

# 应用最优控制

## ——最优化·估计·控制

[美] A. E. 布赖森 何毓琦 著

钱洁文 张在良 严周南 译

薛沛丰 汤德新

张良起 校

国防工业出版社 出版

# 应用最优控制

——最优化·估计·控制

〔美〕 A.E.布赖森 何毓琦 著

钱洁文 张在良 严周南 译

薛沛丰 汤德新

张 良 起 校

国防工业出版社

## 内 容 简 介

本书是一本以应用最优控制理论为主题的专著，原书于1969年出版，1975年又再版发行。中译本根据1975年版译出。

本书包括以下基本内容：参量最优化问题；动态系统的最优化问题；具有轨线约束的动态系统最优化问题；最优反馈控制；具有二次判据的线性系统；线性反馈；邻近的极值线与二阶变分；最优规划与控制问题的数值解；最优化与控制问题的奇异解；微分对策；关于概率的某些概念；随机过程引论；最优滤波和预测；最优平滑和内插；存在不确定性时的最优反馈控制。

本书可作为大学自动控制专业研究生教材，亦可供有关专业科技人员和高校师生参考。

### Applied Optimal Control OPTIMIZATION, ESTIMATION, AND CONTROL

Arthur E. Bryson, Jr. Yu-Chi Ho  
JOHN WILEY & SONS 1975

\*

### 应用最优控制——最优化·估计·控制

〔美〕 A. E. 布赖森 何毓琦 著

钱洁文 张在良 严周南 薛沛丰 汤德新 译  
张 良 起 校

\*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售  
国防工业出版社印刷厂印装

\*

850×1168<sup>1</sup>/<sub>32</sub> 印张16<sup>0</sup>/<sub>16</sub> 419千字

1982年2月第一版 1982年2月第一次印刷 印数：0,001—6,400册

统一书号：15034·2186 定价：2.05元

## 译 序

控制理论中的优化技术（或称最优控制）是从大约六十年代起迅速发展起来的一个领域。它已经在一些复杂的控制系统，特别是在航空、空间飞行器控制系统的设计中得到了卓有成效的应用。目前大学控制工程的理论课程中已经开始适当加入这方面的内容，而对研究生则几乎已成为必修的课程。

本书以“应用最优控制”作为书名。这是因为它的目的是向从事控制系统设计的工程技术人员介绍应用这方面的理论解决实际问题的知识和方法，而不是以介绍最优控制的教学理论为目的的。尽管如此，本书对于和实际应用有关的条件、限制等细节仍然给予了充分的注意。而且，在阐述方面一般都采用了启发性的、直观的和以物理概念为基础的方式，并且设有专门的章节来介绍常用的计算方法。

本书的章节安排也从便于应用出发，允许根据不同的需要选读有关章节，又不一定通读全书。对此，本书作者在目录末尾还提供了章节之间阐述的逻辑关系，供读者参考。本书还结合有关内容提供了一定数量的例题和习题，有助于读者加深对理论的理解。

本书阐述简明扼要，接近于讲稿形式。学习时有时也许需要参考一些补充资料。最后有两个附录，简单介绍所需的基本数学工具和线性系统理论，阅读本书的读者应对这些内容已有所准备，例如学过以状态分析为基础的线性系统理论那样的课程。

本书可用作大学研究生教材，也可供大学高年级学生及有关工程技术人员参考。

全书共十四章，分成两大部分。前九章论述确定性控制系统，

36417

由钱洁文、严周南、汤德新同志翻译；后五章论述随机控制系统，连同两个附录，由张在良、薛沛丰同志翻译，最后由张良起同志审校并整理。

译校者对书中大部分公式作了推导，所发现的一些错误已用译注形式加以说明，而对明显的印刷错误所作的修改，则未一一加注。

由于我们水平有限，对书中的错误和不当之处，请读者批评指正。

## 《应用最优控制》中译本

### 前 言

美国斯坦福大学教授小 A. E. 布赖森和我本人，对于我们的共同著作自 1969 年初版问世以来所受到的热烈欢迎感到十分欣慰。通过这本书，我们在世界各地结交了许多朋友。当我们知道我们的菲薄努力增进了对科学的了解和国际友谊时，我们总是感到十分高兴。

就我本人而言，将这本著作译成我的祖国语言，更是一个倍受鼓舞的事件。这既是一次“重返家园”，又是一次对我父母之邦的“自我介绍”。我期待着在未来与更多的新朋友合作。

美国哈佛大学 何毓琦

1981 年 7 月于北京

# 前 言

本书适用于大学本科毕业班及研究生水平关于动态系统的分析和设计的课程，并可供工程师和应用数学家自学之用。我们假定本书读者已具有力学和常微分方程的基本知识。最好对矩阵代数和线性系统有一些了解，但是所要求的这些知识也可以通过学习两个附录获得。本书是由1963年为哈佛大学暑期班课程开设的关于动态系统最优化问题的一系列讲稿演变而成的。这些讲稿经过改写和扩充，于1963~1968年在哈佛大学，并于1966年在麻省理工学院的研究生课程中使用。

本书论述的是复杂动态系统的分析和设计，特别注重于确定“最好”的方式去制导以及（或者）控制这些系统。在过去二十五年里，关于线性时不变动态系统的反馈控制系统这一科目已积累了大量的知识。这些知识在我们的技术中起了重要的作用，这是几乎每一所工科院校都认识到的，因而它们都在讲授这一范围中的课程。然而，许多动态系统（如航空航天系统）是非线性以及（或者）是时变的，一般讲，线性时不变系统的分析和设计技术不适用于这些更为复杂的系统。

在五十年代实用的高速数字计算机的出现对处理非线性和时变系统提供了一个主要工具。工程师们迅速地利用这些卓越的计算机，在纸上进行大量的试探法设计来代替研究实验室中的工作。在许多情况下，特别是在设计制导和控制系统时，需要一个更加系统化的方法就变得越来越清楚了。这导致对变分法这一古老的学科重新产生了兴趣，并取得了饶有兴趣的新进展——动态规划。这些技术在确定性的、非线性的和时变系统方面的应用，构成了本书第一章到第九章的基础。

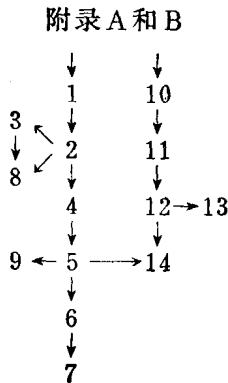
在本书的第一部分中假定对所研究的动态系统的结构和参数已有精确的认识，对反馈控制已有精确的测量。实际上，此种精确的认识是很少能获得的。因此，重要的是能够预测被控系统对环境及测量系统中随机波动的灵敏度。第十章到第十四章就讨论这个问题，从复习概率和随机过程的基础开始，进而利用噪声测量并计及环境对系统的随机扰动设计出就平均意义上来说是“最好”的控制系统。

我们的主要目标是得出易于译成数字计算机程序的有用结果。本书在以讲稿形式出现时的几种本子，业经我们有才能的和长于批评的学生和同事们的推敲，因此我们希望绝大多数错误已经被发现。当然，我们应当对仍然可能存在的任何错误承担责任。

本书已经作为现代控制理论课程的一学期和两学期的教材之用。可以按确定性—随机性这样的顺序，也可按入门—深入这样的顺序进行讲授。各章之间的逻辑联系以及按学期时间的长短将各章划分的顺序均列在本书目录的后面。

练习构成了本教材的必要组成部分，它们或者阐明了所论述的内容，或者加以推广，在某些情况下还构成了半研究性的问题。认真的学生应该勤奋地加以钻研。

### 各章间的逻辑联系





确定性部分：一～九章

随机性部分：十～十四章

入门部分：第一章 1.1~1.5节

第二章 2.1~2.3节

第四章、第五章(5.3节除外)

第七章 7.1~7.2节

第十章到第十二章

深入部分为其余章节

# 目 录

<b>第一章 参量最优化问题</b> .....	1
1.1 无约束问题 .....	1
1.2 具有等式约束的问题; 驻点的必要条件 .....	3
1.3 具有等式约束的问题; 局部最小值的充分条件 .....	9
1.4 邻近最优解和拉格朗日乘子的解释 .....	19
1.5 用一阶梯度法求数值解 .....	20
1.6 用二阶梯度法求数值解 .....	22
1.7 具有不等式约束的问题 .....	25
1.8 线性规划问题 .....	30
1.9 具有不等式约束问题的数值解 .....	37
1.10 罚函数法 .....	40
<b>第二章 动态系统的最优化问题</b> .....	43
2.1 单级系统 .....	43
2.2 多级系统; 无终端约束, 级数固定 .....	44
2.3 连续系统; 无终端约束, 终端时间固定 .....	50
2.4 连续系统; 在一个固定终端时间某些状态变量已被规定 .....	58
2.5 在固定终端时间具有预先规定的状态变量的函数的 连续系统 .....	68
2.6 多级系统; 状态变量的函数在终端级被规定 .....	72
2.7 连续系统; 预先规定某些状态变量在未定的终端时间的值 (包括最短时间问题) .....	75
2.8 连续系统; 规定终端状态变量的某些函数, 但终端时间未 规定, 包括最短时间问题 .....	92
<b>第三章 具有轨线约束的动态系统最优化问题</b> .....	95
3.1 积分约束 .....	95
3.2 控制变量等式约束 .....	100
3.3 对控制和状态变量函数的等式约束 .....	104

3.4	对状态变量函数的等式约束	105
3.5	内点约束	106
3.6	系统方程在内点上的不连续性	110
3.7	状态变量在内点上的不连续性	112
3.8	对控制变量的不等式约束	115
3.9	线性最优化问题，“开关式”控制	118
3.10	对控制变量和状态变量的函数的不等式约束	124
3.11	对状态变量的函数的不等式约束	125
3.12	具有状态变量不等式约束的问题中各弧线的分开计算	132
3.13	隅角条件	134
<b>第四章 最优反馈控制</b>		<b>136</b>
4.1	极值场方法	136
4.2	动态规划，最优返回函数的偏微分方程	141
4.3	利用无量纲变量减少状态空间的维数	149
<b>第五章 具有二次判据的线性系统：线性反馈</b>		<b>156</b>
5.1	终端控制器和调节器概述	156
5.2	终端控制器，关于终端误差的二次罚函数	156
5.3	终端控制器，零终端误差和可控性	167
5.4	调节器和稳定性	177
<b>第六章 邻近的极值线和二阶变分</b>		<b>188</b>
6.1	邻近的极值轨线（终端时间已定）	188
6.2	用反向扫掠法确定邻近的极值轨线	190
6.3	存在一个局部最小值的充分条件	193
6.4	摄动反馈控制（终端时间已定）	205
6.5	终端时间未规定的邻近极值轨线	210
6.6	终端时间未定时采用反向扫掠法确定邻近极值轨线	212
6.7	具有未定终端时间的局部最小值的充分条件	215
6.8	终端时间未定的摄动反馈控制	215
6.9	对一个强最小值的充分条件	218
6.10	反向扫掠的多级型式	221
6.11	多级系统的局部最小值的充分条件	225
<b>第七章 最优规划与控制问题的数值解</b>		<b>227</b>

7.1	引言	227
7.2	极值场法; 动态规划	228
7.3	邻近极值算法	229
7.4	一阶梯度算法	237
7.5	二阶梯度算法	245
7.6	一种拟线性化算法	251
7.7	用于多级系统的二阶梯度算法	254
7.8	共轭-梯度算法	256
7.9	控制变量具有不等式约束的问题	258
7.10	状态变量具有不等式约束的问题	261
7.11	数学规划法	261
<b>第八章 最优化与控制问题的奇异解</b>		<b>264</b>
8.1	引言	264
8.2	具有二次判据的线性动态系统最优化问题的奇异解	265
8.3	非线性动态系统最优化问题的奇异解	270
8.4	奇异弧的一个广义的凸性条件	277
8.5	连接处的条件	281
8.6	包含不等式约束及奇异弧的一个资源分配问题	282
<b>第九章 微分对策</b>		<b>291</b>
9.1	离散对策	291
9.2	连续对策	294
9.3	微分对策	296
9.4	线性二次追逐-逃逸对策	303
9.5	具有有界控制的极小极大时间拦截问题	314
9.6	关于微分对策的讨论	315
<b>第十章 关于概率的某些概念</b>		<b>317</b>
10.1	离散值随机标量	317
10.2	离散值随机向量	318
10.3	相关性、独立性和条件概率	321
10.4	连续值随机变量	322
10.5	常遇的概率质数函数	325
10.6	常遇的概率密度函数	328

10.7 随机向量的高斯密度函数	331
<b>第十一章 随机过程引论</b>	<b>337</b>
11.1 随机序列和马尔可夫性质	337
11.2 高斯-马尔可夫随机序列	342
11.3 随机过程和马尔可夫性质	349
11.4 高斯-马尔可夫随机过程	352
11.5 用高斯-马尔可夫序列逼近高斯-马尔可夫过程	368
11.6 状态变量和马尔可夫性质	370
11.7 具有独立增量的过程	373
<b>第十二章 最优滤波和预测</b>	<b>375</b>
12.1 引言	375
12.2 利用加权最小二乘方进行参量的估计	375
12.3 单级线性转移的最优滤波	386
12.4 线性多级过程的最优滤波和预测	388
12.5 具有连续测量的连续线性动态系统的最优滤波	393
12.6 非线性动态过程的最优滤波	403
12.7 应用巴叶斯方法的参量估计	408
12.8 多级系统最优滤波和预测的巴叶斯方法	413
12.9 噪声中高斯信号的检测	421
<b>第十三章 最优平滑和内插</b>	<b>423</b>
13.1 单级转移的最优平滑	423
13.2 多级过程的最优平滑	426
13.3 连续过程的最优平滑和内插	429
13.4 非线性动态过程的最优平滑	434
13.5 顺序-相关的测量噪声	435
13.6 时间-相关测量噪声	440
<b>第十四章 存在不确定性时的最优反馈控制</b>	<b>443</b>
14.1 引言	443
14.2 具有白色过程噪声以及状态可精确了解的连续线性系统	443
14.3 过程和测量包含附加白噪声的连续线性系统; 必然性- 等价原理	449
14.4 一个最优被控系统的平均特性	452

14.5	具有平稳附加白噪声的平稳线性系统的调节器的综合	453
14.6	具有附加白噪声的线性系统的终端控制器的综合	458
14.7	具有附加纯随机噪声的多级线性系统; 离散必然性- 等价原理	465
14.8	具有附加白噪声的非线性系统的最优反馈控制	469
附录 A	一些基本的数学知识	475
A1	引言	475
A2	记法	475
A3	矩阵代数与几何概念	478
A4	常微分方程初步	486
附录 B	线性系统的性质	493
B1	线性代数方程	493
B2	可控性	493
B3	可观测性	495
B4	稳定性	496
B5	正则交换	498
各章参考文献		501
选择法试题		506

# 第一章 参量最优化问题

## 1.1 无约束问题

最简单类型的参量最优化问题是寻找  $m$  个参量  $u_1, \dots, u_m$  的值, 使得作为这些参量的一个函数的性能指标

$$L(u_1, \dots, u_m)$$

为最小。为了方便起见, 我们采用一种更紧凑的命名法; 令

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = \text{判定向量} \quad (1.1.1)$$

则可将性能指标写作

$$L(u). \quad (1.1.2)$$

如果对  $u$  的可能值没有约束, 而且函数  $L(u)$  在各处均有一次和二次偏导数, 则最小值的必要条件是

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0, \quad (1.1.3)$$

意即  $\partial L / \partial u_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , 和

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} \geq 0, \quad (1.1.4)$$

意即分量为  $\partial^2 L / \partial u_i \partial u_j$  的  $(m \times m)$  矩阵必须是半正定的, 即, 它具有零或正的特征值。

凡满足式 (1.1.3) 的各点均称为驻点。

局部最小值的充分条件是式 (1.1.3) 和

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} > 0, \quad (1.1.5)$$

即全部特征值必须为正。

如果满足式 (1.1.3), 但  $\partial^2 L / \partial u^2 = 0$ , 即矩阵的行列式为 零(意味着一个或更多的特征值为零), 则需要另外的信息方能确定此点是否有最小值。这样的点称为奇异点。注意, 如果  $L$

是  $u$  的线性函数，则处处有  $\partial^2 L / \partial u^2 = 0$ ，而且，一般说来，不存在最小值。

**例** 关于  $L = L(u_1, u_2)$ 。

(a) 最小值:  $\partial^2 L / \partial u_i \partial u_j$  的两个特征值均大于零;

$$L = [u_1 \quad u_2] \begin{bmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

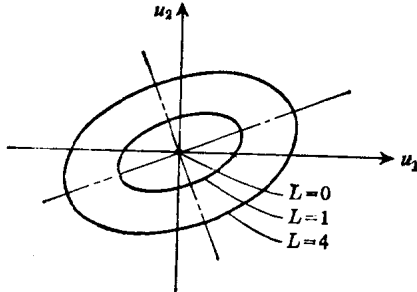


图1.1.1 一个最小值点

(b) 鞍点:  $\partial^2 L / \partial u_i \partial u_j$  的特征值，一个为正而另一个为负。

$$L = [u_1 \ u_2] \begin{bmatrix} -1, & 1 \\ 1, & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}。$$

(c) 奇异点: 一个特征值为正，另一个特征值为零

$$L = (u_1 - u_2^2)(u_1 - 3u_2^2)。$$

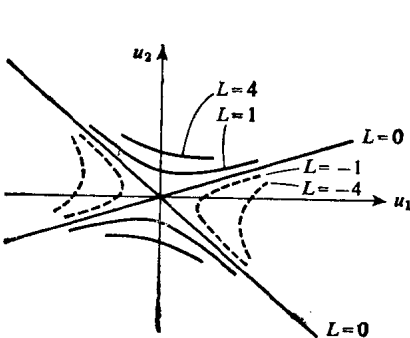


图1.1.2 一个鞍点

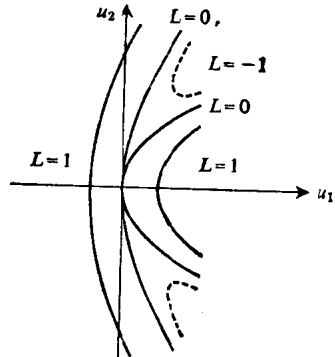


图1.1.3 一个奇异点



## 1.2 具有等式约束的问题; 驻点的必要条件

比较一般的一类参量最优化问题是找出  $m$  个判定参量  $u_1, \dots, u_m$  的值使作为  $n + m$  个参量的标量函数的性能指标

$$L(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m),$$

为最小, 这里  $n$  个状态参量  $x_1, \dots, x_n$  由判定参量通过一组  $n$  个约束关系式

$$f_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m) = 0,$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m) = 0.$$

来决定。为了方便起见, 我们也采用一个比较紧凑的命名法。令

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = \text{判定向量}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \text{状态向量},$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \text{约束向量}.$$

采用这种命名法后, 此问题可叙述如下。

找出使

$$L(x, u) \quad (1.2.1)$$

为最小的判定向量, 这里状态向量  $x$  由判定向量通过约束关系

$$f(x, u) = 0 \quad (n \text{ 个方程}) \quad (1.2.2)$$

来决定。对一个给定的参量最优化问题, 选择哪些参量为判定参量不是唯一的; 之所以要在判定参量与状态参量之间加以区分, 仅是为了方便起见。然而, 所作的选择必须能使  $u$  通过约束关系式(1.2.2) 决定  $x$ 。

假如关系式(1.2.1)和(1.2.2)相对  $x$  和  $u$  两者皆为线性, 则一般说来最小值不存在。为使问题有意义, 对  $x$  以及 (或者)  $u$