地介绍数学工具。由于数学应用于经济，而不是相反，我相信既有助于读者阅读技术资料，又能使读者更好地了解这两门学科的相互关系。

如上所述，经济论题的编排是按照自然的次序进行的，即从静态到比较静态再到动态。这种编排的次序，实际上对其有关数学内容来说也是合理的，方便的。第二部分内容讨论均衡分析。由于均衡分析常涉及解线性联立方程组，这就为引进初等矩阵代数作了准备。矩阵代数较早引进，是非常必要的，这使本书后继部分可明确地使用向量、矩阵和行列式。其他类似的书，通常不是这样处理的。在第三部分中，对比较静态的研究提出变化率和导数的概念，包括偏导数和全微分的概念，然后在第四部分的最优化问题中又应用了这些概念。但在第三和第四部分中，也要使用早先学过的矩阵代数。到第五部分动态分析，数学由微分学进入积分学和微分方程，接着是差分方程的平行讨论。在这里，读者再一次找到矩阵代数的用场。最后，在第六部分数学规划和对策论中，虽然也讨论了凸集的基本概念，但矩阵代数的运算仍然很重要。简言之，本书有一个有条不紊的“工具箱”。因此，奉劝读者按照书中的次序来学习前四部分（前十二章）。另一方面，学习后两部分的次序可以颠倒。从数学上看，微分方程（第五部分）紧接微分学（第四部分）之后，但从经济学考虑，数学规划和对策论（第六部分）应接在最优化（第四部分）之后和动态分析之前。对此，读者可自行选择。

编写本书的主要指导原则，要求通俗易懂，且便于讲授。为此，数学讨论凡在需要的地方，都采用了图形。为了便于读者复习、比较和综合在不同地方出现的各种问题，书中多处出现前后联系及其对照。为使读者明白使用特殊数学运算的原因，经常从经济学上给出直观解释。几乎在每一节的末尾都配有习题，读者如果实在不能全部做完，为使收效最大，也应尽可能多做。

本书虽然首先强调数学方法，但也详细讨论了很多经济模型，其中不但有经济增长模型，而且还包括若干个市场模型，厂商模型，消费模型，国民收入模型和投入－产出模型。因而本书除了与经济学家用的标准数学教程和数理经济学有明显的关系以外，在经济学上它也可作为象价值理论，国民收入分析，经济周期，经济发展和经济增长有关课程的有益补充读物。

在过去几年里，我的学生使用过书中一些材料。他们，特别是 Roberta Grower Carey 先生提出的问题和评论，为本书的反复修改提供了宝贵的指导性意见。此外，西北大学的 Mare Nerlove 教授通读过我的手稿，提出了很详细的建议，使本书得到实质性的改正。耶鲁大学的教授 John C.H.Fei 也读过我的部分手稿，作了有益的评论。对于他们，我深表谢意。我还要感谢康涅狄大学，在编写本书时，该校减轻了我的教学负担。最后，但并非不重要的是，我必须对我的妻子表示深深的感谢。她不仅花费了无数时间，而且作为评论家和打字员，为本书的完成乐意地贡献了她的才能。

ALPHA C·CHIANG

目　　录（上册）

第一部分　　绪　论

第一章　数理经济学的性质

从财政学或国际贸易的意义上说，数理经济学并不是经济学的一个独特分支。确切地说，它是经济分析的一种方法。经济学家在进行经济分析时，使用数学符号陈述问题，引用已知的数学定理进行推理。就分析的具体对象而论，它可以是微观或宏观经济理论，也可以是财政学，或是不发达国家的经济学等等。

今天任何一本初级经济学教程都经常用几何方法来推导理论结果。从最广泛意义上说，就可以把这种书看作数理经济学。显然，这样使用数理经济学这个术语，未免太一般化了。通常，数理经济学是指除了使用简单的几何方法以外，还使用像矩阵代数、微积分、微分方程和差分方程、集合论之类的数学方法来描述各种经济现象。本书目的就是向读者介绍这些最基本的数学方法。这些方法在现代经济文献中是经常遇到的。

§1.1　数理经济学和非数理经济学

既然数理经济学仅仅是经济分析的一种方法，因此，它不应，也确实不会同非数理经济学的经济分析方法，在基本方面有什么不同。任何一种理论分析不管其方法如何，其目的总是从一组给定的假设或公理出发，经过推理的过程得出一组结论或定理。数理经济学与所谓“文学经济学”(Literary economics) 的主要区别在于下述事实：在前者，假设和结论是不用文字而用数学符号，不用句子而用方程表述；其次，前者在推理过程中使用数学定理——有很多定理可引用——代替文字逻辑 (Literary Logic) 。因为用符号和文字表述实际上效果是相同的（符号通常用文字规定其含义就表明了这事实），所以选择哪种方式表述差别无几。不过，符号在演择推理中使用较方便，且使陈述简练精确。

选择文字推理或数学推理虽然关系不大，但数学推理有这样一个好处，它促使分析者在推理的每一阶段都作出明确的假设。这是因为数学定理通常是用“如果——那么”的形式陈述的，因而为了引出定理的“那么”（结果）部分，分析者必保证“如果”（条件）部分与所采用的明确假设相符合。

作为分析工具的几何方法怎么样呢？当然，几何是数学的一个分支，无论何时使用它，在范畴上就离开了“文学经济学”的领域。大家知道，几何分析明显的优点是直观性，相当容易理解和掌握。遗憾的是，这个优点受到维数上的严格限制。例如，读者也许还记得，在讨论无差别曲线的一般图形时，典型假设是消费者仅能得到两种商品。

这样过分简化的假设是不得已而采用的，因为绘出3维空间的几何图形非常困难，绘制4维（或更高维）空间的几何图形实际上是不可能的。为了研究3种、4种或n种商品的一般情况，我们必须求助于较灵活的工具，即方程。仅仅是这个理由才促使我们研究几何以外的数学方法。

简言之，我们看到数学方法具有如下的优点：(1)使用的“语言”比较简练精确；(2)有很多的数学定理供我们使用；(3)为使用数学定理，迫使我们明确地陈述作为先决条件的假设，这就使我们避免不自觉地采用无用和不明确的假设的毛病；(4)允许我们处理n个变量的一般情况。

这些考虑包含了数学方法一系列实质性的优点。然而，我们必须公平地给予同样的时间讨论另一方面的论点。数学方法的缺点主要有两方面：首先，数学语言不是所有经济学家的行话，这就造成了数理经济学家与非数理经济学家交流上的困难。这就是说，一方面非数理经济学家不能受益于数理经济学的研究结果〔除非把他们的研究结果费力地译成文字语言（Literary Language)〕。另一方面，也许是更重要的方面，数理经济学家不能从非数理经济学家的批评反应中受到教益。严格地说，实际上这不是数学方法本身的缺陷，而是特殊过渡阶段——经济学家的确分为两大“阵营”的阶段——所固有的一个问题，虽然如此，使用数学方法的经济理论家确实仍然冒着其研究成果只得到少数读者理解的风险。

第二，有数学训练的经济学家确实容易产生两方面的毛病：(1)把研究的问题仅限于数学上能解决的问题；(2)为了数学上的方便采用不适当的经济假设，一不小心就会追求数学技巧而抛弃经济原则。换句话说，就是不知不觉地让数学从仆人的身分变成了主人的地位。如果这种情况发生，与其说主要是数理经济学的缺陷，不如说问题主要出自数理经济学家本身。

读者可能注意到，我们没把平常遇到的对数学方法的批评，即用数学表述的理论是不实际的批评列举出来。不予列出的理由是，这样的批评是无济于事的。事实上，一般不能用“不实际的”浑名来批评经济理论，不管是否采用数学方法。理论按其实质来说，是从现实世界抽象出来的。它是找出最本质因素并识别其内在联系的一种手段，以致使我们能研究当前问题的本质——去掉现实世界中客观存在的各种各样的复杂性。那种“理论与实际不符”的说法只不过是陈词滥调而已，作为对理论的有效批评是不能接受的。从逻辑上来说，把任何一种探讨理论的方法都看作是脱离实际的方法，这种批评是毫无意义的。例如，在纯竞争条件下的厂商理论与在不完全竞争条件下的厂商理论一样，是不实际的，但这些理论用数学或不用数学推导，是无关紧要的。

简言之，我们可以把数学方法看作“运输的方法”，它能使我们以最快的速度从一组假设（出发点）得到一组结论（目的地）。普通常识告诉我们，如果一个人想去两英里远的地方，他很可能坐车，而不会步行，除非他要消磨时间或想锻炼腿力。同样，希望更快地得到结论的理论家，为其特殊目的，“乘坐”数学技巧这个“交通工具”是方便的。当然，事先他必须学习“驾驶课程”。因为掌握这样的技能长久有用，适当地花去必要的时间和精力的确是值得的。

一个严肃的“司机”——让我们沿用上述比喻——急需牢固掌握数学知识。根据社会科学研究委员会① 的建议，社会科学家应该了解下面的数学内容：集合论，关系，函

数，微积分，概率论，矩阵理论，有限差分，差分方程，偏微分和多重积分。当然，所有这些内容在本书中详细论述是不可能的，但就其基本内容来说，大部分将要在本书中讨论。因此，刻苦读完本书的人，至少将会相当熟练地阅读和理解下列期刊中大部分专业论文：美国经济评论（American Economic Review），经济学季刊（Quarterly Journal of Economies），政治经济学杂志（Journal of Political Economy），经济学和统计学评论（Review of Economics and Statistics），经济学杂志（Economic Journal）。学习了上述数学内容后，会大大增强学习数理经济学的兴趣，而且还能进行更严格和高深的数学学习。

§1.2 数理经济学和经济计量学

经济学中有许多词汇，对不同的作者，在不同的时间和不同的上下文里，具有不同的含义。经济计量学一词就是很恰当的例子。按照一种定义② "经济计量学是经济分析的一种特殊类型。这种分析常通过复杂的统计方法作媒介，将经济现象的一般理论处理——常用数学术语明白地表示——与经验计量经济现象结合起来"。从这个意义上讲，经济计量学是一个包含经济分析的推理和统计两个方面的一般术语。

但近来使用这个词时，其含义变得狭窄了。现在几乎就是指用估量和假设检验的统计方法研究经验数据。反之，数学应用于经济分析的纯理论方面就称为数理经济学。因此，经济计量学和数理经济学成为并列的两个术语（不是一个从属另一个），表示研究经济问题所应用的数学方法具有不同的范围。

本书仅研究数理经济学，即把数学专门应用到演择推理上，而不是应用于归纳的研究上。因而，我们将主要进行理论研究而不是对经验资料进行研究。当然，这仅仅是研究范围的选择问题，而决不意味着经济计量学的重要性就次于数理经济学。

实际上，经验研究和理论分析常常是相辅相成的。一方面，理论在有把握地应用之前，必经得起经验数据的检验。另一方面，为了确定关系最密切和最富有成效的研究方向，统计工作需要经济理论作指导。理论和经验研究互为补充的最好实例在总消费函数研究中可以找到。凯恩斯（Keynes）关于消费函数的理论研究导致消费倾向的统计估算，而库兹涅茨（Kuznets）和哥尔德斯密斯（Goldsmith）关于消费倾向的相对长期的不变性（这与凯恩斯理论所预期的相矛盾）又促进了杜生贝（Duesenberry）、弗里德曼（Friedman）和其他人③的总量消费理论的完善。

---

① "由社会科学研究理事会委员会提出的社会科学家数学训练的建议"，经济计量学，1956年1月，第82—86页。

② 里昂惕夫："经济计量学"，载当代经济学调查〔H.S艾斯利（H.S.Ellis）主编〕，1948年，第388页。（注脚）

③ 凯恩斯：《就业，利息和货币通论》，库兹涅茨：《国民收入，研究结果概要》，第53页；哥尔德斯密次：《美国储蓄研究》第1卷，第三章，普林斯顿大学出版，1955年；杜生贝：《收入储蓄和消费行为理哈论》，佛大学出版1949年，费里德曼：《消费函数理论》，普林斯顿大学出版，1957年。

然而，在某种意义上来说，数理经济学可看作两者的基础。因为有价值的统计和经济研究，在理论上有一个好的表现形式（最好使用数学公式）是必不可少的。因此，本书的内容不仅对于研究经济理论有兴趣的人有帮助，而且对于研究经济计量学而缺乏数学基础的人也有帮助。

第二章 经济模型

如前所述，任何一种经济理论必须是从现实世界中抽象出来的。首先，因为实际经济极其复杂，我们不可能立即了解其全部内在关系；其次，就这些关系而言，对于认识研究中的特殊经济现象也不是同等重要的。因此，根据我们的判断找出那些与我们的问题有关的主要因素和关系，然后把我们的注意力仅集中在这些方面。经过这样慎重考虑的简化的分析结构称为经济模型。它仅是实际经济粗略的轮廓表示。

§2.1 数学模型的成分

经济模型只是一种理论结构，不一定是数学模型。但如果它是数学模型，通常由用来描述模型结构的一组方程所组成。由于很多变量在某些方面互相关联，这些方程对所采用的一组分析假设给出数学形式。然后，对这些方程进行有关的数学运算，我们可以得出一组结论。这组结论，是根据采用的假设从逻辑上推出的。

变量、常数和参数

变量是其大小可以变化的量，也就是能取不同值的量。经济学中通常所使用的变量包括价格、利润、收益、成本、国民收入、消费、投资、进口、出口等等。既然每个变量可取各种不同的值，因而必需用一符号而不用具体数字表示它。例如，我们可用P表示价格，用π表示利润，用R表示收益，用C表示成本，用Y表示国民收入等等。但是，当我们写出$P=3$或$C=18$（选择适当单位）时，我们就把这些变量“固定”在这些具体数值上。

解出适当结构的经济模型，我们可得到某一组变量的解值，例如，市场交换价格水平或最大利润的产出水平。由模型求出解值的变量通称为内生变量（源于内）。然而，模型中也含有这样的变量，它是由模型外的力量所决定的，其值仅认为是已知数据，这样的变量称为外生变量（源于外）。应注意的是一模型的内生变量很可能是另一模型的外生变量。例如，在分析小麦市场价格（P）时，变量P肯定是内生的；但在消费理论的结构中，对单个消费者来说，P变为已知数，因而，认为是外生的。

变量常与确定数或常量组合，例如，表示式$7P$或$0.5R$。常量是不变的量，因此，

与变量正好相反。当常量与变量结合时，常量常称为该变量的系数。但是，系数可以是符号而不是数字。例如，为了获得较高水平的概括性（参看2.7节），在模型中我们可让符号 a 代表已知常量，用表示式 ap 代替 $7p$。这个符号 a 是一种相当特殊的情况——它应该表示已知常数，但因我们没有具体指定它的数值，实际上它可任意取值。简言之，它是一个可变的常量！为了辨认它的这种特殊身分，我们给它一个特殊的名字参数常数（或简称参数）。

必须适当地强调，虽然可赋予参数不同值，但在模型中仍然看作数据。即使常量是参数，有时也叫作"常量"，就是由于这个原因。在这一点上，参数很象外生变量，因为二者在模型中都看作"已知的"数据。这就说明了为什么很多作者为简便起见，用一个名称即"参数"共同表示两者的原因。

按照惯例，参数常量通常用符号 a，b，c，或用相当于这些符号的希腊字母：α，β 和 γ 来表示。当然，也允许使用其它的符号。至于外生变量的符号，为了能与内生变量相区别，我们给所选择的符号加上下标O。例如，如果 P 表示价格，那么 P_0 就表示外生确定的价格。

方程式和恒等式

变量虽然可独立存在，但是只有用方程或不等式使它们互相关联时，才有实际意义。在此时，我们仅讨论方程。

就目前来说，我们可以区别三种方程，即定义方程、行为方程和均衡状态。

定义方程是指在两个含义完全相同但形式不同的表示式之间建立的恒等式。这种方程，虽然也使用等号，但常使用恒等号≡（读作恒等于）代替一般的等号=。举例来说，总利润定义为总收益对总成本的超额，因此，我们可写为

$$\pi \equiv R - C$$

另一方面，行为方程规定了变量这样的变化方式，即一变量的变化行为与其他变量变化相适应。它或者包含有人类行为（例如与国民收入有关的总消费形式），或者包含非人类行为（例如，厂商的总成本对产出变化如何反应）。从广义上说，行为方程可用来描述由一般制度方面包括技术方面（例如，生产函数）和法律方面（例如，税制结构）所确定的模型。但在写出行为方程以前，总需要对研究中的变量行为方式采用明确的假设。考察下列两个成本函数。

$$C = 75 + 10Q \tag{2.1}$$

$$C = 110 + Q^2 \tag{2.2}$$

这里 Q 表示产出数量。由于两个方程的形式不同，显然所假定的生产条件彼此不同。在（2.1）中固定成本（$Q=0$ 的 C 值）是75；而在（2.2）中是110。成本的变化也不同。在（2.1）中 Q 增加一个单位，C 总是增加10；而在（2.2）中当 Q 一个单位一个单位地增加时，C 将大幅度地递增。很清楚，我们主要通过规定行为方程的形式，才对模型所采用的假设给出数学表示。

方程的第三种类型是均衡状态。只有当我们的模型包含均衡概念时，才有均衡状态。如果是这样的话，那么均衡状态就是一个方程，该方程描述达到均衡必须预先具备的条

件。经济学中，人们最熟悉的两种均衡状态是：

$$Q_d = Q_s \quad \text{〔需求量 = 供应量〕}$$

和
$$S = I \quad \text{〔意愿储蓄 = 意愿投资〕}$$

它们分别与市场模型均衡和形式最简单的凯恩斯国民收入模型均衡有关。这种方程既不是定义方程也不是行为方程，它们单独构成一类方程。

§2.2 实 数 系

方程和变量是数学模型的基本成分。但因经济上的变量取值通常是数字，因此，我们要简单地谈一谈数系。这里我们只讨论通常所说的“实数”。

像1，2，3，……，这样一类数的全体称为正整数，计算中它们最常用。其对应的相反数-1，-2，-3，…，叫做负整数，例如，可以用这些数表示零下温度（单位是度）。另一方面，数O（零）既不是正整数，也不是负整数，在这种意义上它是一个独特的数。我们把所有正整数，负整数和数O合并成一个类，称为整数集合。

当然，整数并不包含所有的数，因为我们还有像$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{7}{3}$这样一类分数——如果把它们标在直尺上，它们位于两个整数之间。我们还有像$-\frac{1}{2}$和$-\frac{2}{3}$这样一类负分数。正分数和负数分合在一起组成分数集合。

每个分数都可表为两个整数之比，这是所有分数的共性。这样，分数称为有理数是合适的。（在这种用法中，有理意指比值，并不含有任何“情感”的意义。）但整数也是有理数，因为任何整数n可看作两个数的比$n/1$。整数集合和分数集合合在一起组成有理数集合。

然而，一旦我们使用有理数概念时，自然会出现无理数概念——无理数是不能表为一对整数之比的数。数$\sqrt{2} = 1.4142\cdots$就是一例，它是一个无限不循环小数。另一个无理数是一个特殊常数$\pi = 3.1415\cdots$（表示园的周长与其直径的比值），它又是一个无限不循环小数。所有无理数的特征都是无限不循环小数。

如果把每个无理数标在直尺上，它位于两个有理数之间，因此，就像分数填在直尺上整数之间的空隙中一样，无理数填在两个有理数之间的空隙中。这样填进的结果就产生数的连续统，号称为“实数”。事实上，这个连续统组成所有实数的集合。

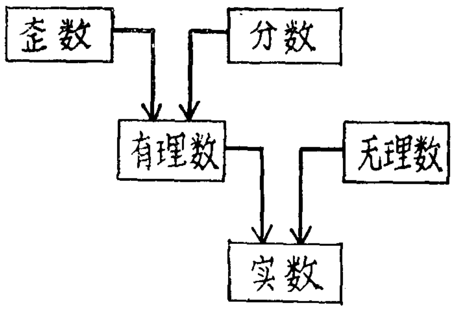

图 2.1

在图2.1中（根据讨论次序）列出的所有数集按着相互关系排列。然而，如果我们从下往上看，实际上我们可得到一个分类图解。在这个图解中，

把实数集合分解为部分集合和子部分集合。因此，这个图就是实数系的构造提要。

本书前十四章，我们需要的都是实数，但在数学中使用的数不止是实数。事实上，取名为“实”数的理由，就是还存在有“虚”数。虚数与负数的平方根有关。这概念将在后面第十五章讨论。

§2.3 集 合 概 念

我们已多次使用“集合”这个词。因集合概念已构成现代数学每个分支的基础，至少熟悉它比较基本的方面，才合乎需要。

集 合 符 号

集合就是不同对象的集中。这些对象可以是一组（不同的）数，或者是一组其他的东西。于是，选修特殊经济课程的全体学生可看作一个集合，正像三个整数 2，3 和 4 能组成集合一样。集合里的每个对象叫做集合的元素。

书写集合有两种不同的方法：列举法和描述法。如果让 S 表示三个数 2，3，4 组成的集合，那么，用列举法我们可写为：

$S=\{2,\ 3,\ 4\}$

但如果我们令 I 表示所有正整数集合，那么列举就有困难，我们就用描述元素来代替，记为

$I=\{x\,|\,x\ \text{正整数}\}$

读作：I 是所有正整数 x 的集合。注意，在这两种情况下，都使用大括号封住集合。为了把元素的一般符号与元素的描述区分开来，在描述法中，总插进一竖横（或冒号）。另一个例子是大于 2，小于 5 的实数集合（令它为 J），用符号表示为：

$$J=\{x\,|\,2<x<5\}$$

这里甚至连描述性的陈述也用符号表示了。

只有有限个元素的集合，称为有限集合，如上面的集合 S 就是一例。另一方面，集合 I 和 J 都含有无限个元素，它们都是无限集合的例子。有限集合总是可数（或可计数）的，即它们的元素可按次序 1，2，3，… 逐个数出。然而，无限集合或者是可数的（集合 I），或者是不可数的（集合 J）。在后一种情况下，没有方法使集合中元素与计数数目 1，2，3，…发生联系，因此，这种集合不是可数集合。

集合中成员用符号 $\in$〔希腊字母 ε (epsilon) 的变形，表示“元素”〕表示，读作：属于…的一个元素。这样，对于前面定义的集合 S 和 I，我们可写 $2\in S$ $3\in S$ $8\in I$ $9\in I$（等等）。但显然，$8\notin S$（读作：8 不是集合 S 的元素）

集合之间的关系

当比较两个集合时，可观察出几种可能的关系。如果两个集合 S_1 和 S_2 碰巧含有相同的元素：

$S_1=\{2,\ 7,\ a,\ f\}$ $S_2=\{2,\ a,\ 7,\ f\}$

那末就说S_1和S_2相等（$S_1=S_2$）。注意，元素在集合中出现的顺序是无关紧要的。但是，两个集合中，即使有一个元素不同，这两个集合就不相等。

一个集合是另一个集合的子集，这是两个集合的另一种关系。如果我们有两个集合

$S=\{1, 3, 5, 7, 9\}$和$T=\{3, 7\}$

那末T是S的子集，因为T的每个元素也是S的元素。它的比较正式的说法是：T是S的一个子集，当且仅当“$x\in T$”必有“$x\in S$”。使用集合的包含符号$\subset$（包含于）和$\supset$（包含），那么我们可记为：

$T\subset S$　　或　　$S\supset T$

两个集合恰巧互为子集，这是可能的。然而，出现这种情况时，我们可肯定，这两个集合必相等。正式述于下：我们有$S_1\subset S_2$和$S_2\subset S_1$，当且仅当$S_1=S_2$。

注意：符号$\in$是说明单个元素与集合的关系，而符号$\subset$说明子集合与集合之间的关系。作为这些概念的应用，根据图2.1我们可以指出，整数集合是有理数集合的子集。同样，有理数集合是实数集合的子集。

由集合$S=\{1, 3, 5, 7, 9\}$中的五个元素可组成多少个子集合？首先，由S的每一个元素单独可组成S的不同子集，例如$\{1\}$，$\{2\}$等等。但集合中任意二个，三个或四个元素也可组成S的子集。例如，$\{1, 3\}$，$\{1, 5\}$，…，$\{3, 7, 9\}$等等。就子集合而论，集合S本身（它共含五个元素）也可看成属于它自己一个子集合——S的每个元素是S的元素，因此，集合S本身满足子集合的定义。当然，这是一种极端情况。由这种情况，我们得到S“最大”的子集，即S自身。

另一个极端情况是S“最小”的子集，该集合不含任何元素。这样的集合叫做零集或空集，用符号ϕ表示。空集可以看作集合S的子集，其理由是相当有趣的：如果空集不是S的子集（$\phi\not\subset S$），那末ϕ至少必含有一个元素x使$x\notin S$。但由定义，空集决不含有任何元素，所以我们不能说$\phi\not\subset S$，因而，空集是S的子集。

计算S所有的子集，包含两个极端情况S和ϕ，我们共得到$2^5=32$个子集。一般说来，如果集合含n个元素，那么，由这些元素共可组成2^n个子集①。

明确地区分符号ϕ与$\{0\}$的含义是极为重要的。前者没有元素，但后者的确含有一个元素0。空集合是唯一的，全世界只有一个这样的集合，且它可看作能想得到的任意集合的子集。

两个集合可能根本没有公共元素，这是集合可能的第三种关系。假设是这种情况，就说两个集合不相交。例如，正整数集合，负整数集合，是不相交的集合。当两个集合含有一些公共元素，但还有一些元素分属于每个集合时，这是集合的第四种关系。如果是这种情况，这两个集合既不相等也不分离；且任何一个都不是另一个的子集。

集　合　运　算

① 已知含n个元素的集合$\{a, b, c, \cdots, n\}$我们首先把它的子集分为两类：一类含元素a，另一类则不含。这两类的每类又可分为两个子类：一类含元素b，另一类则不含。注意，用这种分类法考虑第2个元素b时，我们已把类的数目增至两倍，由2增至4（$=2^2$），同理，考虑元素C时，类的总数将增至$8=(2^3)$，当考虑所有n个元素时，类的总数将变为子集的总数，且这个数等于2^n。

当对数进行加、减、乘、除或开方时，我们是在进行数学运算。集合不同于数，但可类似地对它们进行某些数学运算。这里讨论三种主要运算包含集合的并、交和余的运算。

取两个集合A和B的并就是组成含有（且仅含有）这样一些元素的新集合，这些元素或属于A，或属于B，或同时属于A和B。用符号$A\cup B$（读作：A并B）表示并集。

例 1 如$A=\{3, 5, 7\}$和$B=\{2, 3, 4, 8\}$，那么
$A\cup B=\{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$。
这例子说明两个集合A和B既不相等又不分离，且任何一个都不是另一个的子集。

例 2 参阅图2.1，我们看到所有整数的集合与所有分数的集合的并是所有有理数的集合。同样，有理数集合与无理数集合的并得到所有实数的集合。

另一方面，两个集合A与B的交，是一新集合，它含有（且仅含有）集合A和B中

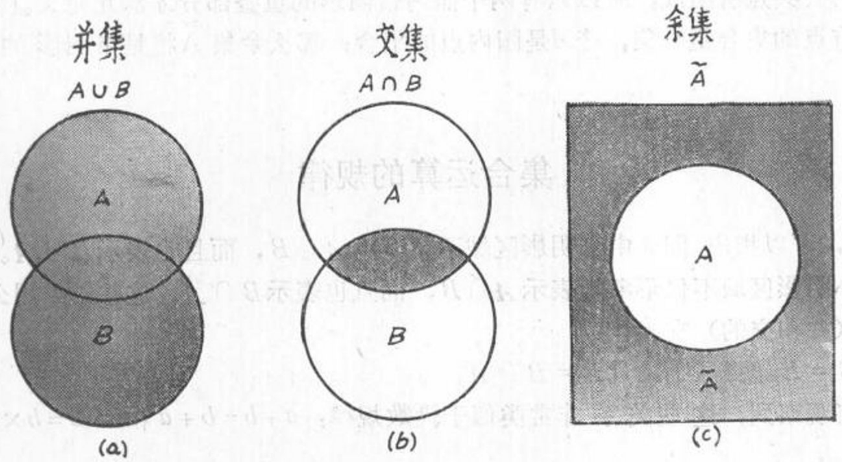

图 2.2

公共的元素。交集用符号$A\cap B$（读作：A交B）表示。

例 3 由例1的集合A和B，我们可写成

$$A\cap B=\{3\}$$

例 4 如果$A=\{-3, 6, 10\}$和$B=\{9, 2, 7, 4\}$；那么，$A\cap B=\phi$。集合A与集合B不相交，因此，它们的交是空集——A与B没有公共元素。

显然，交比并是限制更多的概念。在前者，其元素仅是A与B所共有的元素；而在后者，或属于A，或属于B的元素，就足以确定并集中的成员。运算符号$\cup$和$\cap$（顺便提一句，它们同符号$\sqrt{\ }$，+，+等类似）分别有“或”与“和”的涵义。比较下面交和并的正式定义可以更清楚了解这一点：

交：$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 和 } x\in B\}$

并：$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$

在说明集合的余集以前，首先我们引进全集概念。在所讨论的特定范围内，如果使

用的数字集合仅是头七个正整数的集合，那么，全集U就是指这个集合。然后，我们用已知集合，比方说，$A=\{3, 6, 7\}$，定义另一集合$\widetilde{A}$（读作：A的余集）：这个集合$\widetilde{A}$含有在集合U中但又不在A中的所有的数，即

$\widetilde{A}=\{x \mid x\in U$和$x\notin A\}=\{1, 2, 4, 5\}$

注意，符号$\cup$有"或"的涵义，符号$\cap$有"和"的涵义，但余集符号～具有"不"的涵义。

例 5 如果$U=\{5, 6, 7, 8, 9\}$且$A=\{5, 6\}$那么，$\widetilde{A}=\{7, 8, 9\}$

例 6 U的余集是什么？因考察中的每个对象（数）包含在全集中，故U的余集必为空集。于是，$\widetilde{U}=\phi$。

图2.2的三个图形使集合的三种运算形象化了，该图通称为**维恩图**（*Venn diagrams*）。图a中，上园中的点组成集合A，下园中的点组成集合B。那么A和B的并是由复盖两园的整个带阴影的区域所组成。在图b中绘出了两个同样的集合（圆）。因其交仅由两个集合的公共点所组成，所以只有两个园内带阴影的重叠部分才满足定义。图c中，矩形内部所有点的集合是全集，令A是园内点的集合；那么余集$\widetilde{A}$将是带阴影的园外区域。

集合运算的规律

由图2.2可以指出，图a中带阴影区域不仅表示$A\cup B$，而且也表示$B\cup A$。同样，在图b中小阴影区域不仅形象地表示$A\cap B$，而且也表示$B\cap A$。这些结果用公式表示时，称为（并和交的）**交换律**：

$A\cup B=B\cup A \qquad A\cap B=B\cap A$

读者将观察到，这些关系非常类似于代数规律：$a+b=b+a$和$a\times b=b\times a$

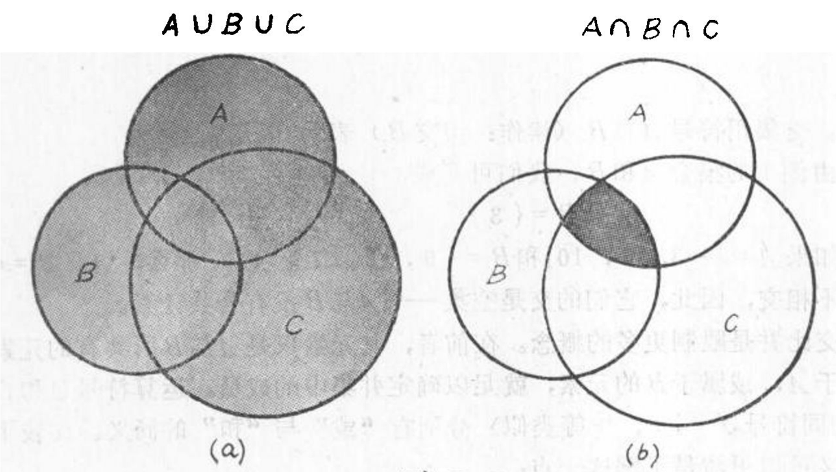

图 2.3