

概率位势论 经典位势论与

(下册)

(美)

J. L. 杜布

著

科

学

出

版

社



经典位势论与概率位势论

(下 册)

〔美〕J. L. 杜布 著

杨振明 张润楚 译

周性伟 刘嘉焜

吴 荣 校

科 学 出 版 社

1 9 9 3

(京)新登字 092 号

内 容 简 介

本书是当今国际上最具名望的概率论大师 J. L. Doob 的一部著作。经典位势论与概率论分属于分析数学与概率论两个不同领域，作者将这两个领域联系起来，使之相互补充，为现代数学的发展，特别是概率论的发展作出了贡献。

本书叙述了位势论和概率论之间的联系，详细介绍了 Laplace 方程的位势理论与现代鞅论的关系，如上调和函数相应于上鞅，Dirichlet 问题与 Brown 运动的关系，Martin 边界理论、容度理论等。本书中文版的出版对于促进我国概率论研究有很大的帮助。

J. L. Doob

Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart

Springer-Verlag, 1984

经典位势论与概率位势论

(下 册)

[美] J. L. 杜布 著

杨振明 张润楚 译

周性伟 刘嘉焜

吴 荣 校

责任编辑 徐宇星 刘嘉善

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1993 年 12 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1993 年 12 月第一次印刷 印张：16 7/8

印数：1—1 500 字数：442 000

ISBN 7-03-003453-8/O · 618

定价：19.00 元

8310/142

目 录

第 2 部分 第1部分的概率对应

第 I 章 概率的基本概念	1
1. 可测空间上的适应函数族	1
2. 循序可测性	2
3. 随机变量	5
4. 条件期望	5
5. 条件期望的连续性定理	8
6. 条件期望的 Fatou 引理	12
7. 条件期望的控制收敛定理	12
8. 随机过程,“不足道”,“无区别”,“标准修正”,“几乎”... ..	13
9. 集的命中与循序可测性	16
10. 正则过程和有限维分布	18
11. 基本概率空间的选取	21
12. 右连续过程对集的命中	22
13. 与随机过程循序可测性相对的可测性	24
14. 可料函数族	28
第 II 章 可选时及有关概念	31
1. 可选时的由来	31
2. 可选时的性质(连续参数情形)	33
3. 在可选时上的过程函数	36
4. 命中时间与进入时间	38
5. 应用于样本函数的连续性	40
6. 上节的续	42
7. 可料可选时	43

8. 截口定理	44
9. 可料时的图与可料集的进入时间	46
10. $\mathbf{R}^+ \times \mathcal{Q}$ 的半极子集	48
11. 随机过程的类 $\mathbf{D}$ 与类 $\mathbf{L}^p$	48
12. 可选时的分解;可及的与绝不可及的可选时	50
第 III 章 鞅论初步	53
1. 定义	53
2. 例	54
3. 初等性质(任意全序参数集情形)	57
4. 鞅论中的参数集	58
5. 上鞅族的收敛	59
6. 可选样本定理(有界停时情形)	60
7. 右闭过程的可选样本定理	62
8. 可选停止	63
9. 极大不等式	64
10. 条件极大不等式	66
11. 下鞅上确界的一个 L^p 不等式	66
12. 下穿	68
13. L' 有界情形的向前收敛	73
14. 一致可积鞅的收敛	74
15. 可右闭上鞅的向前收敛	77
16. 鞅的向后收敛	77
17. 上鞅的向后收敛	78
18. τ 算子	79
19. 上鞅的自然序分解定理	81
20. 算子 LM 与 GM	82
21. 上鞅位势与 Riesz 分解	83
22. 离散参数概率论中的位势论约化	84
23. 应用于下穿不等式	85
第 IV 章 连续参数上鞅的基本性质	88

1. 连续性.....	88
2. 一致可积连续参数鞅的可选样本.....	93
3. 连续参数上鞅的可选样本与收敛性.....	96
4. 上鞅的递增序列.....	98
5. 位势理论基本收敛定理的概率版本.....	102
6. 拟有界正上鞅, 由增过程生成的上鞅位势.....	106
7. 可料增过程的自然性 ($I - Z^+$ 或 R^+).....	110
8. 增过程生成的上鞅位势, 离散参数情形	116
9. 可料增过程的一个不等式.....	117
10. 增过程生成的上鞅位势, 任意参数集情形	118
11. 连续参数情形由增过程生成的上鞅位势: Meyer 分解	121
12. 下鞅的 Meyer 分解.....	124
13. 与上鞅相连系的测度的作用, 上鞅的控制原理.....	125
14. 连续参数场合的算子 τ , LM 与 GM	129
15. $R^+ \times \mathcal{Q}$ 上的位势理论	131
16. $R^+ \times \mathcal{Q}$ 上的细拓扑	132
17. 连续参数概率论中的位势理论约化	134
18. 约化性质	136
19. 上节约化性质的证明	140
20. 约化的计算	146
21. 上鞅位势的能	148
22. 上鞅间断性的排除	149
23. 上鞅的分解与间断	151
第 V 章 随机过程的格与相关的类.....	154
1. 惯例, 本性序.....	154
2. 下鞅 $\{x(\cdot), \mathcal{F}(\cdot)\}$ 的 $LMx(\cdot)$	155
3. 一致可积正下鞅.....	157
4. L^p 有界随机过程 ($p \geq 1$)	158
5. 格 $(S^\pm, \leq)$, $(S^+, \leq)$, $(S^\pm, \leq)$, $(S^+, \leq)$	160

6. 向量格 $(\mathbf{S}, \leq)$ 与 $(\mathbf{S}, \leq)$	162
7. 向量格 $(\mathbf{S}_m, \leq)$ 与 $(\mathbf{S}_m, \leq)$	164
8. 向量格 $(\mathbf{S}_p, \leq)$ 与 $(\mathbf{S}_p, \leq)$	165
9. 向量格 $(\mathbf{S}_{qb}, \leq)$ 与 $(\mathbf{S}_{qb}, \leq)$	166
10. 向量格 $(\mathbf{S}_i, \leq)$ 与 $(\mathbf{S}_i, \leq)$	168
11. 正交分解 $\mathbf{S}_m = \mathbf{S}_{mqb} + \mathbf{S}_{m_i}$ 与 $\mathbf{S}_m = \mathbf{S}_{mqb} + \mathbf{S}_{m_i}$..	169
12. 局部鞅与 $(\mathbf{S}, \leq)$ 中的奇异上鞅位势	170
13. 拟鞅 (连续参数情形)	171
第 VI 章 Markov 过程	176
1. Markov 性	176
2. 过滤的选取	181
3. 有平稳转移概率的整参数 Markov 过程	182
4. 鞅论在离散参数 Markov 过程中的应用	185
5. 具有平稳转移概率的连续参数 Markov 过程	188
6. 右连续过程的特性	190
7. 连续参数 Markov 过程: 寿命与灭绝点	193
8. Markov 过程过滤的右连续性, 一个 0-1 律	195
9. 强 Markov 性	196
10. 概率位势理论, 过分函数	200
11. 过分函数与上鞅	204
12. 过分函数与解析集的命中时间	205
13. 条件 Markov 过程	206
14. 约束 Markov 过程	208
15. 中断 Markov 过程	209
第 VII 章 Brown 运动	211
1. 以 $\mathbf{R}^N$ 为状态空间的独立增量过程	211
2. Brown 运动	213
3. Brown 轨道的连续性	218
4. Brown 运动过滤	221
5. Brown 转移密度和 Brown 运动的基本性质	224

6. Brown 运动的 0-1 律	227
7. 约束 Brown 运动	230
8. André 反射原理	232
9. 开集中的 Brown 运动 ($N \geq 1$)	234
10. 开集中的时空 Brown 运动	238
11. 区间中的 Brown 运动	240
12. 关于区间的抛物型测度的概率计算	242
13. 热方程及其对偶的概率意义	243
第 VIII 章 Itô 积分	245
1. 记号	245
2. Γ_0 的大小	247
3. Itô 积分的性质	248
4. 对 Γ_0 中被积过程的随机积分	251
5. 对 Γ 中的被积过程的随机积分	252
6. 第 3 节中性质的证明	254
7. 推广到向量值和复值被积过程	259
8. 关于 Brown 运动过滤的鞅	260
9. 变量替换	264
10. Brown 运动增量的作用	267
11. 用 Riemann-Stieltjes 和计算 Itô 积分 ($N = 1$)	269
12. Itô 公式	271
13. 势论基本函数与 Brown 运动的复合	275
14. 解析函数与 Brown 运动的复合	276
第 IX 章 Brown 运动和鞅论	278
1. 初等鞅应用	278
2. 共抛物型多项式和鞅论	282
3. $\mathbb{R}^N$ 上的上调和与调和函数, 上鞅与鞅	284
4. 命中一个 F_σ 集	287
5. Brown 运动对集合的命中	289
6. 上调和函数, Brown 运动的过分函数	291

7. 上调和函数与 Brown 运动复合的初步处理, 一个概率 Fatou 边界极限定理	295
8. Brown 运动的过分函数和不变函数	300
9. 应用于命中概率和转移密度的抛物性	302
10. Brown 运动命中非极集 ($N = 2$)	303
11. Brown 运动复合函数的连续性	304
12. Brown 运动与上调和函数复合的连续性	306
13. 经典 Dirichlet 问题的概率初解	307
14. 约化的概率计算	309
15. 细拓扑的概率描述	312
16. Brown 运动的 α 过分函数及其与 Brown 运动的复 合	316
17. 作为 Green 函数的 Brown 运动转移函数; 对应的向 后和向前抛物型方程	319
18. Brown 运动的过分测度	321
19. Brown 运动的几乎 Borel 集	324
20. 从非规则边界点出发的 Brown 运动命中一个集	325
第 X 章 条件 Brown 运动	327
1. 定义	327
2. 用 Brown 运动表示 h -Brown 运动	331
3. (2.1) 的由来	336
4. h -Brown 运动在其生存时间的渐近特性	339
5. 从 h 的无穷大点出发的 h -Brown 运动	342
6. 时间逆转下的 Brown 运动	344
7. 对于 h 调和函数 Dirichlet 问题的概率初解; h -Bro- wn 运动命中概率和对应的广义约化	348
8. 严格正上调和函数比值的概率边界极限和内极限定理	352
9. 球内的条件 Brown 运动	356
10. 条件 Brown 运动的末遇分布; 用末遇分布表示集的	

容度分布	359
11. 条件 Brown 运动的尾 σ 代数	360
12. 条件时空 Brown 运动	366
13. 参数集为 R 的在 $[\dot{R}^N]R^N$ 中的 [时空] Brown 运动	367

第 3 部 分

第 I 章 经典位势理论与鞅论中的格	371
1. 经典位势理论与鞅论之间的对应	371
2. 在位势理论与鞅论中 S 的分解分量间的关系	372
3. 类 L^p 与类 D	373
4. 加在 h 调和函数及鞅上的 PWB 相关条件	373
5. 相对于拟有界性的类 D 性质	375
6. 拟有界性的一个条件	376
7. S_m^+ 中元素的奇异性	377
8. S^+ 中元素的奇异分量	378
9. 类 S_{pq}	379
10. 类 S_{p_i}	382
11. 与 h -Brown 运动相联系的 h 上调和函数之分量的 格论分析	383
12. S_m^+ 的一种分解 (位势理论情形)	385
13. 第 11 节的续	386
第 II 章 Brown 运动与 PWB 方法	388
1. 问题的由来	388
2. PWB 方法的概率分析	389
3. PWB^h 的例	393
4. PWB^h 情形的尾 σ 代数	395
第 III 章 Martin 空间上的 Brown 运动	397
1. Martin 空间上 Brown 运动的构造	397
2. 从 Martin 边界点出发的 Brown 运动	398
3. 极小 Martin 边界点处的 0-1 律与极小细拓扑的概率	

刻划(记号同第 1 节).....	401
4. Martin 空间上的概率 Fatou 定理.....	403
5. 定理 1. XI. 4(c)及其在边界上对应结果的概率方法.....	404
6. 抛物型情形调和函数的 Martin 表示.....	407
附录 I 解析集.....	411
1. 集的铺与代数.....	411
2. Suslin 变换.....	411
3. 乘积铺上的解析集.....	412
4. 解析扩张与铺的 σ 代数扩张.....	413
5. $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ 的投影特性.....	413
6. 运算 $\mathcal{A}(\mathcal{A})$	414
7. 乘积铺中集的投影.....	415
8. 可测性概念到解析运算情形的推广.....	415
9. 完备度量空间的 G_δ 集	416
10. Polish 空间	417
11. Baire 零空间.....	417
12. 解析集	418
13. Polish 空间的解析子集	420
附录 II 容度理论	421
1. Choquet 容度.....	421
2. Sierpinski 引理	421
3. Choquet 容度定理.....	422
4. Lusin 定理	422
5. Choquet 容度的一个基本例子.....	423
6. 强次可加集函数.....	424
7. 由正强次可加集函数产生 Choquet 容度	425
8. 拓扑准容度.....	427
9. 普遍可测集.....	428
附录 III 格论	430
1. 引言.....	430

2. 格的定义	430
3. 锥	430
4. 由锥产生的特殊序	431
5. 向量格	432
6. 向量格的分解性质	434
7. 向量格中的正交性	435
8. 向量格中的带	435
9. 在带上的投影	436
10. 集的正交补	437
11. 单元素生成的带	437
12. 序收敛	438
13. 在线性序集上的序收敛	439
附录 IV 测度论中的格论概念	441
1. 集代数的格	441
2. 可测空间和可测函数	442
3. 复合函数	443
4. 可测空间的测度格	444
5. 可测空间的 σ 有穷测度格(记号同第 4 节)	446
6. Hahn 和 Jordan 分解	447
7. 向量格 $\mathcal{M}_0$	448
8. 绝对连续性和奇异性	449
9. 测度空间上可测函数的格	450
10. 可测函数族的序收敛	451
11. Polish 空间上的测度	454
12. 测度的导数	455
附录 V 一致可积性	457
附录 VI 核和转移函数	459
1. 核	459
2. 核的普遍可测扩张	460
3. 转移函数	461

附录 VII 积分极限定理	464
1. 一个基本极限定理	464
2. 比值积分极限定理	465
3. 一个一维比值积分极限定理	466
4. 涉及凸变差导数的比值积分极限定理	467
附录 VIII 下半连续函数	471
1. 函数的下半连续平滑	471
2. 下半连续函数族的上确界	471
3. Choquet 拓扑引理	472
历史注记	473
参考文献	501
内容索引	511

第2部分 第1部分的概率对应

第1章 概率的基本概念

1. 可测空间上的适应函数族

(a) **可测空间的过滤** 设 $(Q, \mathcal{F})$ 是一可测空间, 而 $(I, \leq)$ 是一线性序集. $(Q, \mathcal{F})$ 中的一个过滤系指自 I 到 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数类中的映射 $t \mapsto \mathcal{F}(t)$, 它在如下意义下递增: 若 $s \leq t$, 则 $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$. 三元体 $(Q, \mathcal{F}, \mathcal{F}(\cdot))$ 称为滤过的可测空间.

如果 $(Q, \mathcal{F}, \mathcal{F}(\cdot))$ 是滤过的可测空间, 而指标集 I 是 $\mathbb{R}$ 中的区间, 以 $\leq$ 为序, 我们对 I 中的 t 定义 $\mathcal{F}^+(t) = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}(s)$,

就得到又一个过滤 $\mathcal{F}^+(\cdot)$, 使对于 I 有的 t 有 $\mathcal{F}(t) \subset \mathcal{F}^+(t)$. 若 $\mathcal{F}(\cdot) = \mathcal{F}^+(\cdot)$, 则称过滤 $\mathcal{F}(\cdot)$ 是右连续的. 特别地, $\mathcal{F}^+(\cdot)$ 必是右连续的.

(b) **函数族** 设 $\{x(t), t \in I\}$ 是自空间 Q 到“状态空间” Q' 中的一个函数族, 指标在参数集 I 中变化. 函数 $x(t)$ 在 Q 中的点 ω 处的值记为 $x(t, \omega)$, 函数 $x(t)$ 也可记作 $x(t, \cdot)$, 函数 $x(\cdot, \omega): t \mapsto x(t, \omega)$ 称为 ω 所确定的样本函数. 如果所有的样本函数都是连续的, 或者右连续的等等, 我们就说 Q 上的函数族 $x(\cdot)$ 是连续的, 或右连续的等等, 当然, 状态空间与参数集需要具备使这一说法有意义的结构.

(c) **适应函数族** 设 $\{x(t), t \in I\}$ 是自滤过可测空间 $(Q, \mathcal{F}, \mathcal{F}(\cdot))$ 到可测空间 $(Q', \mathcal{F}')$ 中的可测函数族, 如果对于参数集 I 中的每个 t , $x(t)$ 是自可测空间 $(Q, \mathcal{F}(t))$ 到可测空

间 $(Q', \mathcal{F}')$ 中的可测函数, 则称这个函数族适应于 $\mathcal{F}(\cdot)$. 除非另有说明, 记号 $\{x(\cdot), \mathcal{F}(\cdot)\}$ 总是表示具备上述适应性. 如果 $\{x(t), t \in I\}$ 是自可测空间 $(Q, \mathcal{F})$ 到可测空间 $(Q', \mathcal{F}')$ 中的可测函数族, 且 I 是一个线性序集, 对于 I 中的 t , 定义 $\mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}\{x(s), s \leq t\}$ (这里所用的记号可参见附录 IV.1), 就得到了使 $\{x(\cdot), \mathcal{F}_0(\cdot)\}$ 为适应族的过滤 $\mathcal{F}_0(\cdot)$. $\mathcal{F}_0(\cdot)$ 是保持适应性的最小过滤, 这就是说, 若 $\{\mathcal{F}(t), t \in I\}$ 是使 $\{x(\cdot), \mathcal{F}(\cdot)\}$ 为适应族的过滤, 则对于 I 中的 t 有 $\mathcal{F}_0(t) \subset \mathcal{F}(t)$.

滤过的可测空间与它的适应函数族为某些物理概念提供了一个数学形式的模型. 可测空间 $(Q, \mathcal{F})$ 是这样一个数学模型, Q 代表某物理现象中可能事件的集, 而 $\mathcal{F}$ 是复合事件的指定的类. 如果 I 是 $\mathbb{R}$ 的子集, 则 $(Q, \mathcal{F})$ 中的过滤 $\{\mathcal{F}(t), t \in I\}$ 就是随时间的延续而不断地丰富的一个事件流. 每一对 (t, ω) 代表着在时刻 t 试验的一个可能的结果, 而 $\mathcal{F}(t)$ 代表到时刻 t 之前能观测到的复合事件组成的类. 函数 $x(t, \cdot)$ 在 ω 处的值 $x(t, \omega)$ 是试验结果 (t, ω) 所对应的某种观测值, 而函数 $x(t, \cdot)$ 本身则以它为 $\mathcal{F}(t)$ 可测的意义下并入 $\mathcal{F}(t)$ 之中, 就是说 $\{x(\cdot), \mathcal{F}(\cdot)\}$ 是一个适应过程.

拓扑可测空间的可测集

如果一个可测空间是作为拓扑空间给出的, 那么可测集的 σ 代数总是由该空间的 Borel 子集组成的 σ 代数, 除非另外指定某个 σ 代数. 特别地, 状态空间 $\mathbb{R}$ 总是指可测空间 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

2. 循序可测性

如果 I 是 $\mathbb{R}$ 中一个子区间或单点集, 我们以 $\mathcal{B}(I)$ 表示 I 的 Borel 子集类. 当 I 为单点集时, $\mathcal{B}(I)$ 由这个单点集与空集组成. 如果函数 $(t, \omega) \mapsto x(t, \omega)$ 是自可测空间 $(I \times Q, \mathcal{B}(I) \times \mathcal{F})$ 到可测空间 $(Q', \mathcal{F}')$ 可测的, 则称自可测空间

$(Q, \mathcal{F})$ 到可测空间 $(Q', \mathcal{F}')$ 中的函数族 $\{x(t), t \in I\}$ 是可测的。但是, 当我们研究适应族 $\{x(t), \mathcal{F}(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ 时, 上述定义常常不够强。事实上, 在考虑适应族时, 人们经常希望研究形如 $\{x(t), \mathcal{F}(t), t \leq c\}$ 的子族, 而且希望对这种子族的分析, 特别是对子族的可测性的分析, 只依赖涉及到区间 $[0, c]$ 中的参数值的性质。遗憾的是, 即使取 $\mathcal{F} = \bigvee_{t \in \mathbb{R}^+} \mathcal{F}(t)$, 族 $\{x(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ 的可测性也不能推出所述形式的子族是可测的。如下严格叙述的定义提供了后一种可测性。

假定 $\{x(t), \mathcal{F}(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ 是一适应函数族, 如果对于 $c \geq 0$ 总有 $A \cap ([0, c] \times Q) \in \mathcal{B}([0, c]) \times \mathcal{F}(c)$, 则称 $\mathbb{R}^+ \times Q$ 的子集 A 是循序可测的。循序可测集组成的类是一个 σ 代数。适应族称为循序可测的, 如果函数 $x(\cdot, \cdot)$ 是自空间 $\mathbb{R}^+ \times Q$ 连同循序可测集 σ 代数到 $(Q', \mathcal{F}')$ 中可测的, 等价地, 如果对 $c \geq 0$, 函数 $x(\cdot, \cdot)$ 在 $[0, c] \times Q$ 上的限制是自 $([0, c] \times Q, \mathcal{B}([0, c]) \times \mathcal{F}(c))$ 到 $(Q', \mathcal{F}')$ 中可测的 (按后一种表述方式, 集 A 为循序可测的等价条件是, 以 $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ 为状态空间的适应族 $\{1_A(t, \cdot), \mathcal{F}(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ 是循序可测的)。我们指出, 尽管没有前面的适应性假设, 循序可测性条件蕴含适应性。容易看到, 若 $\{x(t), \mathcal{F}(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ 是循序可测的, 则对于 $b \geq 0$, $\{x(b+t), \mathcal{F}(b+t), t \in \mathbb{R}^+\}$ 也是循序可测的, 其证明留给读者。再者, 若 $\{x(\cdot), \mathcal{F}(\cdot)\}$ 是循序可测的, 而 f 是自状态空间 $(Q', \mathcal{F}')$ 到可测空间 $(Q'', \mathcal{F}'')$ 中的可测函数, 那么立即可推出 $\{f(x(\cdot)), \mathcal{F}(\cdot)\}$ 也是循序可测的, 其状态空间为 $(Q'', \mathcal{F}'')$ 。

循序可测性的另一种刻划

继续上段的讨论, 定义一个新的过滤 $\mathcal{F}^-(\cdot)$: 令 $\mathcal{F}^-(0) = \mathcal{F}(0)$, 而 $t > 0$ 时取 $\mathcal{F}^-(t) = \bigvee_{s < t} \mathcal{F}(s)$, 并考虑加在自 $(Q, \mathcal{F})$ 到 $(Q', \mathcal{F}')$ 中的函数族 $\{x(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ 上的如下条件:

(a) 此族适应于 $\mathcal{F}(\cdot)$ 。

(a') $\mathcal{F}(\cdot)$ 是右连续的。

(b) 对 $c > 0$, 族 $x(\cdot)$ 在集合 $[0, c[$ 上的限制是 $\mathcal{B}([0, c[) \times \mathcal{F}^{-1}(c)$ 可测的.

注意 (a') 连同 (b) 蕴含 (a). 现在我们证明, 当且仅当 (a) 与 (b) 满足时 $\{x(\cdot), \mathcal{F}(\cdot)\}$ 是循序可测的. 为证明 (a) 与 (b) 放在一起可推出循序可测性, 我们只需指出 $[0, c] \times \mathcal{Q}$ 的子集 $[0, c[\times \mathcal{Q}$ 与 $\{c\} \times \mathcal{Q}$ 都在 $\mathcal{B}([0, c]) \times \mathcal{F}(c)$ 之中, 且它们二者之并就是前一个集, 且在条件 (a) 与 (b) 之下, 函数 $x(\cdot, \cdot)$ 在两个子集上从而在它们的并集上都是关于 $\mathcal{B}([0, c]) \times \mathcal{F}(c)$ 可测的. 反过来说, 循序可测性显然蕴含 (a), 而且采用可测函数的另一种拼接可证明循序可测性也蕴含 (b).

例 设 $\{x(t), \mathcal{F}(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ 是一个适应族, 其状态空间是 Polish 空间. 如果样本函数都是右连续或都是左连续的, 则这个族是循序可测的. 例如对右连续情形我们定义

$$x_n(t, \omega) = x\left(\frac{j}{n}, \omega\right), \text{ 若 } (j-1)\frac{c}{n} < t \leq j\frac{c}{n}, 1 \leq j \leq n. \quad (2.1)$$

$$x_n(0, \omega) = x(0, \omega).$$

其中 $c > 0$. 那么 $x_n(\cdot, \cdot)$ 在 $[0, c] \times \mathcal{Q}$ 上的限制是 $\mathcal{B}([0, c] \times \mathcal{F}(c))$ 可测的, 且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\cdot, \cdot) = x(\cdot, \cdot)$, 从而当 $c > 0$ 时循序可测的条件满足. 再由族的适应性知 $c = 0$ 时条件也满足. 左连续情形可类似地处理.

注意如果对任意 $\varepsilon > 0$, 族 $x(\cdot)$ 在集合 $[0, c]$ 上的限制是 $\mathcal{B}[0, c] \times \mathcal{F}(c + \varepsilon)$ 可测的, 那么 (b) 满足. 事实上, 由此条件可推知, 对 $0 < \delta < c$ 这个族在 $[0, c - \delta]$ 上的限制是

$$\mathcal{B}([0, c - \delta]) \times \mathcal{F}\left(c - \frac{\delta}{2}\right) \subset \mathcal{B}([0, c]) \times \mathcal{F}^{-1}(c)$$

可测的, 由此便得 (b). 换句话说, 如果对于每个 $\varepsilon > 0$ 过程 $\{x(t), \mathcal{F}(t + \varepsilon), t \in \mathbb{R}^+\}$ 是循序可测的, 那么适应过程 $\{x(\cdot), \mathcal{F}(\cdot)\}$ 是循序可测的.