点集拓扑学原理

王戍堂
戴锦生
王尚志

陕西科学技术出版社

点集拓扑学原理

王成堂　戴锦生　王尚志

陕西科学技术出版社

点集拓扑学原理

王戍堂　戴锦生　王尚志

陕西科学技术出版社出版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行　小寨印刷厂印刷

开本850×1168　1/32　印张6.75　字数140,000

1985年8月第1版　1985年8月第1次印刷

印数1－6,000

统一书号：7202·89　定价：1.55元

序

点集拓扑学是拓扑学的一个分支，形成于本世纪初。由于分析理论的深入发展，人们产生了抽象和推广极限与连续性理论的要求，*Cantor* 创立的集合论为此提供了有力的工具，*M*. *Frechet*、*F*. *Hausdorff*、*F*. *Riesz* 等著名的数学家利用公理化的方法，分别从不同的角度建立了抽象空间的理论，从而形成了点集拓扑学。具有高度概括性的拓扑学是现代数学的基础之一，它的结果已经为许多数学分支所利用。掌握点集拓扑学的基本理论，对于从事数学各学科的研究是必不可少的；对于从事数学教学的教师来说，了解点集拓扑学的观点和方法也同样是十分重要的。

我国第一本专门论述点集拓扑学的著作是关肇直先生1956年编写的“拓扑空概论”，1978年初关先生来信希望我们协助他改写此书，或另外新编一本能适应现代数学发展的书。我们未能在关先生生前完成此嘱，对此我们深感内疚。我校杨永芳教授自40年代起就从事点集拓扑的研究与教学，他生前为出版一本适合我国实际情况的教材做了大量的工作，但终因过早谢世而未能如愿。十年动乱以后，我们重新开设了这个课程并编写了一个讲义。这本讲义在校内外先后使用过五期。听取了多方面的宝贵意见，我们曾做了两次较大的修改，成为现在这个样子。

这本书我们是把它做为大学必修课的教材来编写的，本着

少而精的原则进行了选材，希望它既包括点集拓扑学最基本的结果，又能适当反映现代点集拓扑学的发展，此外还考虑到适应我国目前的教学实际。例如，做为准备知识，我们较多地介绍了朴素集论的内容和方法；根据近年来点集拓扑学的发展，适当地选择了拓扑空间势函数的一些结果，等等。当然，点集拓扑学中还有许多重要课题，例如，仿紧性、紧化、一致空间、维度理论等在这本书中我们未能涉及，我们把它们放在另一本为选修课编写的教材中。我们遵循的第二个原则是：内容的叙述要自然，尽力使点集拓扑学的高度抽象的观点与方法变得直观易懂，例如在介绍拓扑空间定义之前，用了一节来介绍欧几里得空间，这不仅仅是因为欧几里得空间是拓扑空间概念的发源地，而更重要的是为读者在头脑中建立一个拓扑空间概念的直观模型，拓扑空间的许多概念都可从这个模型中找到产生它们的直观背景，很多著名的反例都是在欧几里得空间基础上改造而成的。另外，在书中我们选用了大量的例子和反例，我们感到搞清楚这些例子和反例不仅是加深理解抽象概念的重要途径之一，而且会使纯理论的学习变得生动活泼。

书中有部分结果的证明是留待读者完成的，每一章后面都附有数量不多的练习题，较困难的习题注有“*”号，这些习题经过一定努力都是可以完成的，读者务必动手做一下。

本书在编写过程中，承蒙江泽涵先生，关肇直先生的鼓励和关心，得到西北大学数学系以及许多同志的支持和帮助，谨此致谢。

书中，难免有许多不足之处，尚祈读者不吝指教。

1983.7

于西安

目　录

第一章　集论初步

第二章　拓扑空间

第三章　积空间、商空间

第四章　紧　性

第五章　度量空间、度量化

第一章　集论初步

集合论是近代数学的基础，它与一般拓扑学关系极为密切。在一般拓扑学创建阶段，集合论和拓扑学几乎是不加区分的。在一般拓扑学的整个发展中，始终保持了与集合论的密切联系。本章介绍朴素集合论的某些主要结果和思想方法，掌握这些知识和方法是学习一般拓扑学必不可少的，对近代数学其它分支的学习也大有裨益。

§1　集合的概念

“集合”二字在数学中作为一个最基本的数学概念，难以再用其它数学概念来定义，姑且就当作“总体”去理解。每当我们把一些事物作为一个总体来考虑时，这个总体就称作一个集合。数学中经常涉及各种各样的集合，例如：具有某种性质的数的集合；具有某种性质的图形的集合；满足一定条件的函数的集合；某些集合的集合；……。集合也简称集。组成集合的事物则叫作集合的元素，或叫元、点。当 x 是集 A 的元时，表示作 $x\in A$，否则表示作 $x \bar{\in} A$，对于给定的 A 与给定的 χ 来说，x 是否是 A 的元应该是确定的，即是说，或者有 $x\in A$，否则有 $x\in A$，二式之中必有且仅有一式成立。自然地，当集 A 与集 B 所含元素相同时，我们应该认为 A 与 B 是同一个集合，记作 $A=B$。随着集合所含元素是有限多个或非有限多个，我们分

别称作有限集或无限集。

给定一个集，就是给定它所含的元素。特殊情形下，我们可以采用罗列出它的全部元素的办法。例如10以内素数的集合可以表示作$\{2, 3, 5, 7\}$；代数方程$x^2-3x+2=0$的根的集合就是$\{1, 2\}$。但这种办法并非总是可行的。一般情况下，用$\{x: \varphi(x)\}$的形式来给定一个集合，其中φ是确定的条件（性质），$\varphi(x)$表示x满足条件φ，$\{x: \varphi(x)\}$就表示满足条件φ的所有事物组成的集合。例如10以内素数的集合就是$\{x: x$是素数并且$x<10\}$，代数方程$x^2-3x+2=0$根的集合就是$\{x: x^2-3x+2=0\}$。又如$\{n: n$是自然数$\}$就是自然数集合，$\{f: f$是以$[a, b]$为定义域的实值函数$\}$就是所有定义在闭区间$[a, b]$上的实值函数组成的集合。我们特别把不含任何元素的集合记作$\varnothing$，叫空集。

关于集合这个概念，我们此处所介绍的这种直观而朴素的解释，来自集合论的创始人、德国数学家 *G·Cantor*（1845—1918）。应该指明，这种解释本身已经隐含了逻辑上的弊病，通常叫作“悖论”。

下面介绍的是著名的罗素悖论（*Russell's Paradox*）：

设S表示不以自身为元素的集合的总体，即$S=\{x: x\overline{\in} x\}$，依照*Cantor*的说法，$S$是一个集。我们自然会提出一个问题：$S$这个集合是否属于$S$呢？结果我们将看到，无论答案是什么都免不了出现矛盾。首先，设$S\in S$，由于S不满足集合$S=\{x: x\overline{\in} x\}$的条件$\varphi$，推出$S\overline{\in} S$，与所设矛盾；其次，设$S\overline{\in} S$，于是$S$满足条件$\varphi$，推出$S\in S$，仍然与所设矛盾。

为了避免这种逻辑上的弊病，我们附加上一条规定：集合不得以自身为元素。

有了这条规定，一切集合的总体就不再是集合了。从而$\{x: x\in x\}$也不再是集合了。

罗素悖论的发现在历史上曾一度给集合论的发展带来过危机。二十世纪以来，公理集合论的建立克服了朴素集论的不足。但是对于我们的课程来说，目前所必需的只是朴素集论的初步知识和方法。

§2　子集、集的运算

定义1　如果集A的元素都是集B的元素，则称A是B的子集，记作$A\supset B$（或$A\subseteq B$），读“A包含于B”，$A\subset B$也可以表示为$B\supset A$（或$B\supseteq A$），读“B包含A”。

特别，当$A\subset B$同时$A\neq B$时，称A是B的真子集。

容易看出$A\subset B$同时$A\supset B$就等价于$A=B$。这一简单的事实今后在判定两个集合是否相等时会经常用到。此外，空集$\varnothing$应该是每一个集合的子集；每一个集合以自身为子集。

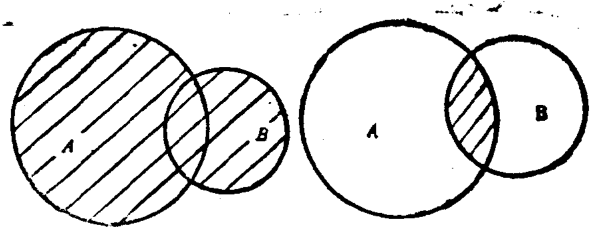
定义2　设A、B是两个集合，我们把由A中一切元素与B中一切元素组成的集合叫作A与B的并，记为$A\cup B$。即

$$A\cup B=\{x: x\in A\text{或}x\in B\}.$$

我们把A与B公有的元素组成的集合叫作A与B的交，记为$A\cap B$。即

$$A\cap B=\{x: x\in A\text{同时}x\in B\}.$$

两个集合的并与交可以用图来示意（图中有斜线部分各自表示$A\cup B$与$A\cap B$）。



显然，并与交这两种运算满足交换律、结合律以及分配律：

交换律　$A\cup B=B\cup A$

$A\cap B=B\cap A$

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

一般情形下，设有一族集合$\{A_i: i\in I\}$，其中I可以是有限集也可以是无限集。我们把集合

$$\cup\{A_i: i\in I\}=\{x: \exists i\in I,\ x\in A_i\}$$

叫作集族$\{A_i: i\in I\}$的并。

把集合

$$\cap\{A_i: i\in I\}=\{x: \forall i\in I,\ x\in Ai\}$$

叫作集族$\{A_i: i\in I\}$的交。

例如

$$A_n=\{x: x\text{是实数，并且}|x|<\frac{1}{n}\}$$

于是

$\cap\{A_n: n\in N\}=\{0\}$　其中N代表自然数集合。

$B_n=\{x: x\text{是实数，并且}0<x<\frac{1}{n}\}$

于是

$$\bigcap\{B_n : n\in N\}=\varnothing \quad 或写作 \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n=\varnothing.$$

若$\{n\}$是自然数n组成的单元素集合，于是

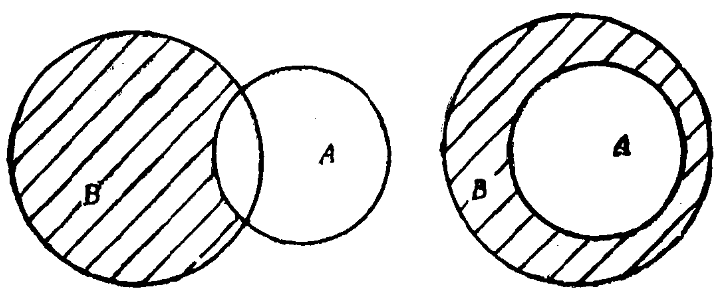
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{n\}=N.$$

定义3 设A、B是两个集合，我们把属于B而不属于A的元素组成的集合叫作B与A的差，记为$B-A$（或$B\setminus A$）即

$$B-A=\{x : x\in B同时\ x\notin A\}.$$

特别，当A是B的子集时，$B-A$叫做A（在B中）的余集。

差与余集可以图示如下



容易看出，$B-A=B-(A\cap B)$。此外，当A是X的子集时，A的余集是$X-A$，同时$X-A$的余集是A。

更重要的有如下运算法则：

De Morgan 公式

$$X-\bigcap_{i\in I}A_i=\bigcup_{i\in I}(X-A_i).$$

$$X-\bigcup_{i\in I}A_i=\bigcap_{i\in I}(X-A_i);$$

其中I可以是有限集也可以是无限集。这两个式子是我们

以后经常要用的。它们可以简述为交的差等于差的并；并的差等于差的交。现在仅以第二式为例，证明如下：

因为 $x\in X-\bigcup\limits_{i\in I}Ai\Longleftrightarrow x\in X$同时$x\in\overline{\bigcup\limits_{i\in I}Ai}$ 即$x\in X$同时$\overline{x}\in$每一个Ai，$i\in I$。

注意到$x\in X$同时$x\in A_i$就是$x\in X-A_i$的意思。因此$x\in X-\bigcup\limits_{i\in I}A_i\Longleftrightarrow x\in$每一个$(X-A_i)$，$i\in I$。即 $x\in\bigcap\limits_{i\in I}(X-A_i)$。第二式得证。

最后，我们讨论一下单调的集序列。集序列

$$M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_n,\ \cdots\cdots$$

叫递减的（严格递减的），是指对一切自然数n，恒有 $M_n\supset M_{n+1}$（$M_n\supsetneqq M_{n+1}$）成立；叫递增的（严格递增的），是指对一切自然数n，恒有$M_n\subset M_{n+1}$（$M_n\subsetneqq M_{n+1}$）成立。

对于递减的集序列$\{M_n: n=1,2\cdots\cdots\}$来说，若$\{Mn_i: i=1,2\cdots\cdots\}$是其任意一个无限子列，则有

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}M_{n_i}=\bigcap_{n=1}^{\infty}M_n$$

而对于递增的集序列来说，则有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}M_{n_i}=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n.$$

证明留给读者自行练习。

§3 势、可数势

在有限集的场合，以一一对应为基础，建立了“个数相等”的概念。*Cantor* 的功绩之一就在于他坚持了一一对应这

个原则,使“个数相等”的概念合理地推广到无限集的场合。为了真正了解这种推广的思想脉络,我们不妨先回到有限集的场合。设A与B是两个有限集,“比较A与B所含元素的多少”是什么意思呢?就是从一一对应的角度来看A与B的关系。当A与B可以一一对应时,就说A与B所含元素个数相等,否则就是不相等。在不相等的情况下,若A与B的某个真子集B'可以一一对应,就说A的元素少而B的元素多。形象地说,在有限集中部分少于整体。注意到偶数集$\{2, 4, 6, \cdots 2n, \cdots\}$虽然是自然数集$\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\cdots\}$的真子集,但二者之间却可以建立一一对应。显然“部分少于整体”对无限集来说是失效的。

定义 4 如果集合A与B之间存在一一对应,则称A与B对等。凡是对等的集合,我们称它们具有相同的势或说A与B的基数相同。集A的势记作$|A|$,于是A与B对等就表示为$|A|=|B|$。

空集的势用0来表示。即 $|\phi|=0$。

n(自然数)个元素组成的集合的势就用n来表示。

自然数集N的势用$\aleph_0$表示($\aleph$是希伯莱文第一个字母,读$Alef$)。凡是势为$\aleph_0$的集合都叫可数无限集。例如

自然数集$N=\{1, 2, \cdots, n, \cdots\cdots\}$

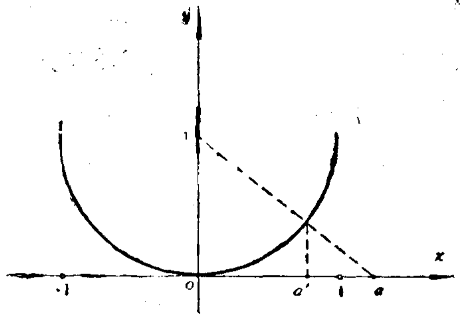
奇数集$\{1, 3, 5, \cdots, 2n-1, \cdots\cdots\}$

完全平方数集$\{1, 4, 9, \cdots, n^2, \cdots\cdots\}$

素数集$\{2, 3, 5, \cdots p_n, \cdots\cdots\}$

等,都是可数无限集。

实数集合$(-\infty, +\infty)$与它的一个真子集$(-1, +1)$是对等的,其一一对应可以图示如下:



其中 $(-\infty, +\infty)$ 中的点a对应$a'\in(-1, +1)$。

我们自然还可以取$f(x)=\frac{2}{\pi}arc\ tgx$，$x\in(-\infty, +\infty)$，或$g(x)=\frac{x}{1+|x|}$，$x\in(-\infty, +\infty)$等种种不同的一一对应。

我们以后把有限集与可数无限集统称作可数集。不久我们就会知道，实数集是非可数的。下面对可数集进行详细的讨论。

由于任何一个可数无限集合A与自然数集N是可以一一对应的，于是借助随意一个一一对应$f: N\longrightarrow A$，就可以把A中元素排成一个无限序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\cdots$$

所以今后谈到可数无限集时，我们不妨就直接给成序列$\{a_n: n=1, 2, \cdots\cdots\}$的形式。

定理1.1 可数集的子集是可数集。

证明 当可数集是有限集时，结论是显然的。以下我们仅就A是可数无限集

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\cdots \tag{1}$$

的情形证明A的子集或是有限集，否则就是可数无限集。

设$A'\subset A$，而且a_{n_1}是（1）中第一个属于A'的元素，a_{n_2}

是第二个属于A'的元素，等等。仅有两种可能：其一，有限个a_{n_k}之后（1）中不再有属于A'的元素，否则将存在由A'的元素组成的无限序列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots\cdots\cdots$$

此时A'是可数无限集。

〔证完〕

上述证明还可以不失一般性地仅就自然数集N的子集N'来证明。当N'有最大元时，N'是有限集，否则N'是N的无限子序列，从而是可数无限集。

定理1.2 可数个可数集的并是可数集。

证明 这里仅就A_1，A_2，…，A_n，……是可数无限多个互不相交的可数无限集合的情形，证明$A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$是可数无限集。无妨认为$A_n$各自已经排为序列形式

$$A_1=\{a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, \cdots\cdots\}$$

$$A_2=\{a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \cdots\cdots\}$$

……

$$A_m=\{a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}, \cdots\cdots\}$$

……

我们把a_{mn}的两个标号m、n之和$m+n$叫作a_{mn}的高。按下述方法对$A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$中的元素加以排列：高不相同时，高小者排在前；高相同时，第一个标号小者排在前（这种排列方法可以形象的叫作“对角线方法”）。即

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \cdots\cdots$$

于是A的全部元素排成了无限序列，所以A是可数无限集。

当诸A_n间有相同的元素时，可以先去掉重复出现的元素，

按照新的集合

$$A_1,\ A_2-A_1, A_3-(A_1\cup A_2),\ \cdots,\ A_n-(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i),\ \cdots\cdots$$

进行排列。此时新的集序列与原有的集序列

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots\cdots$$

有同一的并。

〔证完〕

定理1.3 每一个无限集M必包含一个可数无限子集A(可以要求A是真子集，甚至要求余集$M-A$仍是无限集）。

证明 因为M是无限集，所以M中至少有一个元素a_1，并且$M-\{a_1\}$仍是无限集，于是又有$a_2\in M-\{a_1\}$使得$M-\{a_1, a_2\}$是无限集，一般来说，若已取得M中的元素a_1，a_2，…，a_n，此时由于$M-\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$是无限集，所以又有$a_{n+1}\in M-\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，如此步骤可以一直继续下去，说明存在无限序列

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$$

其中a_n是M中的、彼此互不相同的元素。

若令

$$A=\{a_n: n\geqslant 2\}$$

显然A是M的可数无限子集，并且是真子集。

若令

$$A=\{a_{2n}: n\text{是自然数}\}$$

那么A不但是M的可数无限真子集，并且满足$M-A$是无限集的要求。

〔证完〕

定理1.4 设M是非可数集，A是M的可数子集，则M与$M-A$对等。