

高等学校教学用书

爆震原理

Я. В. 澤尔道維奇 著
A. C. 康巴涅茨

高等教育出版社

PDG

高等学校教学用书



爆 震 原 理

Я. Б. 澤尔道維奇 著
A. C. 康巴涅耶茨
徐 华 妨 譯

高教出版社

本書系根據蘇聯國立技術理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版、澤尔道維奇 (Н. В. Зельдович) 与康巴涅耶茨 (А. С. Кампанец) 合著的“爆震原理”(Теория детонации) 一書 1955 年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定為高等學校教學參考書。

書中首先概述了氣體動力學基礎，然後分別闡述無損失的和有損失的爆震的理論，並敘述了濃集爆炸物的爆震和爆震產物的運動。

本書可供高等工業學校動力機械和國防工業類有關專業作教學參考書用，特別是對燃氣輪機專業有參考價值；亦可供高等學校及科學研究機關與高速氣體動力學有關的研究工作者作參考。

2460/15

爆 震 原 理

Н. В. 澤尔道維奇 А. С. 康巴涅耶茨著

徐華舫譯

高等教育出版社出版北京琉璃廠170號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第054號)

京華印書局印刷 新華書店總經售

統一書號15010·621 開本850×1168 1/32 印張7 2/16 字數178,000 印數0001—1,500
1958年2月第1版 1958年2月北京第1次印刷 定價(10) 1.10

序

爆震理論是气体动力学最重要的应用领域之一。自从爆震現象为人所發現之后不久，这种現象便获得以震波理論为基础的正确解釋。按照这种解釋說来，混合气在震波中溫度的提高引起了爆炸性的反应，反应所放出的能量支持爆震波向前推进。这样就建立了爆震的流体动力学理論。对爆震产物的运动作一定的假設(契浦門-儒格^①假設)并从这个假設出發，流体动力学理論才能够解釋爆震波的一个基本性質：在爆炸物(或混合气)的給定初始狀況之下，爆震波的速度是定值。

这里應該指出，关于爆震，除了正确的流体动力学理論之外，長时期以来存在着各种荒誕的解釋，这些解釋都是建立在对于反应傳播機構的錯誤概念上的。目前这些荒誕的企圖已經絕迹了。

爆震的流体动力学理論，在苏联科学院化学物理研究所很成功地發展起来了。有賴于該研究所的工作，契浦門-儒格假設才有了理論根据，按照这条假設，反应完畢时爆震产物中的当地音速恰等于对反应产物而言的爆震速度。亞音速情况之不可能，那是早就証明了的，至于超音速情况之不可能，現在也已弄清楚了，那是与爆震波中进行反应的条件有关系的。

在这个研究所的若干著作中，人們最感兴趣的螺旋爆震現象获得了解釋，这种螺旋爆震現象是發生在爆震極限附近的；还弄清楚了由燃燒轉变为爆震的特征及条件，發現了不常見的在人工粗糙管中爆震推进的情况；还闡明了在光滑管中爆震推进的極限范

① Чипмен-Рюгг.

圍是很狹的，弄清楚了一系列在濃集爆炸物的爆震理論中具有重大意義的事實。

這本書是根據化學物理研究所的研究成果寫出來的第一本有系統的爆震理論書籍。因此本書中的資料引証可能有某些不夠充分的地方。

什理雅賓托赫 (И. Я. Шляпнитоx) 為本書選擇了所引用的實驗數據，並作了解說，沙道夫斯基 (М. А. Садовский) 和阿賓 (А. Я. Апин) 對書中資料的論述提出許多寶貴的批評意見，謹此一併致謝。

Я. 澤爾道維奇, А. 康巴涅耶茨

目 录

序	v
第一章 气体动力学基础	1
§ 1. 震波的基本理論	1
§ 2. 弱震波	9
§ 3. 理想气体中的震波	17
§ 4. 平面一元問題	21
§ 5. 特性綫	26
§ 6. $k=3$ 的情形	35
§ 7. 中心对称問題	40
第二章 無損失的爆震及燃燒	51
§ 8. 爆震波	51
§ 9. 爆震波中化学反应的进行情况	65
§ 10. 化学反应的各种可能推进情况	74
§ 11. 强迫燃点速度之下的燃燒	85
§ 12. 气流中的定型燃燒	93
第三章 有損失的爆震理論以及爆震極限	104
§ 13. 損失对管中爆震波推进的影响	104
§ 14. 損失对管中爆震推进的影响在量的方面的算法	113
§ 15. 有損失爆震的一般問題・热量損失及机械能損失	128
§ 16. 螺旋爆震	135
§ 17. 粗糙管中的爆震	147
§ 18. 正常燃燒到爆震的轉變	152
第四章 濃集爆炸物的爆震	163
§ 19. 濃集爆炸物爆震的通用性	163
§ 20. 爆炸产物狀況方程的精确算法	180
第五章 爆震产物的运动	197
§ 21. 有关爆震产物运动的某些平面一元問題	197
§ 22. 爆震产物飞散的定型二元問題	214
§ 23. 球面扩散爆震波	224
中俄名詞对照表	229

497022

第一章 气体动力学基础

§1. 震波的基本理論

震波^①理論是研究爆震波理論所必需的基础，同时了解爆炸的机械作用上也很重要。

用一个簡單的只用到力学定律的例子，就能得到震波理論的各主要方程。

設有一活塞以等速运动进入一直筒（圖 1），压缩活塞前的液体或气体。任何扰动在介质里傳播都是有一定速度的，所以，在活塞前面必形成一段有限长度的已压缩介质区。圖 1 上，这便是包在活塞与 AA' 面之間的那塊地区。

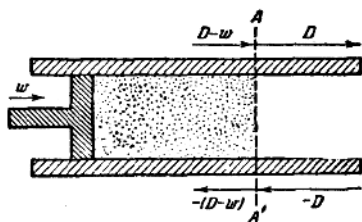


圖 1.

随着活塞的运动， AA' 面將以某个速度 D 对未經扰动的气体而移动。現在我們来找出把速度 D 同活塞移动速度和受压缩介质的热力学性質連系起来的关系式。

我們假定压缩过程进行得很快，快到可以不計气体的热傳导，即可以不計已压缩气体傳給未压缩气体的和傳給筒壁的热量。此外，更不考虑气体的內摩擦。这一点在下列情况下就能成立：筒相当粗大，筒壁对大部分气体的运动沒有很大的影响。

因为我們已把 AA' 相对于筒壁的推进速度記为 D ，所以，如

① 一名冲击波——譯者注。

果記活塞相对于筒壁的速度为 w , AA' 面相对于活塞的速度便是 $D-w$ 。設 t 代表从压缩开始起算的时间, 那末被活塞压缩过的一段介质总长度便是 $(D-w)t$ 。若 Φ 代表筒截面积, 或說活塞面积也完全一样, 那末已压缩过的介质体积便等于 $\Phi(D-w)t$ 。而这些介质原先的体积是等于 ΦDt 的, 因为活塞对筒和未压缩的气体而言, 它的移动距离是 wt (圖 2)。

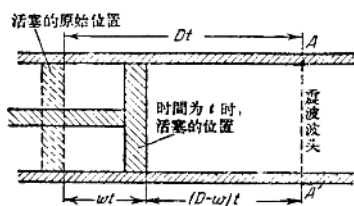


圖 2.

記介质的原始密度为 ρ_0 , 压缩后的密度为 ρ 。那末 t 時間內被活塞压缩过的介质质量便是 $\rho\Phi(D-w)t$, 显然这些质量又等于 $\rho_0\Phi Dt$ 。消去 Φt , 进行压缩时的质量守恒定律便可写成:

$$\rho_0 D = \rho(D-w). \quad (1.1)$$

已压缩过的介质具有活塞的速度 w , 这个速度絕不等于压缩区边界 AA' 相对于未压缩介质的推进速度。所以, $\rho_0 D\Phi t$ 这些质量一旦进入压缩过后的状况, 便具有了速度 w 。按牛顿第二定律, 质量乘速度变量便等于冲量, 即等于力乘作用时间。記已压缩介质的压强为 p , 未压缩介质的压强为 p_0 。則作用在活塞与 AA' 面之間那塊质量上的合力便等于 $(p-p_0)\Phi$, 而 t 時間內的冲量便是 $(p-p_0)\Phi t$ 。

$$\text{由此得} \quad \rho_0 Dw = p - p_0. \quad (1.2)$$

由 (1.1)(1.2) 兩方程就可以求出 D 和 w 的表达式。首先从 (1.1) 得

$$w = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} D. \quad (1.3)$$

因为密度 ρ 大于密度 ρ_0 , 由 (1.3) 方程可見, D 与 w 的指向是相同

的。而如果活塞的动作是使气体膨胀的，即运动方向与圖 1° 上所画的箭头相反，那末 w 与 D 的指向便相反了。对这种情形需要作特别研究，因为这样一来，运动的特性本身就改变了（参看 § 2）。这相当于所謂膨胀波。现在把 v 的式子代入 (1.2)，得：

$$D^2 = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{p - p_0}{\rho - \rho_0}, \quad (1.4)$$

$$w^2 = (p - p_0) \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right). \quad (1.5)$$

有时把密度改用單位質量的体积——比容 $v = \frac{1}{\rho}$ 来表示比較方便些；于是上兩式就成为

$$D^2 = v_0^2 \frac{p - p_0}{v_0 - v}, \quad (1.6)$$

$$w^2 = (p - p_0)(v_0 - v). \quad (1.7)$$

把这两个式子开方时， D 与 w 应取同号。

现在来写能量方程。

因为气体沒有放热出去，也沒有吸热进来，它的全部能量的变化自应等于外界对它所做的功。設 E_0 代表气体單位質量所具有的原始內能（有时称为热能）， E 代表已压缩气体單位質量的內能。已压缩气体單位質量的动能是 $\frac{w^2}{2}$ 。整个已压缩气体的質量等于 $\rho_0 D \Phi t$ ，所以在压缩时，气体能量的全部变化等于 $\rho_0 D \Phi t \left(E + \frac{w^2}{2} - E_0 \right)$ 。这个量应等于同一 t 時間内外力对气体所做的功。这份功是活塞做的，它以 $p \Phi$ 力对气体作用，走了距离 wt 。

所以，能量方程是这样的：

$$\rho_0 D \left(E + \frac{w^2}{2} - E_0 \right) = p w. \quad (1.8)$$

现在按 (1.3) 公式通过 D 来表示 w 。此外，最好把方程中的密度用比容代替，并用 (1.7) 式来表示 w^2 。这样使得

$$E - E_0 = \frac{p + p_0}{2}(v_0 - v). \quad (1.9)$$

有一点是很明显的：气体的能量变化与初始压强及最后压强的平均值成正比。这一点，在决定弱震波的不可逆程度时，是极重要的（参看 § 2）。

除能量外，往往用到所谓焓或热函数这个物理量，这个量和能量的关系如下：

$$H = E + pv. \quad (1.10)$$

按(1.9)和(1.10)两式，焓的变化是这样一公式子：

$$H - H_0 = \frac{v + v_0}{2}(p - p_0). \quad (1.11)$$

只要知道介质的热力学性质，就能把能量 E 表为压强和比容的函数， $E = E(p, v)$ 。把这个函数关系代入(1.9)，使得 (p, v) 面上一条曲线的方程。这条曲线以初始比容及初始压强为其参数。显然，这条曲线必经过 p_0, v_0 点，这是因为把 $p = p_0, v = v_0$ 代进去，必使(1.9)变为恒等式（可参看 § 3；(3.8)）。这条曲线称为雨贡纽（Гюгонно）绝热线。这条曲线说明从给定的初始状况 p_0, v_0 起，气体通过 AA' 面时用一次压缩的办法能达到哪些状况。介质的密度和比容在 AA' 面上发生了突跃的变化。这种压缩称为突跃压缩，而 AA' 面即是震波。

不要以为这样的一种压缩过程是沿雨贡纽绝热线进行的。恰恰相反，受突跃压缩的气体显然并不经过雨贡纽绝热线上那些点所代表的 p, v 面上一系列状况（参看后文）。雨贡纽绝热线所给的是在已知初始状况 p_0, v_0 之下，全部可能的压缩终止状况 p 和 v 。

如果把突跃压缩过程分为两步：由 p_0 开始，先到 p' ，然后再由 p' 到 p ，第二个波上介质的压强突跃是 $p - p'$ ，这个波是在已被压缩突跃为 $p' - p_0$ 的波所压缩过的介质中进行的，则第二个波的初始状况便是 p', v' ，这个 v' 是经过第一波压缩过后的比容。但过 p', v'

点并以該点为初始狀況的一条雨貢紐絕热綫与那条以 p_0, v_0 为初始狀況的雨貢紐絕热綫是并不重合的。因此，經第二个震波压缩后的終了比容 v'' ，一般說来并不等于 v ，而是小于 v 的，这个 v 是用压强突躍为 $p-p_0$ 的一个震波把介質压缩到的比容值。

所以，突躍压缩和等熵压缩①是大不相同的。作等熵压缩时，終了狀況与过程分几步来进行是完全沒有关系的，而只决定于初始狀況和压强的全部变化。可見，等熵压缩是可逆的，而突躍压缩則是不可逆的。

在推导(1.4)，(1.5)，(1.9)和(1.11)諸方程时，对于受压缩介質的性質并沒做任何的假設。在把这些方程用于具体的介質之前，我們且將这些方程用另一种更概括些的方法表示出来。

我們把某种物理量的密流，規定为單位質量的該物理量乘以介質的密流。介質密流的本身便等于密度 ρ 乘介質的流速。这就是單位時間內流过与速度方向相垂直的一塊單位面积(1平方厘米)的質量流量。动量密流的算法与此类似。也就是說，因为質量 m 的动量是質量乘速度，所以單位質量的动量就等于速度。而單位時間內通过与流速方向相垂直的一塊單位面积(1平方厘米)的質量在数值上等于速度乘密度。那末，这些質量所具有的动量便等于質量乘速度的平方了。总起来說，任何一种物理量的密流必等于介質的密流 ρw 乘單位質量的該种物理量。

現在把密流的概念用到 AA' 面的运动上去。后面要証明到的是：在这个面的兩边極貼近它，可以划两个控制面，气体的密度和速度的整个变化是在这两个控制面之間極窄的地帶中进行的。如果不要詳細研究，这些物理量怎样从位于已压缩气体中的左側控制面上的情况，变到位于未压缩气体中的右側控制面上的情况，那末，整个的变化过程便可以看作是密度、压强和速度等突躍变化的

① 我們不把等熵压缩称为絕热压缩，以免与雨貢紐絕热綫相混淆。

推进。这种突躍，上面已經說过，称为震波。

圖 1 上表示一种最簡單的得到震波的方法。震波的一切方程都可以簡單地从質量、动量和能量三守恒定律推出来，办法是把这三条定律直接用于通过突躍兩側控制面的那些介質。

仍和以前一样，把波的推进速度記为 D 。最好把坐标系改变一下，取作与波一同运动，这样比較方便。对这一坐标系而言，未經扰动的介質速度便是 $-D$ （圖 1 下面的箭头），而已压缩介質的速度是 $-(D-w)$ 。于是通过右側控制面的介質密流等于 $-\rho_0 D$ ，而通过左側控制面的介質密流是 $-\rho(D-w)$ 。使这两个值相等，便又得方程(1.1) $\rho_0 D = \rho(D-w)$ 。

右边的动量密流等于 $\rho_0 D \cdot D = \rho_0 D^2$ ，左边的等于 $\rho(D-w)^2$ 。所以，單位時間內兩控制面之間的动量变化就是这两个值之差。按牛頓第二定律这个差應該等于作用力，即等于左右兩边的压强差 $p - p_0$ 。所以，对运动坐标系說来，(1.2) 方程成这样

$$\rho_0 D^2 - \rho(D-w)^2 = p - p_0. \quad (1.12)$$

不难看出，这个方程同(1.1)一起就完全等于(1.2)方程，而且由这两个方程解 D 和 w 还是得(1.4)和(1.5)兩式。

方程(1.12)可以看作是 $\rho_0 D^2 + p_0$ 这个量在震波中的守恒关系。从这个方程的推导方法本身看得出，这个方程可以用于任何一个控制面，与控制面所在的位置無關。

关于能量守恒定律的式子也可以用同样的論述得出来。

按能量密流的定义，我們看到，从右边进去的能量是 $\rho_0 D \left(E_0 + \frac{D^2}{2} \right)$ ，而从左边出来的能量是 $\rho(D-w) \left[E + \frac{(D-w)^2}{2} \right]$ ，兩控制面之間的能量变化必等于外力所做的功。單位時間內作用在單位面积上的功，等于作用在單位面积上的力（即压强）乘單位時間內的移动距离（即速度）。因此在右側控制面上功是 $-p_0 D$ ，而在

左侧控制面上功是 $p(D-w)$ 。右侧功的負号表示这是已压缩介质对未压缩介质所做的功。这样,我們便得到能量平衡关系:

$$\rho_0 D \left(E_0 + \frac{D^2}{2} \right) - \rho (D-w) \left[E + \frac{(D-w)^2}{2} \right] = p(D-w) - p_0 D. \quad (1.13)$$

这个方程与(1.8)是等价的,这只要用上面(1.1)和(1.2)兩式就很容易証明。这个方程显然可以表为下列的物理量守恒律:

$$E_0 + \frac{D^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} = E + \frac{(D-w)^2}{2} + \frac{p}{\rho}. \quad (1.14)$$

用焓来表示的同一条守恒律可以写为:

$$H_0 + \frac{D^2}{2} = H + \frac{(D-w)^2}{2}. \quad (1.15)$$

从这个式子很容易导出(1.9)至(1.11)各式。

(1.14)和(1.15)兩方程是在与波一起运动的坐标系上导出来的。在这种坐标系上,运动是定常的。而在定常运动下,柏努利定理总是应该成立的,按柏努利定理,單位質量的焓与动能二者之和应守恒。这就是方程(1.15)。在固定坐标系上,震波当然就不是定常运动了,柏努利定理就不能用。

按上面这样来考虑通过两个控制面的气流,所得到的結論使我們多少得以从另一方面来看震波中的各种守恒律。我們無論在什么地方都不需要把左侧控制面放在已压缩介质中很远的地方,远到那里的密度和压强都已达到标志突躍强度的最大值。我們可以把(1.1), (1.12), (1.13) 三方程用于过渡区中任何一个面,以及右边未扰动区中任何一个未起变化的面,把这两个面看作控制面。不过这时, p 所代表的就不是仅为状况方程所决定的靜压强,而是某一种动压强了,这种动压强决定于介质在突躍压缩中状况的变化方式,这是不可逆过程所特有的。在这里,压强的力学定义,即压强是作用在單位面积上的力,指向与面积相垂直这个定义,当

仍旧有效,因为牛顿第二定律中的力就是按这个定义用的。

所以,如果我们赋予方程(1.12)中的压强 p 以纯力学的意义的话,那末(1.4), (1.5), (1.6), (1.7)各式对于任何一对控制面都是可用的。但如果像我们所假定的那样波是定常的话,那末, D 值对于任何控制面说来都是同一数值,因而震波中比容便与压强成直线关系变化,它由初始的 v_0 降为 v [参看(1.6)式]。在 (p, v) 图线上,这就得到一条通过给定的 p_0, v_0 点的直线。这时,代表震波中能量变化的(1.9)式便有了一种简单的几何意义,它就是以 p 和 p_0 为上

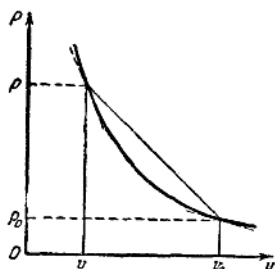


圖 3.

下底,以 $v_0 - v$ 为高的一块梯形的面积(圖 3)。因此,如果 p 是指总共的力学压强,即包括静压和非静压两部分,那就有这样一个关系存在: $dE = -pdv$ ①。

非静压部分是这样来的: 气体比容和其他的热力学量的变化不是无限缓慢,而是具有一定速度的。这时,压强便不仅决定于比容的瞬间值,而且还决定于比容怎样随时间变化的全部过程。例如,如果比容的变化不是太快的话,压强便决定于比容的瞬间值,并决定于比容的变化速率。此外,如果压强不是静压强的话,那末就不能认为它与作用面的方向无关,即巴斯卡定律不成立。

但是,不管震波推进时所发生的是个怎样的不可逆过程,只要给定震波的速度,那末初始状况和终了状况便是完全互相决定的。

① 在泽尔道维奇(И. В. Зельдович)著的“震波原理及气体动力学引论”(苏联科学院出版社, 1946)一书第 89 页上说到,在某些情况下,压强 p 并不随 v 作直线变化。这时 p 便只是指静压强部分,这个值为热力学各量的瞬间值所决定。

这两种状况之間只用三条守恒定律来联系。

如果震波的波幅很小,即如果密度、压强及其他各量的突躍值与这些量在未扰动介质中的原来数值相比都是很小的,那末过渡区中的过程动力学就可以利用粘性和热传导的概念来进行研究。这时发现,气体中过渡区的厚度比分子自由路程的长度大得多了;这就肯定了利用宏观的粘性值及热导率值是正确的。如果震波很强的话,全部突躍过程是在一个分子自由路程这样一个长度内完成的,这从流体动力学观点看来,震波的厚度便等于零。而宏观的方程,只有在各物理量的平均值在一个分子自由路程之内的变化是微不足道的时候,才能用。

但是,不管决定定常震波中压强的那个不可逆过程的机构是什么样的,总之合压强必符合 (p, v) 图綫上的直綫关系。这是質量守恒和动量守恒兩定律的必然結果。

在震波之后的終了边界控制面上,压强是純靜压强,可以說能量和焓都只是 p, v 的函数。知道了介质的热力学性質之后,就可以把这两个函数代入方程(1.9)和方程(1.11)。这时,如前述,在 (p, v) 图綫上使得到所謂雨貢紐絕热綫。曲綫上凡是大于 p_0 的点都各代表一个定常的震波,这是由給定的 p_0 和 v_0 出發所能得到的一切可能震波。

至于說到圖 3 上所画的弦綫,那圖上的 p 是指的总压强。要把靜压部分从总压强里分出来,一般是困难的。

§ 2. 弱震波

这一节里要研究的是波幅小到極限的震波,其中压强变化的相对值是不大的: $p - p_0 \ll p_0$, 比容变化也不大, $v_0 - v \ll v_0$ 。对于这种波,方程(1.9)中的一切差值都可以代以微分,而 $\frac{p + p_0}{2}$ 可以

代以压强的平均值, 这个平均值完全可以重新記为 p_0 。于是方程 (1.9) 变成 $dE = -p dv$ 。而一般說来, $dE = T dS - p dv$, 这里的 S 是熵, 由此可見, 在波幅够小的震波里, $dS = 0$, 即这种波是等熵的。

其实, dS 是与压强突躍的三阶無穷小成正比的, $dS \sim (dp)^3$ ①。关于 dS 的估算后面还要詳細講到。

在 (p, v) 面上, 代表等熵的曲綫我們永远称为等熵綫②。

p 与 v 之間的等熵关系方程是一个單值关系式。因此在極弱的震波, D^2 的 (1.6) 式就应改写为

$$D^2 = -v_0^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s. \quad (2.1)$$

而右側的数值不是別的, 正就是未扰动介質中的音速平方 c_0^2 。因此, 弱到了極限的弱震波, 其速度便与波幅無关了。

由方程 (1.7) 可見, 弱震波中介質微团的移动速度 w 是与相对突躍值的一阶無穷小成正比的, 这是因为

$$p - p_0 = - \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s (v - v_0) = - \frac{c_0^2}{v_0^2} (v - v_0),$$

$$\text{由此} \quad w = \frac{c_0}{v_0} (v_0 - v) = \frac{c_0}{\rho_0} (\rho - \rho_0). \quad (2.2)$$

对于 $(p - p_0)$ 也得类似的式子, 只要用 w 表 $v_0 - v$ 即得

$$p - p_0 = \frac{c_0 w}{v_0}. \quad (2.3)$$

在現在这种問題上我們滿可以簡單地以 c, v 及 p 代替 c_0, v_0 及 $p - p_0$, 而把下标 0 留給后面用。这里要再一次指出, (2.1), (2.2), (2.3) 三个式子只适用于弱波。

① 参看 Я. Б. 澤尔道維奇著: “震波原理及气体动力学引論”, 苏联科学院出版社, 1946。

② 这种曲綫通常称为泊松(Poisson)絕热綫; 我們这里采用“等熵”这个术语, 为的是免得泊松絕热綫和雨貢紐絕热綫兩名詞相混。

現在我們來推演弱震波中 D 的表达式, 精确度要达到把介質运动速度的一阶無穷小項包括进去。

在圖 3 上的 (p, v) 和 (p_0, v_0) 兩点, 作兩貫紐絕热綫的兩切綫 (虛綫)。在很短一段上, 絕热曲綫可代以一条对称于該兩点的拋物綫, 而这样一条拋物綫的割綫之斜率便等于兩端点上兩切綫之斜率的平均值。因为按假定, 波是弱波, 所以它只占絕热綫上很短的一段, 而可以用拋物綫去代替。因而

$$\frac{p - p_0}{v_0 - v} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial p}{\partial v} + \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_0 \right].$$

現在通过两个音速 $\frac{c^2}{v^2}$ 和 $\frac{c_0^2}{v_0^2}$ 来表示 $-\frac{\partial p}{\partial v}$ 和 $-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_0$ 。上式右側就变成

$$\begin{aligned} \frac{1}{2v_0^3} \left(c^2 \frac{v_0^2}{v^2} + c_0^2 \right) &= \frac{1}{2v_0^3} \left(c^2 \frac{D^2}{(D-w)^2} + c_0^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2v_0^3} \left[\frac{(c+c_0)^2}{2} + w(c+c_0) \right]. \end{aligned}$$

这里我們用到了这样一点, 即差值 $c^2 + c_0^2 - \frac{1}{2}(c+c_0)^2 = \frac{1}{2}(c-c_0)^2$ 是二阶無穷小, 并且 w 是一阶無穷小, 因而在 w 为一阶無穷小之下系数的精确度也可以选用到一阶無穷小。把原来等式的左側表为 $\frac{D^2}{v_0^3}$, 并开方, 就以同一精确度得到:

$$D = \frac{c+c_0+w}{2} \quad (2.4)$$

重要的是, 在推导这个公式时, 只用了質量守恒律和动量守恒律。

这里所推得的弱波式子使我們得以了解一定波幅的震波是怎样形成的。为此, 我們再来看看用活塞做的实验。

假定活塞的运动是逐漸加速的, 起先以極小的速度 w 运动, 这

① 这个式子是蘭道 (Л. Д. Ландау) 在推导弱波的波幅变化規律时發現的。参看应用数学及力学杂志, 9, 286 (1944)。