现代应用数学丛书

随机过程

〔日〕伊藤　清　著

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中譯本。全书共五章，第一章以測度論的观点介紹了概率論的基本概念，第二章叙述可加过程和可加叙列的一般理論，第三章闡述平稳过程的基础理論，第四、五章为 Markoff 过程，把基础部分放在第四章，而把关于扩散的一些现代理論和方法放在第五章。为了便于讀者对 Markoff 过程的了解，书末另附一篇 Kolmogoroff 的"概率論的解析方法"作为附录。本书可供高等学校数学系、物理系师生及工程师作参考。

现代应用数学丛书

随 机 过 程

原书名 确率过程
原著者 〔日〕伊藤 清
原出版者 岩波书店
譯者 刘璋溫

*

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售
中华书局上海印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印張 8 6/32 字数 193,000
1961年7月第1版 1961年7月第1次印刷
印数 1—3,000

統一书号：13119·407
定价：(十四) 1.40元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成40种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地減少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

譯者序

本书是根据伊藤清著"确率过程"I和II翻譯的。伊藤的原著是日本岩波书店从1957年起連續出版的一套"岩波讲座　現代应用数学"基础篇中的两本。

随机过程是概率論的一个主要組成部分，它的研究与現代科学技术有密切的关系。本书以不大的篇幅用簡练的笔法对随机过程論的几个主要方面和一些最新成就作了精练和严格的闡述。对于具有初步概率論和泛函分析知識的讀者来說，通过这一本书，可以較快地掌握現代随机过程的基本理論和发展方向。

本书的翻譯工作是在 Е. Б. Дынкин 教授的鼓励和当时中国科学院数学研究所概率論組全体同志的大力支持下进行的。1958年春天，Е. Б. Дынкин 教授来我国讲学，他通过譯者的介紹了解到原书的內容后，非常称讚，并建議早日把它翻譯出来（Дынкин 教授回国后在苏联亦組織了翻譯，在他的指导下本书的俄譯本第一册已于1961年出版）。本譯稿是在1958年6月底完成的，其中第4章的前几节为余潜修先生所譯。随后譯稿一直流傳于北京大学，复旦大学和南开大学，作为专門化的参考教材。这次承复旦大学郑紹濂同志和南开大学王梓坤同志分別整理前三章和后两章，并由郑紹濂同志統一校訂。校样排出后，譯者重新校閱了一遍，根据原文又作了一些修正。

本书的出版，是与上列許多同志的帮助分不开的。譯者在此对他們表示深切的感謝。

刘璋溫　1961年4月北京

目　　录

第1章 基本概念

§1 測度論观点下的概率論(1) 直观的背景

假設甲、乙二人擲錢币,以先擲出正面者为胜。現在試让甲先擲而来考虑下列問題:

(i) 甲胜的概率是多少;

(ii) 直到决定胜負为止所擲的平均次数是多少?

首先,观察这种比賽,它可能出現哪些結果。若以 O 表示擲出正面,U 表示擲出反面,則可能产生的結果为

$$\left\{\begin{array}{l}\omega_1=O\\ \omega_2=UO\\ \omega_3=UUO\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \omega_n=\underbrace{UU\cdots U}_{(n-1)}O\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \omega_\infty=UUU\cdots\end{array}\right\} \tag{1.1}$$

ω_1 是甲先擲出正面而結束比賽的情形,ω_2 是甲擲出反面,乙擲出正面而結束比賽的情形。ω_{n-1} 是直到第 $n-1$ 次为止二人都擲出反面,在第 n 次才擲出正面而結束比賽的情形,因此可由 n 的奇偶来决定甲或者乙的获胜。最后,ω_∞ 是甲、乙双方老是擲出反面的情形,这时比賽将无限制地継續下去。由于 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\infty$ 是这种比賽經过的各种样本,所以叫做**样本点**(sample point),其全体的集合 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\infty\}$ 就叫做**样本空間**(sample space)。

現在来考虑各个样本点的概率。第1次擲出正面或者反面,这都是同等可能的,所以 ω_1 的概率是 $1/2$,而剩下的 $\{\omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_\infty\}$

全体的概率就应該是1/2。又由同样的理由，后者的概率1/2应平均地分給ω_2和剩下的$\{\omega_3, \omega_4, \cdots, \omega_\infty\}$，卽各为1/4。据此可知，分布于各个点$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\infty$上的概率分别为1/2, 1/4, 1/8, …, 0。

以$P(\omega)$表示分布于ω上的概率。于是就有

$$\begin{aligned} &P(\omega_1)=1/2,\ P(\omega_2)=1/4,\ \cdots,\\ &P(\omega_n)=1/2^n,\ \cdots,\ P(\omega_\infty)=0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

又若E为Ω的子集合，則分布于E上的概率是分布于E的各点上的概率的总和，卽

$$P(E)=\sum_{\omega\in E}P(\omega). \tag{1.3}$$

这样一来，就得到了一个集合函数$P(E)$。这个集合函数叫做**概率分布**(probability distribution)。

其次，考虑(ii)的問題。直到决定胜負为止的次数可由各个样本点所唯一决定。譬如ω_1时为1，ω_2时为2，ω_n时为n。这就是定义在样本空間上的函数，以$x(\omega)$来表示。在样本空間上如此定义的函数叫做**随机变数**(random variable)。問題(ii)就是去求随机变数$x(\omega)$的平均値。平均値有各种各样的定义方法，而最普遍被采用的是以下的所謂**数学期望**(expectation)：

$$E(x)=\sum_{\omega\in\Omega}x(\omega)P(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}nP(\omega_n)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{1}{2^n}=2. \tag{1.4}$$

現在轉到問題(i)上去。所謂甲胜就是上述的$x(\omega)$为奇数的場合，因此可用条件“$x(\omega)=$奇数”来表示。这种可以由有关样本点ω的条件来表示的事情就叫做**事件**(event)。事件的概率規定为分布于滿足該条件的样本点全体的集合E(这叫做該事件的**外延**(extension))上的概率$P(E)$。因此

$$P(\text{甲胜})=P(E)=\sum_{n=0}^{\infty}P(\omega_{2n+1})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}=\frac{2}{3}. \tag{1.5}$$

現在把上例中的本质部分抽出来看一看。首先，作为基础的

东西就是命名为样本空間的集合 Ω 和它上面的概率分布 P. 此外，还有一个定义在 Ω 上而称为随机变数的函数❶，它的数学期望由(1.4)左端的等式来定义。与 Ω 里的点有关的条件叫做事件，而該事件的概率就可規定为 P 对其外延 E 的値 $P(E)$. 但在这种一般的場合下，如何来給出概率分布就需要討論一下。由上面的例子可知，假如 Ω 为一可数集合，只要給予各个样本点的概率使得其总和为 1，則就可由(1.3)給出它的概率分布。但是，在把直綫上的点集、平面上的点集、以及更一般的，例如做 Brown 运动的粒子的各种各样的运动途徑的集合分别看做是 Ω 的場合下，按照上述朴素的方法就不可能給出概率分布。然而，若注意到概率分布的想法类似于質量分布，而后者的数学理論就是測度論，由此，很自然的可以設想，測度論也将适用于概率分布。

正是基于这种出发点，我們把概率論构造成为測度論的形式，因而使得长期以来以常識或者直观为基础，而且缺乏严格的邏輯推理的概率論眞正成为数学理論的一个分支，并且已在許多的应用上获得了有价値的成果。

是 R^n 的一子集么?

§2 概率分布

令 X 为一个集合，$\boldsymbol{B}$ 为由 X 的子集所构成的 Borel 集合体。对于 $\boldsymbol{B}$ 的元素(集合)定义了 Lebesgue 測度 $P(E)$，而且滿足

$$P(X)=1 \tag{2.1}$$

时，就称 P 为 $X(\boldsymbol{B})$ 上的**概率測度** (probability measure) 或者**概率分布**，或簡称为**分布**。

首先，作为最簡単的情况，試考慮 X 为有限集合时的情形。令 X 的元素为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 这时通常可将 $\boldsymbol{B}$ 取为由 X 所有

---

❶ 随机变数的严格的定义将在下面講到。此处的定义只适用于样本空間只包含可数个元素的情形。——校者注

的子集組成的集合 2^X. 若只包含一个点的集合的測度 $P(x_1)$, $P(x_2)$, $\cdots$, $P(x_n)$ 已給定,則由測度的可加性,对任意的 $E\subseteq X$ 的概率可以定义为

$$P(E)=\sum_{x\in E}P(x). \tag{2.2}$$

因此,在这样的場合下,只須給定点函数 $P(x)$ 就可决定概率分布了。显然,$P(x)$ 应满足下述的条件

$$P(x)\geqslant 0,\quad \sum P(x)=1. \tag{2.3}$$

特别是当 $P(x)$ **不依賴于** x,而且 $P(x)=1/n$ 时,就称 P 为**一致分布** (uniform distribution) ❶。

其次,对于 X 是可数无限集合的情形,它与有限集合的情况大致相同。但此时不再存在一致分布了。

当 X 是实数集合 R^1 时,問題就較困难了。除了个别的特殊情况外,$\boldsymbol{B}$ 不可能取为由 R^1 的所有子集組成的集合 2^{R^1}. $\boldsymbol{B}$ 的最自然的取法是取为包含所有开集的最小 Borel 集合体 $\boldsymbol{B}^1$. 通常称 $\boldsymbol{B}^1$ 的元素为 **Borel 集合**。令 P 为 $R^1(\boldsymbol{B}^1)$ 上的概率分布。对 $x\in R^1$ 的任意邻域 U,若它的 P-测度 $P(U)$ 为正时,就称 x 为 P 的負荷点,而这样的点的全体的集合就叫做 P 的**負荷者** (support)。特别若 $P(x)>0$, 則显然 x 是 P 的負荷点,对于这样的 x,我們另外給它一个名称,叫做 P 的**不連續点** (discontinuity point)。P 的不連續点的全体 D 至多是一可数集合。当 $P(D)=1$ 时,称 P 为**純粹不連續** (purely discontinuous),而 $P(D)=0$ 时,就称 P 为**連續** (continuous)。作为比連續稍微强的条件,有**絕对連續** (absolutely continuous) 的概念。若 E 的通常的 Lebesgue 測度 $|E|=0$ 时,必有 $P(E)=0$, 則称 P 为絕对連續。这时 P 具有密度,而且可写为

$$P(E)=\int_E f(x)\,dx. \tag{2.4}$$

---

❶ 也称为均匀分布。——校者注

此处 $f(x)$ 应满足的条件是

$$f(x) \geqslant 0, \quad \int_{R^1} f(x)\,dx = 1. \tag{2.5}$$

虽是連續、但不是絕对連續的概率分布叫做奇异(singular)分布。純粹不連續分布,絕对連續分布和奇异分布是在 $R^1(\boldsymbol{B}^1)$ 上的分布中重要的三种形状,而任意的分布都可以由这三种形状的分布的凸組合(convex combination)来表示。(所謂 a 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的凸組合,就是指能够写成 $a=\sum c_i a_i$, $c_i \geqslant 0$, $\sum c_i = 1$ 的形状)。这就是 **Lebesgue 的分解定理**。

例 1 δ 分布(delta distribution) $\delta(\cdot;a)$. 这是純粹不連續分布,也就是上述的 D 只含有一点 a 的場合。特别当 $a=0$ 时就叫做**单位分布**(unitary distribution)。

例 2 二項分布(binomial distribution) $B(\cdot;p,n)$, $0<p<1$, n 是自然数。这是純粹不連續分布,也就是由 $D=\{0,1,2,\cdots,n\}$,

$$P(k)=\binom{n}{k}p^k \cdot q^{n-k}, \quad q=1-p, \quad k=0,1,2,\cdots,n \tag{2.6}$$

給定的分布。因为 $P(k)$ 等于 $(p+q)^n$ 展开式中的第 k 項,所以有二項分布的名称。

例 3 Poisson 分布(Poisson distribution) $P(\cdot;\lambda)$, $\lambda>0$. 这是純粹不連續分布,也就是由 $D=\{0,1,2,\cdots\}$,

$$P(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\cdots \tag{2.7}$$

給定的分布。

例 4 正态分布(normal distribution) $N(\cdot;a,v)$, a 是实数, $v>0$. 这是絕对連續分布,密度由下式給定:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2v}} \tag{2.8}$$

例 5 Cauchy 分布(Cauchy distribution) $C(\cdot;a,c)$, a 是实数, $c>0$, 这是絕对連續分布,密度由下式給定:

$$f(x)=\frac{c}{\pi}\cdot\frac{1}{c^2+(x-a)^2} \tag{2.9}$$

当 X 为 m 維空間 R^m 时，仍然可以照 R^1 的場合将結果推广。$\boldsymbol{B}$ 与一維的情况同样，是包含所有开集的最小 Borel 集合体 $\boldsymbol{B}^m$. $\boldsymbol{B}^m$ 的元素叫做 Borel 集合。与上述一样，分布有三个形状，并且 Lebesgue 的分解定理成立。

例6 δ 分布 $\delta(\cdot;\boldsymbol{a})$ 与一維的情况一样，不过 $\boldsymbol{a}$ 是 R^m 的元素而已。

例7 多項分布(multinomial distribution) $B(\cdot;\boldsymbol{p},n)$，$n$ 是自然数，$\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，$p_i\geqslant 0$，$\sum p_i=1$．这是純粹不連續分布，而 D 是格子点 $\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_m)$，$\sum k_i=n$，$k_i\geqslant 0$ 的全体。

$$P(\boldsymbol{k})=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}. \tag{2.10}$$

例8 正态分布 $N(\cdot;\boldsymbol{a},V)$，$\boldsymbol{a}$ 是 R^m 的元素，V 是对称正定(狭义)矩陣。这是絕对連續的，其密度为

$$f(\boldsymbol{x})=(2\pi)^{-\frac{m}{2}}(\det V)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}),(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}))\right\}. \tag{2.11}$$

V^{-1}

此处 $V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$ 是把綫性变換 V 作用于矢量 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}$ 而得的，(,)表示內积。

如上所述，从一維的 R^1 的情形可平行地推广到 m 維的 R^m 的情形，但是从 m 維推广到无限維时却有本質上的困难。譬如在无限維的空間上，由于不存在象在 R^m 的場合下那样普通的 Lebesgue 測度，所以不可能定义象絕对連續那样的概念。若令 A 为任意的集合，那么 R^A 就是 A 中的元素 α 所对应的实数 ξ 排成的 $\prod\limits_{\alpha}\xi_\alpha$ 全体的集合。若 A 是有限集合，则 R^A 是有限維空間，但若 A 为无限集合，则 R^A 是无限維。使 $\prod\limits_{\alpha}\xi_\alpha\to\alpha_0$ 的坐标 ξ_{α_0} 的映象叫做射影(projection)，且以 p_{α_0} 来表示。由 $\prod\limits_{\alpha}\xi_\alpha\to R^A$ 中的点 $(\xi_{\alpha_1},\xi_{\alpha_2},$

$\cdots, \xi_{\alpha_n})$ (α_i 都不相同)的映象也叫做射影,以 $p_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 来表示。若令 $E^{(n)}$ 为 n 維的 Borel 集合,由形状如 $p^{-1}_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(E^{(n)})$ 所表示的 R^A 的子集就叫做 R^A 的 **Borel 柱集** (cylinder set)。若以 $\boldsymbol{B}^A$ 表示包含所有 Borel 柱集的最小 Borel 集合体,則 $\boldsymbol{B}^A$ 的元素就叫做 R^A 的 **Borel** 集合。令令 P 为 $R^A(\boldsymbol{B}^A)$ 上的分布。对于不相同的 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in A$, 定义 $R^n(\boldsymbol{B}^n)$ 上的分布 $P_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$,使得

$$P_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(E^{(n)}) = P(p^{-1}_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(E^{(n)})), \; E^{(n)} \in \boldsymbol{B}^n. \qquad (2.12)$$

这就是分布 $\boldsymbol{P}$ 的射影。考虑所有这类的 $P_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$,且令其全体为 $\mathfrak{P}$, 則 $\mathfrak{P}$ 满足下面所述的 Kolmogoroff 的**相容性条件** (consistency condition)。

(K.1) 若令 $i(1), i(2), \cdots, i(n)$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的排列,則

$$P_{\alpha_{i(1)}\alpha_{i(2)}\cdots\alpha_{i(n)}}(E_{i(1)} \times E_{i(2)} \times \cdots \times E_{i(n)}) = P_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n).$$

(K.2) $P_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}(E^{(n-1)} \times R^1) = P_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}(E^{(n-1)})$.

反之,对于满足这二个条件的分布系 $\mathfrak{P}$,存在唯一的一个 $R^A(\boldsymbol{B}^A)$ 上的分布 P, 使得满足 (2.12)。这就叫做 Kolmogoroff 定理❶。

现在,假設已对 A 的各个元素 α 定义了 $R^1(\boldsymbol{B}^1)$ 上的分布 P_α. 这时若定义

$$P_{\alpha_1\cdots\alpha_n} = P_{\alpha_1} \times P_{\alpha_2} \times \cdots \times P_{\alpha_n} \text{ (直积測度)}, \qquad (2.13)$$

則 $\mathfrak{P} = \{P_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\}$ 满足上述的 (K.1), (K.2)。因此,按照 Kolmogoroff 定理,可以由 $\mathfrak{P}$ 定出 $R^A(\boldsymbol{B}^A)$ 上的分布 P. 称它为 $P_\alpha, \alpha \in A_1$ 的**直积概率測度** (direct product probability measure), 且以 $\prod_{\alpha\in A} P_\alpha$ 来表示。显然 P 是由

$$P(p^{-1}_{\alpha_1}(E_1) \cap p^{-1}_{\alpha_2}(E_2) \cap \cdots \cap p^{-1}_{\alpha_n}(E_n)) = \prod_{i=1}^{n} P_{\alpha_i}(E_i) \quad (2.14)$$

所表达的 $R^A(\boldsymbol{B}^A)$ 上的分布。同理 P_α 分别为高維 (有限或者无

---

❶ 参見 A. H. Колмогоров 著: 概率論基本概念,丁寿田譯,商务, 1953.——校者注

限)的分布时(維数可以由 α 而变)也可以定义其直积概率测度。

§3 测度論观点下的概率論(2) 邏輯的构成

固定一个集合 Ω,这集合就叫做样本空間。在 Ω 上取一Borel集合体 $\boldsymbol{B}$, 及 $\Omega(\boldsymbol{B})$ 上的概率分布 P, 則 Ω, $\boldsymbol{B}$, P 有一个总的名称,叫做 Ω 上的**概率空間**(probability space), 并記以 $\Omega(\boldsymbol{B}, P)$.

因为 $\Omega(\boldsymbol{B}, P)$ 是一种测度空間, 所以在其上可以建立 Lebesgue 的积分理論。$\Omega(\boldsymbol{B}, P)$ 上的可测实函数叫做**随机变数**(random variable)。令 $x(\omega)$ 为随机变数,則称

$$\Phi(E)=P\{\omega/x(\omega)\in E\}\equiv P(x^{-1}(E)), E\in \boldsymbol{B}^1 \tag{3.1}$$

为 x 的**分布**(distribution)。这就是 $R^1(\boldsymbol{B}^1)$ 上的概率分布。称

$$E(x)=\int_\Omega x(\omega)P(d\omega) \tag{3.2}$$

为 $x(\omega)$ 的**数学期望或均值**(mean)。这可以利用 x 的分布写成下面的形式[1]

$$E(x)=\int_{R^1}\xi\Phi(d\xi). \tag{3.3}$$

因为可测函数不一定是可积的,所以随机变数的均值不一定存在。

将若干随机变数并列起来就可以定义随机矢量。令 A 为有限或者无限集合, 且对于 A 的各个元素 α 有一随机变数 $x_\alpha(\omega)$ 与之对应。此时,若定义

$$\boldsymbol{x}(\omega)=\prod_{\alpha\in A}x_\alpha(\omega), \tag{3.4}$$

則 $\boldsymbol{x}(\omega)$ 是定义于 Ω 上而在 R^A 中取值的函数。并且在

$$E^{(A)}\in \boldsymbol{B}^A \Rightarrow \boldsymbol{x}^{-1}(E^{(A)})\in \boldsymbol{B} \tag{3.5}$$

的意义下为可测(即使得在映照 x 之下, E^A 的原象必属于 $\boldsymbol{B}$)。

---

[1] 参見 Paul R. Halmos 著: 測度論, 王建华譯,科学出版社, 1958, §39, 定理3。——校者注

$\boldsymbol{x}(\omega)$ 就叫做随机矢量。若 A 的势为 m，则叫做 m 維随机矢量。特别是把二維随机矢量 $(x_1(\omega), x_2(\omega))$ 写成 $x_1(\omega)+ix_2(\omega)$，就得复随机变数。对于随机矢量来説，其分布也可以由(3.1)来定义，再对各个分量进行积分，就可以定义它的**均値矢量**。

令 φ 为由 R^A 到 R^B 内的映象，并且满足

$$E^{(B)}\in \boldsymbol{B}^B \Rightarrow \varphi^{-1}(E^{(B)})\in \boldsymbol{B}^A. \tag{3.6}$$

这时 φ 叫做 **Borel 可测** (Borel measurable) 或称 **$\boldsymbol{B}$-可測** (B-measurable)或者更簡单地叫做**可測**(measurable)。由随机矢量的可測映象所产生的象是可測的。也就是説，若把上述的可測映象 φ 作用于取値于 R^A 内的随机矢量 $\boldsymbol{x}(\omega)$ 上，就得到一个在 R^B 内取値的随机矢量 $\varphi(\boldsymbol{x}(\omega))$。这时 $\varphi(\boldsymbol{x}(\omega))$ 的均値矢量可由

$$E[\varphi(\boldsymbol{x}(\omega))]=\int_{R^A}\varphi(\xi)\Phi(d\xi),\ \Phi \text{ 是 } \boldsymbol{x}(\omega) \text{ 的分布} \tag{3.7}$$

給定。这样的 $\varphi(\boldsymbol{x}(\omega))$ 称为**关于 $\boldsymbol{x}(\omega)$ 是可測的**。

若有若干随机矢量 $\boldsymbol{x}_\alpha(\omega)$，$\alpha\in A$，也可以把它們排列起来定义更高維的随机矢量

$$\boldsymbol{x}(\omega)=\prod_{\alpha}\boldsymbol{x}_\alpha(\omega). \tag{3.8}$$

若 $\boldsymbol{x}(\omega)$ 的分布是 $\boldsymbol{x}_\alpha(\omega)$，$\alpha\in A$ 的分布的直积分布，则称 $\boldsymbol{x}_\alpha(\omega)$，$\alpha\in A$ **为独立**(independent)。这也可以由下述条件来表达：

对任意不相同的 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\in A$，则有

$$P\{\omega/\boldsymbol{x}_{\alpha_i}(\omega)\in E_i,\ i=1, 2, \cdots, n\}=\prod_{i=1}^{n}P\{\omega/x_{\alpha_i}(\omega)\in E_i\}. \tag{3.9}$$

設 $A=\sum_\lambda A_\lambda$ (直接和)，$\lambda\in\Lambda$，且令 $\boldsymbol{x}_\alpha(\omega)$，$\alpha\in A$，为独立，则

$$\boldsymbol{y}_\lambda(\omega)=\prod_{\alpha\in A_\lambda}x_\alpha(\omega),\ \lambda\in\Lambda \tag{3.10}$$

亦为独立。又若令 $\boldsymbol{x}_\alpha(\omega)$，$\alpha\in A$，为独立，且令 φ_α 为可測，则 $\varphi_\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha(\omega))$，$\alpha\in A$，也为独立。

若$x_1(\omega), x_2(\omega), \cdots, x_n(\omega)$是独立的复(或者实)随机变数，则

$$E[x_1(\omega)\cdots x_n(\omega)] = E[x_1(\omega)]E[x_2(\omega)]\cdots E[x_n(\omega)]. \tag{3.11}$$

这叫做均值的**可乘性**。

关于随机变数(或者矢量)的叙列$x_n(\omega)$，$n=1, 2, \cdots$收敛于$x(\omega)$的定义有各种各样的方法。一个最自然的方法是

$$P\{\omega/|x_n(\omega)-x(\omega)|\to 0\}=1, \tag{3.12}$$

此处$|\quad|$表示矢量的长度。因为$|x_n(\omega)-x(\omega)|$是ω的可测函数，并且

$$\{\omega/|x_n(\omega)-x(\omega)|\to 0\}=\bigcap_p\bigcup_N\bigcap_{n>N}\left\{\omega/|x_n(\omega)-x(\omega)|<\frac{1}{p}\right\},$$

所以(3.12)左边的$\{\omega/\prime\prime\}$是可测集合。而(3.12)卽意味着它的P-測度为1. 这种收斂叫做Ω上的**几乎处处**(almost everywhere)**收斂**，或概率为1的收斂，或**几乎必然的收斂**(almost sure convergence)，或**概收斂**，并記为$x_n\to x$(a. e.) ❶。

下面是較此为弱的一种收斂概念：对所有的$\varepsilon>0$，极限

$$P\{\omega/|x_n(\omega)-x(\omega)|>\varepsilon\}\to 0 \tag{3.13}$$

恒成立。这叫做依概率收斂(convergence in probability)，并記为$x_n\to x(P)$. 这时x_n的分布就以下一节中所解释的意义收斂于x的分布。又若当$E(|x_n-x|^p)$为有限时，由

$$E(|x_n-x|^p)\to 0 \tag{3.14}$$

所定义的收斂，叫做**p幂平均收斂**(mean convergence of the pth power)。当$p=2$时这一經常用到的情形，称它做**平均收斂**。这种收斂的条件較依概率收斂的条件为强。

§4 分布函数，特征函数，均值和方差

以$\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \cdots$表示$R^1(\boldsymbol{B}^1)$上的分布。称函数

$$F(\xi)=\Phi(-\infty, \xi] \tag{4.1}$$

❶ a. e. 是 almost everywhere 的簡写。