核函数和共形映照

施梯芬·柏格曼著

科學出版社

核函數和共形映照

施梯芬·柏格曼 著
龔昇 陳希孺 譯

科學出版社
1958

STEFAN BERGMAN

THE KERNEL FUNCTION AND
CONFORMAL MAPPING

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
NEW YORK
1950

內 容 簡 介

核函數是複變函數論中的一個重要方法．本書概要地介紹這方面的理論及其在各方面，特別是共形映照上的應用．此外，還附了二個短章，介紹如何將核函數的理論拓廣到一些橢圓型偏微分方程和多複變數函數論中去．

核函數和共形映照

施梯芬・柏格曼 著
龔 昇 陳希孺 譯

*

科 學 出 版 社 出 版（北京朝陽門大街117號）
北京市書刊出版業營業許可證出字第061號
科學出版社上海印刷廠印刷 新華書店總經售

*

1958年12月第 一 版　　書號：1552 字數：153,000
1958年12月第一次印刷　　開本：850×1168 1/32
(滬)0001—2,404　　印張：5 15/16

定價：(10) 1.00元

序

本書的目的是概括地引進一些方法和原理，它們在分析的一些分支，例如函數論、偏微分方程、微分幾何等等方面有着廣泛的應用．主要的觀點是討論函數的綫性族，在族中可以引進範數，而且直交的概念是定義了的．由於在範數選擇上有很大的自由度，所以在每種個別的情形中存在着一些自然的範數，這些是由幾何或物理的性質來區分的．

藉助於屬於一個特定族的一組完整就範直交函數系$\{\varphi_\nu(P)\}$，我們定義了在族中的核函數 $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(P)\overline{\varphi_\nu(Q)}$．複直交函數形式上的運算技巧是很像衆所周知的富里埃級數的理論，核函數是一個新概念，它所具有的基本性質在實直交函數的經典理論中是沒有對應的性質的．

複直交函數的方法可以同樣良好地應用到很多分析領域中，例如多複變數函數論；滿足橢圓型偏微分方程的函數的理論和微分幾何．我們特別着重的，是在共形映照理論上的應用．將要證明，在多連通區域的情形，核函數是密切地聯系着古典區域函數，例如格林(Green)函數和奈依曼(Neumann)函數，調和度量以及映到典型區域上的映照函數．一旦知道了區域的核函數，就有可能去解決場論的邊界值問題和古典共形映照問題了．

由於核函數可以用一組完整就範直交系來表達，這就可能用數值來解任意已給區域的邊界值問題和映照問題．在物理的很多領域中，特別在流體力學、彈性力學和電學中這是重要的．一個完整就範直交系的實際計算是一個比較化費時間的步驟；但是藉助於近代的計算技術，這個過程已進入實用範圍之內[1]．

關於橢圓型偏微分方程和關於二個複變數函數的兩個短章已

1) 進行這些步驟的第一步是求得一組方便的詳細的公式，以後翻譯成計算機的語言．例如，參閱 Bergman [29]．

放在這本書中，這是為了給讀者有一個一般的概念——怎樣把直交函數方法應用到其它領域上去，讀者如對這些問題有意了解得更為詳細，可以參閱參考文獻中所列的論文.

格拉勃定 (P. R. Garabedian) 和南哈利 (Zeev Nehari) 教授在準備這本書時給我的幫助，謹表感謝，他們很多有益的建議使得很多證明得到簡化而陳述更為簡潔．此外我向雪弗 (M. Schiffer) 教授表示感謝，我與他討論過書中的大部分；同時他對這個理論的貢獻組成了現在材料中的一個很豐富的部分．最後我感謝彭基 (H. Behnke) 教授，吉拉 (L. Geller) 先生，漢斯 (M. Heins) 教授，路登 (H. Royden) 先生，薩利 (L. Saris) 博士和史畢靈格 (G. Springer) 博士；他們讀了我最後的手稿之後提出了適當的批評和有益的忠告．

目　　錄

序 ………………………………………………………… iii

I. 直交函數 ………………………………………… 1

1. 緒言，記號，定義 ……………………………… 1
2. 李滋-費葉定理 ………………………………… 5
3. 就範直交函數系的核 ………………………… 9
4. 閉系 ………………………………………………… 11
5. 雙直交函數 ……………………………………… 15
6. 一個解析延拓方法 …………………………… 19

II. 核函數及相關的極小問題 ………………… 22

1. 核函數 …………………………………………… 22
2. 一般極小問題 …………………………………… 25

III. 不變度量及最小積分法 ………………… 32

1. 引言 ………………………………………………… 32
2. 不變度量 ………………………………………… 33
3. 單連通域 ………………………………………… 34
4. 一般討論 ………………………………………… 36

IV. 核函數及希爾伯脫空間 ………………… 42

V. 典型區域函數的表示 ……………………… 46

1. 狄里希萊積分和典型函數 …………………… 46
2. 直交調和函數 …………………………………… 50
3. 格林函數與奈依曼函數的表示 …………… 53
4. 有關核函數的進一步的等式 ……………… 61

VI. 標準共形變換 ……………………………… 65

1. 引言 ………………………………………………… 65
2. 代表區域 ………………………………………… 65
3. 區域 S_4 的一個極值性質 ……………………… 72
4. 用核函數表示標準映照函數的表達式 …… 76

VII. 邊界上的直交化 ………………………… 84

1. 定義和初等性質 ……………………………………………………84
2. 一個輔助的極值問題 ………………………………………………87
3. 函數 $\hat{K}(z, \bar{\zeta})$ 的同一性 ……………………………………………91
4. 與有界函數論的聯系 ………………………………………………94
VIII. 變分法 ……………………………………………………………98
1. 哈達瑪變分法 ………………………………………………………98
2. 區域函數的單調性質 ……………………………………………103
3. 雪弗變分法 …………………………………………………………106
IX. 存在性的證明 ……………………………………………………115
X. 偏微分方程 ………………………………………………………121
1. 引言 …………………………………………………………………121
2. 格林函數和奈依曼函數的直交展開式 …………………………128
3. 具有不定係數的微分方程 ………………………………………132
4. 彈性方程 ……………………………………………………………137
XI. 二元複變函數與偽共形映照 ……………………………………143
1. 基本理論 ……………………………………………………………143
2. 二複變數的直交函數 ……………………………………………146
3. 不變度量 ……………………………………………………………149
4. 比較域 ………………………………………………………………151
5. 有固定罩的域 ………………………………………………………153
6. 特徵流形和拓廣函數族 …………………………………………156
參考書籍 ………………………………………………………………164
參考文獻 ………………………………………………………………166
索引 ……………………………………………………………………176

I. 直交函數

1. 緒言,記號,定義

本章目的在使讀者認識複變直交函數理論的基本技巧．其中有許多處理形式係仿照實變直交函數的經典理論,在現在情況下,不會遇及如在富里埃級數理論中所發生的困難；而且所得最後結果亦頗爲相異．

設有定義於 B 域的單值解析函數 $f(z)$．假定 B 是有界的,因此僅有有限的面積；用 $d\omega=dx\,dy$ 表示 B 的面積元素及 $\bar{z}$ 表示 z 的共軛複數．所有積分都在勒貝格意義下考慮．如果不顯示積分域時,乃指積分在 B 域上全面進行． $\mathfrak{L}^2=\mathfrak{L}^2(B)$ 表示在 B 中的正則且單值的函數 $f(z)$，並且適合

$$\iint_B |f(z)|^2\, d\omega<\infty \tag{1}$$

的函數類．在本章內我們所討論的函數都在 $\mathfrak{L}^2$ 內．

二函數 f 及 g 的數積定義如下式

$$J_B(f,\ \bar{g})=\iint_B f\bar{g}\, d\omega, \tag{2}$$

一函數對自身的數積可簡寫成

$$J_B(f)=J_B(f,\bar{f}). \tag{3}$$

$J_B(f)$ 恆爲非負實數,並且僅當 $f=0$ 時爲零．有時 J_B 可直接寫成 J.

我們將常用的雪瓦茲(Schwarz)不等式表出如下:

$$|J(f,\ \bar{g})|^2\leqslant J(f)\cdot J(g). \tag{4}$$

右端積分之存在保證了左端積分的存在．

稱函數組 $f_\nu,\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 爲綫性無關，若無綫性組合

$$F(z)=\alpha_1 f_1(z)+\alpha_2 f_2(z)+\cdots+\alpha_n f_n(z)$$

恆等於零；除非 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$. 成綫性無關的充要條件是[1]

$$\begin{vmatrix} J(f_1,\bar{f}_1)\cdots J(f_1,\bar{f}_n) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ J(f_n,\bar{f}_1)\cdots J(f_n,\bar{f}_n) \end{vmatrix}>0. \tag{5}$$

實際上，對於 $\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu|^2>0$, (5) 式顯然即相當於條件 $J_B(F)>0$.

函數系 $\{\phi_\nu(z)\}$, $\nu=1, 2, \cdots$, $\phi_\nu\in\mathfrak{L}^2$, 稱爲直交的；若

$$J(\phi_\nu, \bar{\phi}_\mu)=0, \qquad \nu\neq\mu, \tag{6}$$

$$J(\phi_\nu)>0. \tag{7}$$

稱爲就範的；若

$$J(\phi_\nu)=1. \tag{8}$$

稱爲就範直交的；若既直交且就範的，即 $J(\phi_\nu, \phi_\mu)=\delta_{\nu\mu}$, 此處 $\delta_{\nu\mu}$ 乃是克朗尼克(Kronecker)記號.

例 若 B 爲圓域 $|z|<r$, 可作一就範直交函數系爲

$$\phi_n(z)=\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{z^{n-1}}{r^n}. \tag{9}$$

若 B 爲環域 $0<r<|z|<1$, 可作就範直交函數系爲

$$\begin{aligned} \phi_{2n-1}&=z^{n-1}\left(\frac{n}{\pi(1-r^{2n})}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad n=1, 2, \cdots, \\ \phi_2&=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{-2\pi\log r}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \phi_{2n}&=\frac{1}{z^n}\left(\frac{1-n}{\pi(1-r^{-2(n-1)})}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad n=2, 3, \cdots. \end{aligned} \tag{10}$$

複的就範直交函數有許多性質相同於實富里埃級數. 其中最顯著的性質如下：

若 $f(z)\in\mathfrak{L}^2$, 則數

$$a_\nu=J(f, \bar{\phi}_\nu) \tag{11}$$

稱爲 f 的富里埃係數. 當 n 固定時，綫性組合

$$\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\phi_\nu(z) \tag{12}$$

---

1) [13, 223 頁]括號內所列的參考書是列在本書參考文獻之前.

只在 $c_\nu=a_\nu$ 時,給出 $f(z)$ 對平均平方誤差的最佳近似值．換句話說,積分

$$J\left(f-\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\phi_\nu\right) \tag{A}$$

當 $c_\nu=a_\nu(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$時取得極小值．因爲

$$J\left(f-\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\phi_\nu\right)=\iint_B\left|f-\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\phi_\nu\right|^2 d\omega=$$

$$=J(f)-\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu J(\bar{f},\phi_\nu)-\sum_{\nu=1}^{n} \bar{c}_\nu J(f,\bar{\phi}_\nu)+\sum_{\nu=1}^{n}|c_\nu|^2=$$

$$=J(f)-\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|^2+\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|^2-\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\bar{a}_\nu-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{n}\bar{c}_\nu a_\nu+\sum_{\nu=1}^{n}|c_\nu|^2=$$

$$=J(f)-\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|^2+\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu-c_\nu|^2.$$

上式的極小值顯然當 $a_\nu=c_\nu$ 時得到．且等於

$$J(f)-\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|^2, \tag{13}$$

因此

$$\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|^2\leqslant J(f). \tag{13a}$$

因爲 (13a) 對於一切 n 都成立，所以有貝塞爾不等式（Bessel inequality)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|^2\leqslant J(f). \tag{14}$$

若 $\mathfrak{L}^2$ 內每一函數能以(12)式之綫性組合形式在平均平方誤差(A)可爲任意小的意義下接近,則系 $\{\phi_\nu\}$ 稱爲閉的．此時當 $n\to\infty$ 則(13)的極小值趨近於零,且貝塞爾不等式變成巴塞佛爾公式(Parseval formula)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|^2=J(f). \tag{15}$$

另一方面，若對每一個 $f\in\mathfrak{L}^2$ 使(15)成立．則系 $\{\phi_\nu\}$ 是閉的．

諸綫性無關的函數所組成的序列 $\{\psi_\nu(z)\}$ 可使之直交化．我們能找出由 ψ_μ 綫性組合成的函數 $\phi_\nu(z)$，它們組成一就範直交系．這可以用格蘭姆-施密特(Gram-Schmidt)法來做[1]，而且導出就範直交函數

$$\phi_1(z)=\frac{\psi_1(z)}{(J(\psi_1,\overline{\psi}_1))^{\frac{1}{2}}},$$

$$\phi_n(z)=\frac{\begin{vmatrix} J(\psi_1,\overline{\psi}_1)\cdots J(\psi_1,\overline{\psi}_{n-1}) & \psi_1(z)\\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots\\ J(\psi_n,\overline{\psi}_1)\cdots J(\psi_n,\overline{\psi}_{n-1}) & \psi_n(z)\end{vmatrix}}{\left[\begin{vmatrix} J(\psi_1,\overline{\psi}_1) & \cdots & J(\psi_1,\overline{\psi}_{n-1})\\ \vdots & & \vdots\\ J(\psi_{n-1},\overline{\psi}_1) & \cdots & J(\psi_{n-1},\overline{\psi}_{n-1})\end{vmatrix}\begin{vmatrix} J(\psi_1,\overline{\psi}_1) & \cdots & J(\psi_1,\overline{\psi}_n)\\ \vdots & & \vdots\\ J(\psi_n,\overline{\psi}_1) & \cdots & J(\psi_n,\overline{\psi}_n)\end{vmatrix}\right]^{\frac{1}{2}}}, \tag{16}$$

$$n>1.$$

若 ψ_n 是 z 的冪函數，即若 $\psi_\mu(z)=z^{\mu-1}$，$\mu=1, 2, \cdots$，則格蘭姆-施密特方法引出了直交多項式．

在特殊域中，上式行列式裏出現的二重積分可完整地計算出來．例如以 $\psi_\mu=z^{\mu-1}$ 的多角域．若 N 角域 B 由 B 內任一點 O 向多角形頂點聯綫而分裂成諸三角形[2] $B_kOA_k(k=1, 2, \cdots, N)$，

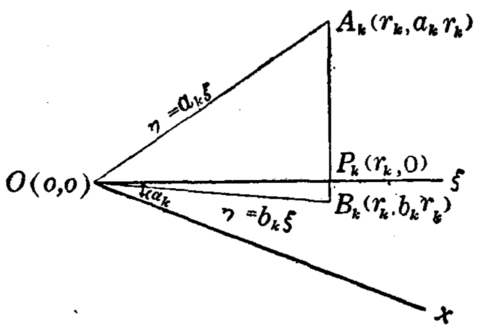

圖 1

1) 參閱[4, 卷 I, 41 頁]; [14, 251 頁]; [18, 57 頁].

2) 注意，B 的每一頂點是雙名的：每一 A_k 亦即爲一 B_{k+1}.

則

$$J(z^{p-1},\ \bar{z}^{q-1})=\iint_B z^{p-1}\bar{z}^{q-1}\,dx\,dy=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{p+q-2} i^j e^{i\alpha_k(p-q)} C_j^{(p-1,q-1)} \frac{n_k^{p+q}(a_k^{j+1}-b_k^{j+1})}{(p+q)(j+1)}\ (p,q=1,2,\cdots),$$

其中

$$C_j^{(m,n)}=\sum_{\nu=\max(0,j-n)}^{\min(m,j)}\binom{m}{j}\binom{n}{j-\nu}\left(-1\right)^{j-\nu},$$

r_k 是由 O 點向 A_kB_k 邊所作垂直綫 OP_k 的長度；α_k 是 OP_k 及正向 x 軸間的交角；a_k 及 b_k 各爲方向角 P_kOA_k 及 P_kOB_k 的正切值.

上式內 J 是由於在每一三角形內引入新坐標 ξ,η 而導得，而 $\zeta=\xi+i\eta=ze^{i\alpha_k}$，此處正 ξ 軸係取自 A_kB_k 邊的外向法綫 OP_k. 在此新坐標下在三角形 B_kOA_k 域上的積分變換成

$$\int_{\xi=0}^{r_k}\int_{\eta=b_k\xi}^{a_k\xi}(\xi+i\eta)^{p-1}(\xi-i\eta)^{q-1}e^{i\alpha_k(p-q)}\,d\eta\,d\xi.$$

2. 李滋-費葉定理

在本節內我們要證明一類似於富里埃級數理論中的李滋-費葉(Riesz-Fischer)定理的結果. 爲了證明時主要方向清楚起見我們先證明二個引理. 第一個引理如下：

若 $f(z)$ 是 $\mathfrak{L}^2(B)$ 內一函數且 $f(t)=1$，其中 $t\in B$. 於是我們有

$$J(f)\geqslant\pi r^2, \tag{17}$$

此處 r 是點 t 到 B 的邊界的最小距離.

在圓 $|z-t|<r-\varepsilon=R$ 中，$f(z)$ 可展開爲匀斂的戴勞級數

$$f(z)=1+a_1(z-t)+a_2(z-t)^2+\cdots.$$

令 $\zeta=\rho e^{i\psi}=z-t$. 我們有

$$J(f)=\iint_B|f|^2\,d\omega>\iint_{|\zeta|<R}|f|^2\,d\omega,$$

$$\iint_{|\zeta|<R}|f|^2d\omega=\iint_{|\zeta|<R}(1+a_1\zeta+a_2\zeta^2+\cdots)(1+\bar{a}_1\bar{\zeta}+\bar{a}_2\bar{\zeta}^2+\cdots)\,d\omega=$$

$$=\iint_{|z|<R}d\omega+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{a_n\int_0^R d\rho\int_0^{2\pi}\rho^{n+1}e^{in\psi}\,d\psi+$$

$$+\bar{a}_n\int_0^R d\rho\int_0^{2\pi}\rho^{n+1}e^{-in\psi}\,d\psi\Big\}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_m\bar{a}_n\int_0^R d\rho\int_0^{2\pi}\rho^{n+m+1}e^{i(m-n)\phi}\,d\psi=$$

$$=\pi R^2+2\pi\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{R^{2(n+1)}}{2(n+1)}\geqslant\pi R^2.$$

因此

$$J(f)\geqslant\pi(r-\varepsilon)^2.$$

因爲 ε 可任意小,故得所要求的結果.

藉助於(17)式,可證第二個引理:

設 $\{\phi_\nu(z)\}$, $\nu=1, 2, \cdots$, 是對於 B 的一個就範直交系,則有

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\phi_\nu(t)|^2\leqslant\frac{1}{\pi r^2},\tag{18}$$

此處 r 是從點 t 到域 B 的界的極小距離.

決定函數 $f(z)$ 它可以記成形式

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu\phi_\nu(z),\tag{19}$$

且於條件

$$f(t)=1\tag{20}$$

之下使積分 $J(f)$ 極小.

我們寫

$$A_\nu=\frac{\overline{\phi_\nu(t)}}{\sum\limits_{\nu=1}^{n}|\phi_\nu(t)|^2}+\alpha_\nu,$$

此處 α_ν 爲新的未知數,顯而易見(20)相當於

$$\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\phi_\nu(t)=0.$$

若用此式,容易算出

$$J(f)=\frac{1}{\sum\limits_{\nu=1}^{n}|\phi_\nu(t)|^2}+\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu|^2.$$

因此當 $A_\nu=\overline{\phi_\nu(t)}\Big/\sum\limits_{\nu=1}^{n}|\phi_\nu(t)|^2$ 時 $J(f)$ 達到最小值,並且等於

$$\frac{1}{\sum_{\nu=1}^{n}|\phi_\nu(t)|^2}.$$

由(17)此極小值不小於 πr^2，而 $r=r(t)$ 是 t 到邊界上最近點的距離．因此

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\phi_\nu(t)|^2\leqslant\frac{1}{\pi r^2}.$$

而且，不等式的右端與 n 無關，故 $\Sigma_{\nu=1}^{\infty}|\phi_\nu(t)|^2\leqslant\frac{1}{\pi r^2}$.

現在我們可以得到這一節主要結果的證明．

設 $\{\phi_\nu(z)\}$ 是 B 域的一個就範直交系．若數列 $\{a_\nu\}$ 適合條件

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|^2<\infty, \tag{21}$$

則級數

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\phi_\nu(z) \tag{22}$$

在 B 的每一閉的子域內均勻且絕對收斂，並且表示了在 $\mathfrak{L}^2$ 類內的一個具有富里埃係數 a_ν

$$a_\nu=J(f,\bar{\Phi}_\nu) \tag{23}$$

的函數．若 $\{\phi_\nu(z)\}$ 是一閉系，每一函數 $f\in\mathfrak{L}^2$ 可記成(22)形式，而級數的係數表成(23)式，且此級數在 B 的每一閉子域內均勻且絕對收斂．

證．首先證級數(22)在 B 的每一閉子域 B' 內均勻且絕對收斂．子域 B' 內的點以 r 爲到 B 的邊界的正的最小距離．今欲證

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=n}^{n+m}|a_\nu\phi_\nu(z)|=0, \tag{24}$$

對 m 及對 B' 的 z 一致成立．由雪瓦茲不等式，我們有

$$\sum_{\nu=n}^{n+m}|a_\nu||\phi_\nu(z)|\leqslant\left[\left(\sum_{\nu=n}^{n+m}|a_\nu|^2\right)\left(\sum_{\nu=n}^{n+m}|\phi_\nu(z)|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{\pi r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}|a_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

用(21)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=n}^{n+m}|a_\nu|^2=0,$$

從而(24)得證． 由維爾斯脫拉斯（Weierstrass）定理知，$f(z)$爲B'內的正則解析函數，並且因爲B'是B的一個任意的閉子域，所以$f(z)$也爲在B中的正則解析函數．

現在我們來證明$f(z)$屬於$\mathfrak{L}^2(B)$．令

$$f_n(z)=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\phi_\nu(z).$$

在B的每一閉子域B'中，敍列$\{f_n(z)\}$均勻且絕對的收斂於$f(z)$．因此

$$J_{B'}(f)=\lim_{n\to\infty}J_{B'}(f_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}J_B(f_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|^2,$$

而且令B'趨向B時

$$J_B(f)\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|^2,$$

即$f(z)\in\mathfrak{L}^2$．

此外，當$n\geqslant\mu$時，我們有

$$|J(f,\bar{\phi}_\mu)-a_\mu|=\left|J\left(f-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\phi_\nu,\ \bar{\phi}_\mu\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left[J\left(f-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\phi_\nu\right)J(\phi_\mu)\right]^{\frac{1}{2}}=\left[J\left(f-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\phi_\nu\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

若$\overline{B}'\subset B$

$$J_{B'}\left(f-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\phi_\nu\right)=\lim_{m\to\infty}J_{B'}\left(\sum_{\nu=1}^{m}a_\nu\phi_\nu-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\phi_\nu\right)\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{m\to\infty}J_B\left(\sum_{\nu=1}^{m}a_\nu\phi_\nu-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\phi_\nu\right)=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}|a_\nu|^2.$$

令B'趨向B，得到

$$|J(f,\bar{\phi}_\mu)-a_\mu|\leqslant\left\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}|a_\nu|^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

由於n僅限於滿足不等式$n\geqslant\mu$，而取n變成無限大，我們因此得

到

$$J(f,\,\bar{\phi}_\mu)=a_\mu.$$

現在討論一個已給的函數 $f\in\mathfrak{L}^2(B)$，且設 $\{\phi_\nu(z)\}$ 是一個閉系. 則由(15),當有

$$J_B(f)=\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|^2,\qquad a_\nu=J_B(f,\,\bar{\phi}_\nu).\tag{25}$$

由前所證，級數 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\phi_\nu(z)$在 B 內的每一子域 B' 內均勻且絕對收斂,故表示一個解析函數. 留下來要證明的是這個函數恆等於 f. 爲了達到這個目的只要證明

$$\lim_{n\to\infty}J_B\Bigl(f-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\phi_\nu(z)\Bigr)=0$$

就足够了. 亦即,級數(22)向函數 f 平均收斂. 但是此乃閉系定義及富里埃係數極小性質的必然後果. 故定理證畢.

3. 就範直交函數系的核

算式

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\phi_\nu(z)\,\overline{\phi_\nu(t)}\tag{26}$$

稱爲就範直交系 $\{\phi_\nu\}$ 的核. 對實變數的就範直交函數言,(26)式所示的級數往往發散[1]，但在我們所論情況下,且能容易地證明它恆收斂.

在任一閉子域 $B'\subset B$，由級數(26)所定義的就範直交函數系 $\{\phi_\nu\}$的核,當 t 固定時對於 z 是絕對且均勻收斂;又 z 固定時對於 t 是絕對且均勻收斂. 此核是 z 及 $\bar{t}$ 的解析函數.

令 $z,\,t\in B'$，並且令 t 固定. 則

$$\sum_{\nu=n}^{n+m}|\phi_\nu(z)\,\overline{\phi_\nu(t)}|\leqslant\Bigl[\sum_{\nu=n}^{n+m}|\phi_\nu(z)|^2\Bigr]^{\frac{1}{2}}\Bigl[\sum_{\nu=n}^{n+m}|\phi_\nu(t)|^2\Bigr]^{\frac{1}{2}}<$$

$$<\Bigl[\sum_{\nu=1}^{\infty}|\phi_\nu(z)|^2\Bigr]^{\frac{1}{2}}\Bigl[\sum_{\nu=n}^{\infty}|\phi_\nu(t)|^2\Bigr]^{\frac{1}{2}}.\tag{27}$$

1) 例如，$\sin nz$, $\cos nz$.

B' 域與 B 域間有一最小距離 r, 因此由引理 1.2

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\phi_\nu(z)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi r^2},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\phi_\nu(t)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi r^2}.$$

因爲 t 固定，故得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=n}^{\infty}|\phi_\nu(t)|^2=0.$$

因此，用(27)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=n}^{n+m}|\phi_\nu(z)\overline{\phi_\nu(t)}|=0,$$

對 B' 中的 z 而言，是一致地成立． 此指出(26)在 B' 上一切點均絕對收斂，且當 t 固定時對 z 匀斂．由於對稱性，(26)當 z 固定時則對 t 匀斂． 因此由維爾斯脫拉斯定理，其和爲 z 及 $\bar{t}$ 的解析函數．上述結果已證畢．

例 (9)式的系中，我們有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(z)\overline{\phi_n(t)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\pi}\,\frac{z^{n-1}\bar{t}^{n-1}}{r^{2n}}=\frac{r^2}{\pi(r^2-z\bar{t})^2}. \tag{28}$$

(10)式系中，我們有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(z)\overline{\phi_n(t)}=-\frac{1}{2\pi z\bar{t}\log r}+\frac{1}{\pi z\bar{t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{nz^n\bar{t}^n}{1-r^{2n}}, \tag{29}$$

Σ' 內略去 $n=0$.

藉助於橢圓函數，(29)可以寫成更清楚的形式． 維爾斯脫拉斯 $\wp$ 函數可展開爲

$$\wp(u)=-\frac{\eta_1}{\omega_1}+\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi u}{2\omega_1}\right)}-2\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\cos\frac{n\pi u}{\omega_1},$$

此處 ω_1 及 ω_2 爲周期，$q=\exp\{i\pi\omega_2/\omega_1\}$ 且 $2\eta_1$ 爲維爾斯脫拉斯 ζ 函數對於周期 ω_1 言的增量．特別取 $\omega_1=\pi i$, $\omega_2=\log r$, 經過適當處理後獲得

$$\wp\{\log z\}=-\frac{\eta_1}{\pi i}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{nz^n}{1-r^{2n}},$$