数学物理引论

[美] C. 哈普尔 著

科学出版社

数学物理引论

〔美〕C. 哈普尔 著

肖布森　黄福元　卢民强 译

科学出版社

1981

内 容 简 介

本书主要为具备微积分基础知识的大学生提供学习经典力学和量子力学、电磁学、统计热力学、狭义和广义相对论以及其它物理领域、化学、应用数学与工程学所需的大部分数学预备知识. 全书共分九章，内容包括：矢量分析、算子与矩阵分析、复变函数、微分方程、傅里叶级数及变换、张量分析等. 本书适合大学高年级学生和有关学科的科技工作者学习和参考.

本书由南京工学院肖布森、黄福元、卢民强三同志译，经梁昆淼同志校订.

C. Harper

INTRODUCTION TO MATHEMATICAL PHYSICS

Prentice-Hall, 1976

数学物理引论

〔美〕C. 哈普尔 著

肖布森 黄福元 卢民强 译

责任编辑 张鸿林 张启男

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981 年 12 月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1981 年 12 月第一次印刷 印张：10 5/8

印数：0001—10,000 字数：237,000

统一书号：13031·1735

本社书号：2371·13—1

定价： 1.65 元

序　　言

本书的主要目的是为那些具备微积分演算知识的大学生，提供学习(1)经典和量子力学、(2)电磁学、(3)统计热力学、(4)狭义和广义相对论以及其他物理领域、化学、应用数学与工程学所需的大部分数学预备知识. 书中内容的选择系根据我的判断，即认为这些内容对学习上述课程的学生来说是必需的，而且还根据这些内容在物理应用中经常出现的程度.

虽然我力求做到正确地介绍这些材料，但并不企图做到绝对严谨. 书中所包含的证明(从数学家的观点来看)多半是尚属可取的论证. 我们认为，那些打算在自然科学或应用数学方面从事高深工作的学生，将学习更高深的数学和数学物理.

书中所包含的例题是从普通物理中选出来的，或者是从基本原理引伸出来的. 应把每章末的习题看成该章的一个必不可少的部分，另外，这些习题有时用来自成体系地传授新知识.

我感谢 R. K. Cooper 教授提出一些有益的建议并对书中一些内容作了启发性讨论. 我亦感谢 R. K. Cooper 教授、R. H. Good 教授和 J. C. Giles 教授为本书校阅样稿.

加利福尼亚，海沃德　　　　　　　　C. 哈普尔

目　　录

序言

第一章　矢量分析……………………………………………………1

1.1　引言……………………………………………………1

1.1.1　术语的定义……………………………………………1

1.1.2　基本概念与记号………………………………………2

1.1.3　不用坐标系的矢量加法………………………………2

1.2　基矢量的笛卡儿坐标系…………………………………4

1.2.1　标准正交基……………………………………………4

1.2.2　位置矢量(矢径)………………………………………4

1.2.3　矢量的正交分解………………………………………5

1.2.4　方向余弦………………………………………………6

1.2.5　用坐标系的矢量代数…………………………………7

1.3　矢量函数的微分…………………………………………12

1.3.1　矢量的导数……………………………………………12

1.3.2　梯度的概念……………………………………………15

1.4　矢量函数的积分…………………………………………19

1.4.1　线积分…………………………………………………19

1.4.2　高斯散度定理…………………………………………22

1.4.3　格林定理………………………………………………26

1.4.4　斯托克斯旋度定理……………………………………28

1.4.5　两个有用的积分关系式………………………………30

1.5　常用的矢量关系式………………………………………33

1.5.1　含▽算子的关系式……………………………………33

1.5.2　其他矢量关系式………………………………………33

1.5.3 某些重要的物理方程 …… 34
1.6 广义坐标系 …… 35
1.6.1 广义曲线坐标系 …… 35
1.6.2 正交曲线坐标系 …… 37
1.6.3 正交曲线坐标系中的梯度 …… 38
1.6.4 正交曲线坐标系中的散度和旋度 …… 38
1.6.5 正交曲线坐标系中的拉普拉斯算子 …… 39
1.6.6 平面极坐标系 (r, θ) …… 40
1.6.7 右手圆柱坐标系(ρ,ϕ,z) …… 40
1.6.8 球极坐标系 (r, θ, ϕ) …… 41
1.7 习题 …… 43
第二章 算子与矩阵分析 …… 48
2.1 引言 …… 48
2.2 矢量空间初步 …… 48
2.2.1 矢量空间的定义 …… 48
2.2.2 线性相关 …… 49
2.2.3 矢量空间的维数 …… 50
2.2.4 内积 …… 50
2.2.5 希尔伯特空间 …… 51
2.2.6 线性算子 …… 51
2.3 矩阵分析和记号 …… 53
2.4 矩阵运算 …… 54
2.4.1 加法(减法) …… 54
2.4.2 乘法 …… 54
2.4.3 除法 …… 56
2.4.4 矩阵的导数 …… 57
2.4.5 矩阵的积分 …… 57
2.4.6 分块矩阵 …… 57
2.5 任意矩阵的性质 …… 58
2.5.1 转置矩阵 …… 58

2.5.2 复共轭矩阵 …… 58
2.5.3 埃尔米特共轭矩阵 …… 58
2.6 特殊方阵 …… 59
2.6.1 单位矩阵 …… 59
2.6.2 对角矩阵 …… 59
2.6.3 降秩矩阵 …… 60
2.6.4 余因子矩阵 …… 60
2.6.5 伴随矩阵 …… 60
2.6.6 自伴矩阵 …… 61
2.6.7 对称矩阵 …… 61
2.6.8 反对称矩阵 …… 61
2.6.9 埃尔米特矩阵 …… 62
2.6.10 酉矩阵 …… 62
2.6.11 正交矩阵 …… 62
2.6.12 矩阵的迹 …… 63
2.6.13 逆矩阵 …… 63
2.7 线性方程组的解 …… 64
2.8 本征值问题 …… 65
2.9 坐标变换 …… 68
2.9.1 二维旋转 …… 68
2.9.2 三维旋转 …… 69
2.10 习题 …… 71
附录：行列式初步 …… 75
第三章 复变函数 …… 81
3.1 引言 …… 81
3.2 复变数与表示 …… 81
3.2.1 代数运算 …… 82
3.2.2 阿根图：矢量表示 …… 83
3.2.3 复共轭 …… 84
3.2.4 欧拉公式 …… 87

3.2.5 棣美弗定理 ………………………………………… 88
3.2.6 复数的 n 次方根或 n 次幂 …………………………… 88
3.3 复变解析函数 …………………………………… 90
3.3.1 $f(Z)$的导数和解析性 ……………………………… 90
3.3.2 调和函数 ………………………………………… 92
3.3.3 围道积分 ………………………………………… 93
3.3.4 柯西积分定理 …………………………………… 94
3.3.5 柯西积分公式 …………………………………… 96
3.3.6 积分号下求导 …………………………………… 97
3.4 级数展开式 ……………………………………… 98
3.4.1 泰勒展开式 ……………………………………… 98
3.4.2 罗朗展开式 ……………………………………… 101
3.5 习题 ……………………………………………… 108
附录：级数初步 ……………………………………… 110
第四章 留数计算 ………………………………… 114
4.1 零点 ……………………………………………… 114
4.2 孤立奇点 ………………………………………… 115
4.3 留数计算 ………………………………………… 117
4.3.1 m 阶极点 ……………………………………… 117
4.3.2 单极点 …………………………………………… 119
4.4 柯西留数定理 …………………………………… 124
4.5 柯西主值 ………………………………………… 125
4.6 定积分计算 ……………………………………… 127
4.6.1 $\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$ 型积分 ……………… 127
4.6.2 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 型积分 ……………………………… 128
4.6.3 关于约当引理的附带说明 ……………………… 130
4.6.4 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}dx$ 型积分 ………………………… 131

4.7 色散关系式 …………………………………… 133
4.8 几何表示 …………………………………… 135
4.8.1 引言 …………………………………… 135
4.8.2 保角变换(映射) …………………………………… 136
4.9 习题 …………………………………… 140
第五章 微分方程 …………………………………… 144
5.1 引言 …………………………………… 144
5.2 常微分方程 …………………………………… 144
5.2.1 一阶变系数齐次和非齐次方程 …………………………………… 145
5.2.2 叠加原理 …………………………………… 152
5.2.3 二阶常系数齐次方程 …………………………………… 153
5.2.4 二阶常系数非齐次方程 …………………………………… 157
5.2.5 二阶变系数非齐次方程 …………………………………… 159
5.2.6 二阶变系数齐次方程 …………………………………… 162
5.3 偏微分方程 …………………………………… 167
5.3.1 引言 …………………………………… 167
5.3.2 物理学中某些重要的偏微分方程 …………………………………… 168
5.3.3 直接积分法举例 …………………………………… 170
5.3.4 分离变量法 …………………………………… 172
5.4 习题 …………………………………… 173
第六章 数学物理中的特殊函数 …………………………………… 184
6.1 引言 …………………………………… 184
6.2 埃尔米特多项式 …………………………………… 184
6.2.1 力学中的基本运动方程 …………………………………… 184
6.2.2 一维线性谐振子 …………………………………… 185
6.2.3 埃尔米特微分方程的解 …………………………………… 187
6.3 勒让德多项式和缔合勒让德多项式 …………………………………… 193
6.3.1 球谐函数 …………………………………… 193
6.3.2 方位角方程 …………………………………… 195

6.3.3 勒让德多项式 …………………………………… 196
6.4 有心力问题 …………………………………… 205
6.4.1 引言 …………………………………… 205
6.4.2 拉盖尔多项式 …………………………………… 205
6.4.3 两个可以化为拉盖尔方程的方程 …………………… 208
6.5 贝塞耳函数 …………………………………… 210
6.5.1 引言 …………………………………… 210
6.5.2 贝塞耳方程的解 …………………………………… 212
6.5.3 贝塞耳方程的各种解的分析 …………………… 217
6.5.4 诺伊曼函数 …………………………………… 218
6.5.5 汉克尔函数 …………………………………… 218
6.5.6 修正贝塞耳函数 …………………………………… 219
6.5.7 球贝塞耳函数 …………………………………… 219
6.5.8 各种贝塞耳函数的特征 …………………………… 220
6.5.9 某些其它的特殊函数 …………………………… 225
6.6 习题 …………………………………… 227
附录：$P_l(W)$ 与 $P_l^m(W)$ 之间的关系 …………………… 230
第七章 傅里叶级数 …………………………………… 234
7.1 引言 …………………………………… 234
7.1.1 傅里叶余弦与正弦级数 …………………………… 235
7.1.2 区间的变更 …………………………………… 236
7.1.3 傅里叶积分 …………………………………… 237
7.1.4 傅里叶级数的复数形式 …………………………… 237
7.2 广义傅里叶级数与狄拉克 δ 函数 …………………… 245
7.3 傅里叶级数的和 …………………………………… 248
7.4 吉布斯现象 …………………………………… 250
7.5 傅里叶级数的若干性质摘要 …………………… 253
7.6 习题 …………………………………… 253
第八章 傅里叶变换 …………………………………… 258

8.1 引言 …… 258
8.2 傅里叶变换理论 …… 258
8.2.1 复傅里叶变换的形式推导 …… 258
8.2.2 余弦变换与正弦变换 …… 260
8.2.3 多维傅里叶变换 …… 262
8.2.4 导数的变换 …… 262
8.2.5 卷积定理 …… 265
8.2.6 巴塞瓦关系式 …… 267
8.3 量子力学中的波包 …… 278
8.3.1 问题的由来：能量的量子化 …… 278
8.3.2 新量子论的发展 …… 279
8.3.3 粒子的波动方程：波包 …… 280
8.4 习题 …… 286
第九章 张量分析 …… 289
9.1 引言 …… 289
9.1.1 记号 …… 289
9.1.2 张量的秩与其分量数目 …… 290
9.2 线性空间中的坐标变换 …… 290
9.3 逆变与协变张量 …… 292
9.3.1 一秩张量(矢量) …… 292
9.3.2 高秩张量 …… 293
9.3.3 对称与反对称张量 …… 294
9.3.4 极矢量与轴矢量 …… 294
9.4 张量代数 …… 295
9.4.1 加法(减法) …… 295
9.4.2 乘法(外积) …… 295
9.4.3 并缩 …… 296
9.4.4 内积 …… 296
9.4.5 商定则 …… 296
9.5 线元 …… 298

9.5.1 基本度规张量 …………………………………… 298
9.5.2 相伴张量 …………………………………… 299
9.6 张量微积分 …………………………………… 300
9.6.1 克里斯托弗尔符号 …………………………………… 301
9.6.2 张量的协变微分 …………………………………… 302
9.6.3 测地线方程 …………………………………… 307
9.6.4 黎曼-克里斯托弗尔张量 …………………………………… 310
9.7 习题 …………………………………… 312
附录 A：克里斯托弗尔符号的变换法则 …………………………………… 314
附录 B：变分法初步 …………………………………… 316

第一章 矢量分析

1.1 引 言

1.1.1 术语的定义

在含有物理量的有意义的表示式和方程中，各项的量纲[1)]（基本量的各种幂）必须相同．在力学中，我们将基本物理量规定为长度 L、质量 M 和时间 T．例如，3 公里/分 + 7 厘米/秒，是一个有意义的表示式，因为每项的量纲都是长度/时间，即 L/T．此外，了解所有物理量可归类为张量，这也是重要的．

一个用其大小就能完全确定的张量称为**标量**（零秩张量）．这里所说的大小是指一个数和一个单位（对于无量纲的量，只要一个数就够了）．“6 米”是一个标量，因为 6 是数，米是单位．下列这些量是标量的例子：质量、体积、密度、能量和温度．标量适合的代数运算与通常的数的运算相同．

一个用其大小和一个方向就能完全确定的张量称为**矢量**（一秩张量）．量“向西 6 米”是一个矢量，因为它有大小（6 米）和一个方向（向西）．在第九章中，我们将根据（坐标）变换性质给出标量和矢量的一般定义．本章中我们只研究一秩张量（矢量分析）．下列这些量是矢量的例子：位移、速度、加速度、力和力矩．我们有必要导出矢量代数和矢量微积分的一些法则，因为一般来说，矢量运算和标量运算是不同的．矢量分

1) 某些物理量如摩擦系数是没有量纲的．角度是几何量而不是物理量．

析这一课题是在 1880—1882 年间由吉布斯(J. Willard Gibbs 1839—1903) 发展起来的.

1.1.2 基本概念与记号

矢量在本书中用粗体字母表示: $\boldsymbol{A}$. 注意，矢量的大小 $|\boldsymbol{A}| = A$ 是一个标量. 大小为零的矢量称为**零矢量**，而大小为 1 的矢量 ($|\boldsymbol{B}| = 1$) 称为**单位矢量**. 在这一章中，字母上方加符号 ^ 表示单位矢量. 例如，$\hat{\boldsymbol{B}}$ 表示它所代表的物理量的大小为 1，即 $|\hat{\boldsymbol{B}}| = 1$.

在图 1.1 中，用一箭矢表示矢量. 箭头指示矢量的方向，而箭矢的长度表示矢量的大小.

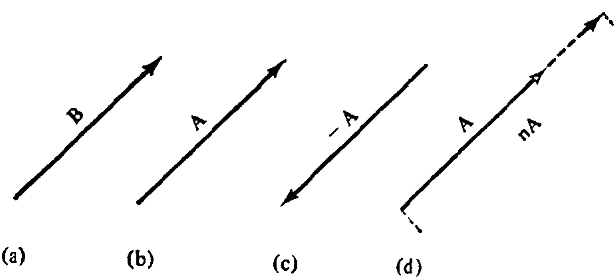

图 1.1

矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ (图 1.1) 被说成相等，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$，是因为它们有相同的长度和方向；但是它们可以不等效. 研究力学时需要了解矢量等效的概念. 为了达到等效，这些矢量必须产生同样的力学效果.

矢量 $-\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{A}$ 大小相等而方向相反. 图 1.1(d) 中表示的是一个矢量乘以一个标量 n，即 $n\boldsymbol{A}(=\boldsymbol{A}n)$.

1.1.3 不用坐标系的矢量加法

运用下列规则可以完成矢量的几何相加: (1) 将这些矢

量首尾相接;(2)从第一个矢量之尾到最后一个矢量之首画一矢量. 这个矢量就是**合成矢量**，即矢量**和**. 这个过程表示在图 1.2—1.4 中. 对任意多个矢量的相加也是显然的. 此外，矢量相减的方法不必多讲,因为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

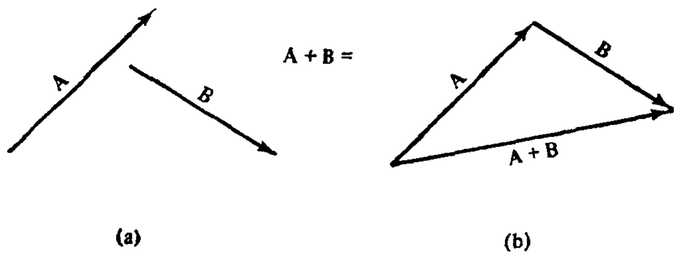

图 1.2

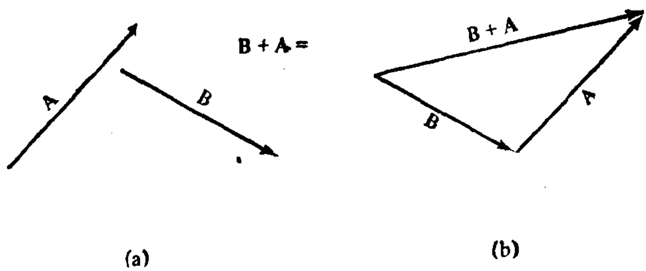

图 1.3

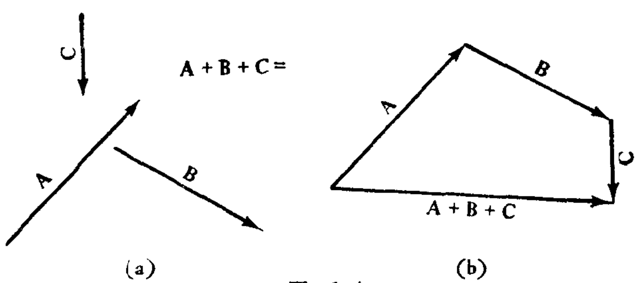

图 1.4

图 1.5 表示减法运算,图 1.6 指明加法的交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$, 以及结合律 $(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{C}+(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{E})$.

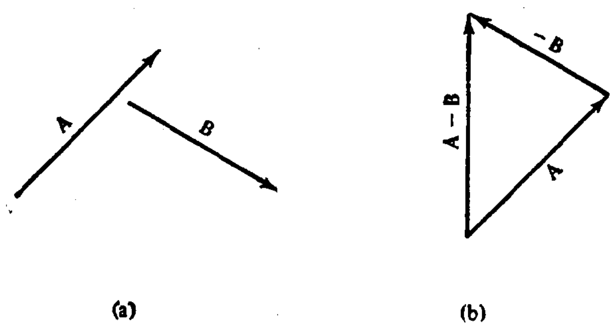

图 1.5

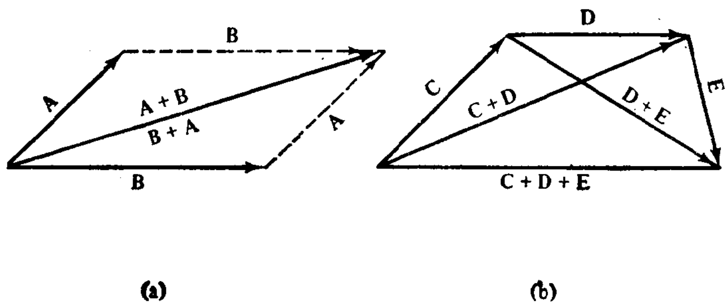

图 1.6

1.2 基矢量的笛卡儿坐标系

1.2.1 标准正交基

三维矢量空间(见第二章)的正交基是一组三个相互垂直的矢量. 在图 1.7 中,$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 是相互垂直的单位矢量,从而构成标准正交基. 这个坐标系称为**笛卡儿**（Descartes 1596—1650）**坐标系**.

1.2.2 位置矢量(矢径)

一个物体的**位置**由它的位置矢量（有时称**矢径**）完全确

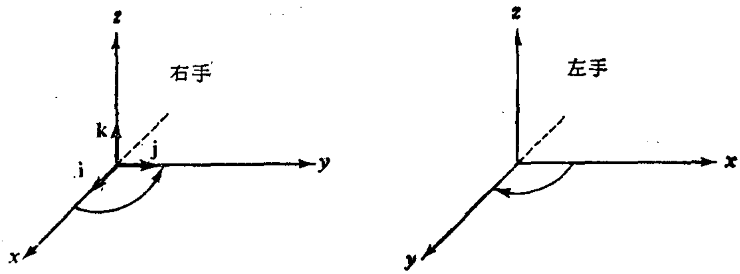

图 1.7

定. 位置矢量是从坐标原点到该物体所画的矢量. 笛卡儿坐标系的取向可以是右手的或左手的,如图1.7所示. 但是在这整章中,我们将采用右手坐标系.

1.2.3 矢量的正交分解

一个位于 $P(x, y, z)$ 的物体的位置矢量 $\boldsymbol{R}$, 示于图 1.8. 我们还将用小写 $\boldsymbol{r}$ 表示位置矢量.

$$\overline{OP} = \overline{R} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BP}$$
$$= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{1.1}$$

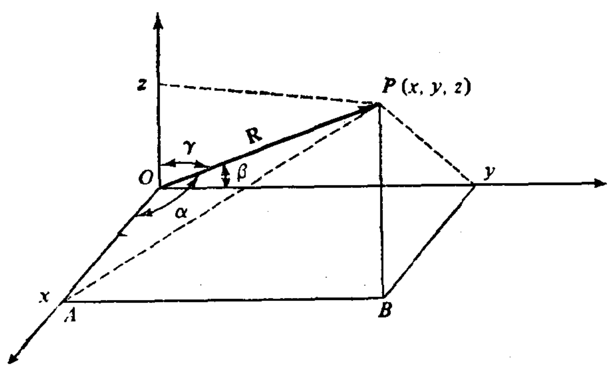

图 1.8