概率位势论

经典位势论与

（下册）

〔美〕J．L．杜布 著

科学出版社

经典位势论与概率位势论

（下 册）

〔美〕J. L. 杜布 著

杨振明 张润楚
周性伟 刘嘉焜 译

吴 荣 校

科 学 出 版 社

1 9 9 3

(京) 新登字 092 号

内 容 简 介

本书是当今国际上最具名望的概率论大师 J. L. Doob 的一部杰作. 经典位势论与概率论分属于分析数学与概率论两个不同领域, 作者将这两个领域联系起来,使之相互补充,为现代数学的发展, 特别是概率论的发展作出了贡献.

本书叙述了位势论和概率论之间的联系,详细介绍了 Laplace 方程的位势理论与现代鞅论的关系,如上调和函数相应于上鞅, Dirichlet 问题与 Brown 运动的关系, Martin 边界理论、容度理论等. 本书中文版的出版对于促进我国概率论研究有很大的帮助.

J. L. Doob

Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart

Springer-Verlag, 1984

经典位势论与概率位势论

(下 册)

〔美〕 J. L. 杜布 著

杨振明 张润楚 周性伟 刘嘉焜 译

吴 荣 校

责任编辑 徐宇星 刘嘉善

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1993 年 12 月第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1993 年 12 月第一次印刷 印张: 16 7/8

印数: 1—1 500 字数: 442 000

ISBN 7-03-003453-8/O·618

定价: 19.00 元

目　录

第2部分　第1部分的概率对应

第 3 部 分

第 2 部分　第 1 部分的概率对应

第 I 章　概率的基本概念

1. 可测空间上的适应函数族

(a) 可测空间的过滤　设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 是一可测空间，而 $(I, \leqslant)$ 是一线性序集. $(\Omega, \mathscr{F})$ 中的一个过滤系指自 I 到 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数类中的映射 $t \longmapsto \mathscr{F}(t)$，它在如下意义下递增：若 $s \leqslant t$，则 $\mathscr{F}(s) \subset \mathscr{F}(t)$. 三元体 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}(\cdot))$ 称为滤过的可测空间.

如果 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}(\cdot))$ 是滤过的可测空间，而指标集 I 是 $\mathbf{R}$ 中的区间，以 $\leqslant$ 为序，我们对 I 中的 t 定义 $\mathscr{F}^{+}(t) = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}(s)$，就得到又一个过滤 $\mathscr{F}^{+}(\cdot)$，使对于 I 有的 t 有 $\mathscr{F}(t) \subset \mathscr{F}^{+}(t)$. 若 $\mathscr{F}(\cdot) = \mathscr{F}^{+}(\cdot)$，则称过滤 $\mathscr{F}(\cdot)$ 是右连续的. 特别地，$\mathscr{F}^{+}(\cdot)$ 必是右连续的.

(b) 函数族　设 $\{x(t), t \in I\}$ 是自空间 Ω 到“状态空间” Ω' 中的一个函数族，指标在参数集 I 中变化. 函数 $x(t)$ 在 Ω 中的点 ω 处的值记为 $x(t, \omega)$，函数 $x(t)$ 也可记作 $x(t, \cdot)$，函数 $x(\cdot, \omega)$：$t \longmapsto x(t, \omega)$ 称为 ω 所确定的样本函数. 如果所有的样本函数都是连续的，或者右连续的等等，我们就说 Ω 上的函数族 $x(\cdot)$ 是连续的，或右连续的等等，当然，状态空间与参数集需要具备使这一说法有意义的结构.

(c) 适应函数族　设 $\{x(t), t \in I\}$ 是自滤过可测空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}(\cdot))$ 到可测空间 $(\Omega', \mathscr{F}')$ 中的可测函数族，如果对于参数集 I 中的每个 t，$x(t)$ 是自可测空间 $(\Omega, \mathscr{F}(t))$ 到可测空

间 $(\Omega', \mathscr{F}')$ 中的可测函数，则称这个函数族**适应于** $\mathscr{F}(\cdot)$. 除非另有说明，记号 $\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 总是表示具备上述适应性. 如果 $\{x(t), t\in I\}$ 是自可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 到可测空间 $(\Omega', \mathscr{F}')$ 中的可测函数族，且 I 是一个线性序集，对于 I 中的 t，定义 $\mathscr{F}_0(t)=\mathscr{F}\{x(s), s\leqslant t\}$（这里所用的记号可参见附录 IV.1），就得到了使 $\{x(\cdot), \mathscr{F}_0(\cdot)\}$ 为适应族的过滤 $\mathscr{F}_0(\cdot)$. $\mathscr{F}_0(\cdot)$ 是保持适应性的最小过滤，这就是说，若 $\{\mathscr{F}(t), t\in I\}$ 是使 $\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 为适应族的过滤，则对于 I 中的 t 有 $\mathscr{F}_0(t)\subset \mathscr{F}(t)$.

滤过的可测空间与它的适应函数族为某些物理概念提供了一个数学形式的模型. 可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 是这样一个数学模型，Ω 代表某物理现象中可能事件的集，而 $\mathscr{F}$ 是复合事件的指定的类. 如果 I 是 $\mathbf{R}$ 的子集，则 $(\Omega, \mathscr{F})$ 中的过滤 $\{\mathscr{F}(t), t\in I\}$ 就是随时间的延续而不断地丰富的一个事件流. 每一对 (t, ω) 代表着在时刻 t 试验的一个可能的结果，而 $\mathscr{F}(t)$ 代表到时刻 t 之前能观测到的复合事件组成的类. 函数 $x(t, \cdot)$ 在 ω 处的值 $x(t, \omega)$ 是试验结果 (t, ω) 所对应的某种观测值，而函数 $x(t, \cdot)$ 本身则以它为 $\mathscr{F}(t)$ 可测的意义下并入 $\mathscr{F}(t)$ 之中，就是说 $\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一个适应过程.

拓扑可测空间的可测集

如果一个可测空间是作为拓扑空间给出的，那么可测集的 σ 代数总是由该空间的 Borel 子集组成的 σ 代数，除非另外指定某个 σ 代数. 特别地，状态空间 $\mathbf{R}$ 总是指可测空间 $(\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R}))$.

2. 循序可测性

如果 I 是 $\mathbf{R}$ 中一个子区间或单点集，我们以 $\mathscr{B}(I)$ 表示 I 的 Borel 子集类. 当 I 为单点集时，$\mathscr{B}(I)$ 由这个单点集与空集组成. 如果函数 $(t, \omega)\longmapsto x(t, \omega)$ 是自可测空间 $(I\times\Omega, \mathscr{B}(I)\times\mathscr{F})$ 到可测空间 $(\Omega', \mathscr{F}')$ 可测的，则称自可测空间

$(\Omega, \mathscr{F})$ 到可测空间 $(\Omega', \mathscr{F}')$ 中的函数族 $\{x(t), t \in I\}$ 是可测的. 但是，当我们研究适应族 $\{x(t), \mathscr{F}(t), t \in \mathbf{R}^+\}$ 时，上述定义常常不够强. 事实上，在考虑适应族时，人们经常希望研究形如 $\{x(t), \mathscr{F}(t), t \leqslant c\}$ 的子族，而且希望对这种子族的分析，特别是对子族的可测性的分析，只依赖涉及到区间 $[0, c]$ 中的参数值的性质. 遗憾的是，既使取 $\mathscr{F} = \bigvee_{t \in \mathbf{R}^+} \mathscr{F}(t)$，族 $\{x(t), t \in \mathbf{R}'\}$ 的可测性也不能推出所述形式的子族是可测的. 如下严格叙述的定义提供了后一种可测性.

假定 $\{x(t), \mathscr{F}(t), t \in \mathbf{R}^+\}$ 是一适应函数族，如果对于 $c \geqslant 0$ 总有 $A \cap ([0, c] \times \Omega) \in \mathscr{B}([0, c]) \times \mathscr{F}(c)$，则称 $\mathbf{R}^+ \times \Omega$ 的子集 A 是循序可测的. 循序可测集组成的类是一个 σ 代数. 适应族称为循序可测的，如果函数 $x(\cdot, \cdot)$ 是自空间 $\mathbf{R}^+ \times \Omega$ 连同循序可测集 σ 代数到 $(\Omega', \mathscr{F}')$ 中可测的，等价地，如果对 $c \geqslant 0$，函数 $x(\cdot, \cdot)$ 在 $[0, c] \times \Omega$ 上的限制是自 $([0, c] \times \Omega, \mathscr{B}([0, c]) \times \mathscr{F}(c))$ 到 $(\Omega', \mathscr{F}')$ 中可测的(按后一种表述方式，集 A 为循序可测的等价条件是，以 $(\mathbf{R}^+, \mathscr{B}(\mathbf{R}^+))$ 为状态空间的适应族 $\{1_A(t, \cdot), \mathscr{F}(t), t \in \mathbf{R}^+\}$ 是循序可测的). 我们指出，尽管没有前面的适应性假设，循序可测性条件蕴含适应性. 容易看到，若 $\{x(t), \mathscr{F}(t), t \in \mathbf{R}^+\}$ 是循序可测的，则对于 $b \geqslant 0$，$\{x(b + t), \mathscr{F}(b + t), t \in \mathbf{R}^+\}$ 也是循序可测的，其证明留给读者. 再者，若 $\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是循序可测的，而 f 是自状态空间 $(\Omega', \mathscr{F}')$ 到可测空间 $(\Omega'', \mathscr{F}'')$ 中的可测函数，那么立即可推出 $\{f(x(\cdot)), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 也是循序可测的，其状态空间为 $(\Omega'', \mathscr{F}'')$.

循序可测性的另一种刻划

继续上段的讨论，定义一个新的过滤 $\mathscr{F}^-(\cdot)$：令 $\mathscr{F}^-(0) = \mathscr{F}(0)$，而 $t > 0$ 时取 $\mathscr{F}^-(t) = \bigvee_{s < t} \mathscr{F}(s)$，并考虑加在自 $(\Omega, \mathscr{F})$ 到 $(\Omega', \mathscr{F}')$ 中的函数族 $\{x(t), t \in \mathbf{R}^+\}$ 上的如下条件：

(a) 此族适应于 $\mathscr{F}(\cdot)$.

(a′) $\mathscr{F}(\cdot)$ 是右连续的.

(b) 对 $c>0$，族 $x(\cdot)$ 在集合 $[0,c[$ 上的限制是 $\mathscr{B}([0,c[)\times\mathscr{F}^{-1}(c)$ 可测的.

注意 (a′) 连同 (b) 蕴含 (a)。现在我们证明,当且仅当 (a) 与 (b) 满足时 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是循序可测的. 为证明 (a) 与(b) 放在一起可推出循序可测性，我们只需指出 $[0,c]\times\Omega$ 的子集 $[0,c[\times\Omega$ 与 $\{c\}\times\Omega$ 都在 $\mathscr{B}([0,c])\times\mathscr{F}(c)$ 之中,且它们二者之并就是前一个集,且在条件 (a) 与 (b) 之下,函数$x(\cdot,\cdot)$ 在两个子集上从而在它们的并集上都是关于 $\mathscr{B}([0,c])\times\mathscr{F}(c)$ 可测的. 反过来说,循序可测性显然蕴含 (a),而且采用可测函数的另一种拼接可证明循序可测性也蕴含 (b).

例 设 $\{x(t),\mathscr{F}(t),t\in\mathrm{R}^+\}$ 是一个适应族，其状态空间是 Polish 空间. 如果样本函数都是右连续或都是左连续的，则这个族是循序可测的. 例如对右连续情形我们定义

$$x_n(t,\omega)=x\left(\frac{jc}{n},\omega\right),\ 若\ (j-1)\frac{c}{n}<t\leqslant j\frac{c}{n},\ 1\leqslant j\leqslant n. \tag{2.1}$$

$x_n(0,\omega)=x(0,\omega)$.

其中 $c>0$. 那么 $x_n(\cdot,\cdot)$ 在 $[0,c]\times\Omega$ 上的限制是 $\mathscr{B}([0,c]\times\mathscr{F}(c)$ 可测的，且有 $\lim_{n\to\infty}x_n(\cdot,\cdot)=x(\cdot,\cdot)$，从而当 $c>0$ 时循序可测的条件满足. 再由族的适应性知 $c=0$ 时条件也满足。左连续情形可类似地处理.

注意如果对任意 $\varepsilon>0$，族 $x(\cdot)$ 在集合 $[0,c]$ 上的限制是 $\mathscr{B}[0,c]\times\mathscr{F}(c+\varepsilon)$ 可测的,那么 (b) 满足. 事实上,由此条件可推知,对 $0<\delta<c$ 这个族在 $[0,c-\delta]$ 上的限制是

$$\mathscr{B}([0,c-\delta])\times\mathscr{F}\left(c-\frac{\delta}{2}\right)\subset\mathscr{B}([0,c[)\times\mathscr{F}^{-}(c)$$

可测的,由此便得 (b). 换句话说，如果对于每个 $\varepsilon>0$ 过程 $\{x(t),\mathscr{F}(t+\varepsilon),t\in\mathrm{R}^+\}$ 是循序可测的,那么适应过程 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是循序可测的.