

工科大专教材

高等数学

哈尔滨工程大学数学教研室 编

哈尔滨工程大学出版社

113
H12
112
大专教材

高等数学

(修订版)

哈尔滨工程大学数学教研室编

哈尔滨工程大学出版社

内 容 简 介

本书内容包括:一元函数微积分、常微分方程、无穷级数、空间解析几何、多元函数微分法、二重积分、三重积分、曲线积分。书内各节附有习题,各章附有小结、综合习题,书后附有习题答案。

本书可供高等院校大专班作为教材,也可供高等专科学校、成人高校作为教材或教学参考书,也可作为工程技术人员、管理人员学习高等数学的自学用书。

高 等 数 学

(修订版)

哈尔滨工程大学数学教研室编

责任编辑:金 英

*

哈尔滨工程大学出版社出版发行

新 华 书 店 经 销

哈尔滨毕升电脑排版有限公司排版

东 北 农 业 大 学 印 刷 厂 印 刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 15.25 字数 396 千字

1994年9月第1版 1997年9月修订版 1997年9月第1次印刷

印数:5 001—10 000 册

ISBN 7-81007-462-8

O·26 定价:15.00 元

前 言

为了适应教学工作发展的需要,我们在总结历年大专班教学实践的基础上,参考了一些院校的高等数学教材,编写成这本大专班用《高等数学》。全书内容以一元函数微积分为主,也适当的讲述了常微分方程、幂级数、傅立叶级数,并对空间解析几何及多元函数的微积分作了简要介绍。全书教学可以用 140 学时完成。

本书编写时,注意了与中学数学课程内容的衔接。重视由实际问题引出一些重要概念。为了切实加强基本理论的学习,提高分析问题解决问题的能力,注意到例题及习题的选配。在文字和内容的叙述上力求详尽,深入浅出,通俗易懂。除各节附有基本训练习题外,各章还附有综合习题,供学生提高综合解题技能用。书末附以习题答案,便于自学时查阅。

书中有些内容加了“※”号,选用本书时可以根据教学的需要和学时安排略去不讲。

参加编写与审阅的有施久玉、孟镇纲、沈继红、陈琳珠、王如森、张晓威、罗跃生,由施久玉任主编。

在编写过程中,曾得到有关领导的鼓励与帮助,唐向浦教授、王其元教授对原稿提出了许多宝贵的建设性意见,谨致衷心谢意。

由于我们的水平有限,加上时间仓促,书中难免有不妥之处,恳切希望广大读者批评指正。

编 者

写在修订版之前

本次修订,对第一版编写及排印中的疏漏进行了修正,并对部分章节进行了删改,补充了一些内容,引入了初等数学建模思想。这次修订工作得到了数学教研室的同志们大力支持,对本教材的修改提出了许多宝贵的意见。在此,表示衷心的感谢。

参加修订工作的有施久玉、孟镇纲、沈继红、陈琳珠、王如森、张晓威、罗跃生。由施久玉任主编。

编 者

1997.7.

目 录

第一章 函数	1
§1 实数与数轴的基本概念	1
§2 函数关系	5
§3 函数的几种简单性质	12
§4 初等函数	15
§5 数学模型初步	24
本章小结	28
综合练习题一	29
第二章 极限与连续	32
§1 数列的极限	32
§2 函数的极限	37
§3 无穷大量与无穷小量	47
§4 极限的运算法则	50
§5 两个重要极限	56
§6 函数的连续性	62
本章小结	78
综合练习题二	79
第三章 导数与微分	83
§1 导数的概念	83
§2 求导法则	92
§3 高阶导数	110
§4 微分概念	113
§5 微分的计算	118
§6 微分在近似计算中的应用	122

本章小结	126
综合练习题三	130
第四章 中值定理 导数的应用	133
§ 1 中值定理	133
§ 2 罗比塔法则	138
§ 3 函数的增减性、极值及最大值、最小值问题	144
§ 4 曲线的凹凸性与拐点	157
※ § 5 曲率	161
§ 6 函数图形的作法	168
※ § 7 导数微分在经济学中的应用	173
本章小结	180
综合练习题四	183
第五章 不定积分	188
§ 1 不定积分的概念与性质	188
§ 2 换元积分法	194
§ 3 分部积分法	202
§ 4 有理分式函数积分举例	205
本章小结	209
综合练习题五	210
第六章 定积分及其应用	212
§ 1 定积分的概念	212
§ 2 定积分的性质	216
§ 3 定积分的基本公式	219
§ 4 定积分的换元积分法	223
§ 5 定积分的分部积分法	227
§ 6 广义积分	229
§ 7 定积分的简单应用	233
本章小结	252
综合练习题六	253

第七章 常微分方程	255
§ 1 微分方程的基本概念	255
§ 2 一阶微分方程	259
§ 3 几种二阶微分方程	268
§ 4 二阶常系数线性微分方程	273
§ 5 微分方程的应用(模型)举例	284
本章小结	287
综合练习题七	289
第八章 无穷级数	292
§ 1 常数项级数	292
§ 2 正项级数	298
§ 3 任意项级数	304
§ 4 幂级数	308
§ 5 泰勒级数	314
本章小结	323
综合练习题八	324
※第九章 傅立叶级数	328
§ 1 傅立叶级数的引入	328
§ 2 函数展开为傅立叶级数	330
§ 3 正弦级数和余弦级数	336
§ 4 任意区间上的傅立叶级数	340
本章小结	343
综合练习题九	345
第十章 空间解析几何和向量代数	347
§ 1 空间直角坐标系	347
§ 2 空间向量	350
§ 3 向量的坐标	354
§ 4 平面和直线方程	359
§ 5 空间曲面方程	363

综合练习题十	368
第十一章 多元函数的微分学	369
§ 1 多元函数的概念、极限和连续性	369
§ 2 偏导数	374
§ 3 全微分	380
§ 4 复合函数和隐函数的求导法	383
§ 5 多元函数的极值与最大值、最小值	389
本章小结	396
综合练习题十一	398
第十二章 多元函数的积分学	400
§ 1 二重积分	400
§ 2 二重积分的计算方法	404
§ 3 二重积分的应用	417
§ 4 三重积分	421
※ § 5 曲线积分	428
※ § 6 格林公式及其应用	437
本章小结	443
综合练习题十二	446
习题答案	447

第一章 函 数

高等数学是一门研究数量关系与空间形式的科学。本书以实数为基础，主要的研究对象是函数。

§ 1 实数与数轴的基本概念

一、实数与数轴

有理数包括正、负整数，正、负分数及 0。任何有理数都可以表示为分数 $\frac{p}{q}$ ，（其中 p, q 为整数，且 $q \neq 0$ ）。任何一个有理数 $\frac{p}{q}$ 都可以在数轴上找到一个点与之对应，这个点叫有理点。反之，数轴上任何一个有理点必对应一个有理数。

任何两个有理数 a, b ($a < b$)，在 a, b 之间至少可以找到一个有理数 c ，使得 $a < c < b$ ，例如 $c = \frac{a+b}{2}$ 。同样地，在 a, c 之间也至少可以找到一个有理数 d ，使得 $a < d < c$ 。依次类推，可知不论有理数 a, b 相差多么小，在 a, b 之间总可以找到无穷多个有理数，这就是有理数的稠密性。因为任何一个有理数必和数轴上的一个有理点相对应，因此数轴上任意两个有理点之间总可以找到无穷多个有理点，即有理点在数轴上是处处稠密的。

虽然有理点在数轴上处处稠密，但是有理点尚未充满数轴。例如边长为 1 个单位长度的正方形，其对角线的长度为 $\sqrt{2}$ 个长度单位，可以证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数，因此数轴上坐标为 $\sqrt{2}$ 的点不是有理点。这种不是有理点的点也有无穷多个，而且在数轴上也

是处处稠密的。例如坐标 $\sqrt{2}+1$, $\sqrt{2}+0.1$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$, π 等都不是有理数, 它们代表的点都不是有理点。因此数轴上除有理点之外, 还有无穷多个“空隙”, 可以证明这些空隙也是稠密的。这些空隙代表的点称为无理点, 与无理点对应的数称为无理数。

有理数和无理数统称为实数, 全体实数所成的集合称为实数集, 用 R 表示。实数充满数轴, 而且没有空隙, 这就是实数的连续性。由此可知, 每一个实数必是数轴上某一个点的坐标; 反之, 数轴上每一个点的坐标必是一个实数, 这就是说, 全体实数与数轴上的全体点形成一一对应的关系。今后本书所研究的数都是实数, 为了简单起见, 常常将实数和数轴上与它对应的点不加区别, 用相同的符号表示, 如点 a 和实数 a 是相同的意思。

二、绝对值

在以后的学习中, 常常要用到实数绝对值的概念, 下面综合复习绝对值的定义及性质。

定义 1.1 一个实数 x 的绝对值, 记为 $|x|$, 其定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义表示数轴上点 x 与原点之间的距离。

绝对值及其运算有下列性质:

1. $|x| = \sqrt{x^2}$
2. $|x| \geq 0$
3. $|-x| = |x|$
4. $-|x| \leq x \leq |x|$
5. $|x| < a$ 与 $-a < x < a$ 等价
6. $|x| > b$ 与 $x > b$ 或 $x < -b$ 等价
7. $|x+y| \leq |x| + |y|$, $|x-y| \geq |x| - |y|$
8. $|xy| = |x||y|$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ ($y \neq 0$)

三、区 间

区间是实数集合的一种几何形象表示法。设 a, b 为实数, 且 $a < b$

1. 满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数 x 的集合, 称为以 a, b 为端点的开区间, 记作 (a, b) , 如图 1-1, 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}$$

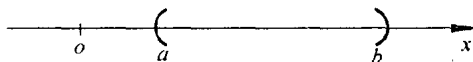


图 1-1

2. 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a, b 为端点的闭区间, 记作 $[a, b]$, 如图 1-2, 即

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$$



图 1-2

3. 满足不等式 $a < x \leq b$ 或 $(a \leq x < b)$ 的所有实数 x 的集合, 称为以 a, b 为端点的半开半闭区间, 记作 $(a, b]$ 或 $[a, b)$, 如图 1-3 和图 1-4, 即

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$$



图 1-3



图 1-4

以上三类区间为有限区间, 有限区间右端点 b 与左端点 a 的差 $b - a$, 称为区间的长。

还有以下几类无限区间:

$$(a, +\infty) = \{x | x > a\}, (-\infty, b) = \{x | x < b\}$$

$$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}, (-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\} \text{ (即全体实数的集合)}$$

四、邻域

由绝对值的性质可知，实数集合

$$\{x | |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$$

在数轴上是一个以点 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ，这个开区间称为点 x_0 的 δ 邻域， x_0 称为邻域的中心， δ 称为邻域的半径，如图 1-5。

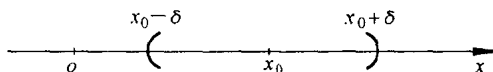


图 1-5

例 1 $|x - 5| < \frac{1}{2}$ ，即为以点 $x_0 = 5$ 为中心，以 $\frac{1}{2}$ 为半径的开区间，也就是开区间 $(4.5, 5.5)$ 。

在微积分中还常常用到集合

$$\{x | 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$$

这是在点 x_0 的 δ 邻域内去掉点 x_0 以后，其余的点组成的集合，即集合 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ ，这个集合称为以 x_0 为中心，半径为 δ 的空心邻域，如图 1-6。

例 2 $0 < |x - 1| < 2$ ，即为以点 $x_0 = 1$ 为中心，半径为 2 的空心邻域 $(-1, 1) \cup (1, 3)$ 。

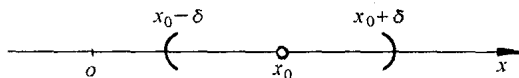


图 1-6

习题 1-1

1. 解下列不等式:

(1) $x^2 < 9$

(2) $|x-4| < 7$

(3) $0 < (x-2)^2 < 4$

(4) $|x| > x$

(5) $|x^2-3x+2| > x^2-3x+2$

(6) $|\frac{x}{1+x}| > \frac{x}{1+x}$

(7) $|ax-x_0| < \delta$ ($a > 0$, $\delta > 0$, x_0 为常数)

2. 求下列方程的实根

(1) $|x| = x+1$

(2) $|x| = -x$

(3) $|\sin x| = \sin x + 2$

(4) $|2x+3| = x^2$

3. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合。

(1) $|x| \leq 3$

(2) $|x| \geq 5$

(3) $|x-2| \leq 1$

(4) $|x-a| \leq \epsilon$ (a 为常数, $\epsilon > 0$)

(5) $|x+1| > 2$

(6) $1 < |x-2| < 3$

§2 函数关系

一、函数概念

定义 1.2 设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y , 如果当变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时, 变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作

$$y = f(x)$$

其中 x 叫自变量, y 叫因变量 (或函数)。

函数的定义包括三个要点:

1. 函数的定义域

自变量 x 的变化范围叫做函数的定义域。

如果自变量取某一数值 x_0 时, 函数有确定的值和它对应, 那

么就说函数在 x_0 处有定义，这时的函数值记作 $f(x_0)$ ，因此函数的定义域可以说成是使函数有定义的全体实数的集合。

定义域不同，函数就不同，例如：

$$y = 2\log_a x, \quad y = \log_a x^2$$

前者的定义域是 $(0, +\infty)$ ，后者的定义域是 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$ ，所以这是两个不同的函数。

2. 对应关系

定义中“变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应”一语，表明了 y 与 x 之间的关系是按照一定的法则联系起来的。这个“一定的法则”就是 x 和 y 的对应关系，即函数关系。因此，对应关系不同，就是不同的函数，给出 y 与 x 的对应关系就是给出了函数。

函数记号 $y=f(x)$ 中的字母“ f ”是表示 x 与 y 之间的对应关系的，也就是定义中的“一定的法则”，因此，当同时考察几个不同函数时，为了避免混淆，就要用不同的字母表示不同的函数。例如：

$$y = x \quad \text{与} \quad y = \sqrt{x^2}$$

虽然定义域相同，但对应关系不同，仍是两个不同的函数，如果同时讨论它们，应当记作

$$y = f(x) = x \quad \text{与} \quad y = F(x) = \sqrt{x^2}$$

3. 函数的值域

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$ ，那么对于 $D(f)$ 中的每一个 x 值，函数 y 就有确定的值 $f(x)$ 和它对应，所有函数值全体的集合叫做函数的值域。

例如，函数 $y=x$ 的定义域 $D(f)=(-\infty, +\infty)$ ，值域是 $(-\infty, +\infty)$ ，函数 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域 $D(f)=(-\infty, +\infty)$ ，值域是 $[0, +\infty)$ ，函数 $y=\sin x$ 的定义域是 $D(f)=(-\infty, +\infty)$ ，值域是 $[-1, 1]$ 。

此外，对于函数定义域还应注意的是：自变量在定义域中任

意取定一个值时,“变量 y ……总有确定的数值和它对应”,至于函数 y 有几个数值和自变量取定的那个数值相对应,由概念的内含可知,至少一个,多则不限。如果对于自变量的每一个值,函数都只有一个确定的值和它对应,这种函数叫单值函数。否则叫多值函数。例如 $y^2=x$, 函数 y 在 $[0, +\infty)$ 内是 x 的双值函数,在此定义域内,对于 x 的每一个值, y 有两个数值和它对应,即 $y=\pm\sqrt{x}$, $x\in[0, \infty)$ 。以后凡是没有特别说明时,本书所说的函数都是指单值函数。多值函数可以拆成几个单值函数,每一个单值函数叫做多值函数的单值分支,例如 $y^2=x$ 可折成 $y=\sqrt{x}$, $x\in[0, +\infty)$ 和 $y=-\sqrt{x}$, $x\in[0, +\infty)$ 两个单值分支。

在函数的定义中,并不要求在自变量变化时,函数一定要变,只要求有确定的函数值和它对应即可,因此,在此种意义下,常量可以当作函数来对待,即常量 $y=c$ 是一个函数,它对于自变量的一切值来说,函数恒取相同的值 c ,其图象是平行于 x 轴的一条直线。

二、函数表示法

1. 函数常用的表示方法有三种:公式法、表格法和图形法。下面各举一个例子。

$$\text{例 1 } y=f(x)=\frac{1}{x(x-1)}+\sqrt{9-x^2}$$

这是用公式表达的 y 是 x 的函数关系,它的定义域

$$D(f)=[-3,0)\cup(0,1)\cup(1,3]$$

例 2 下面的表格表示一个函数

x	1	2	3	4
y	0	0	1	5

这个函数的定义域是 $D(f)=\{1, 2, 3, 4\}$, 对应规律是表格,值域是 $\{0, 1, 5\}$ 。三角函数表、常用对数表等都是最常见的表格表示的函数。

例 3 某河道的一个断面图形如图 1-7 所示,其深度 y 与岸边到测点的距离 x 之间的对应关系如图中曲线所示。这里深度 y 是测距 x 的函数,定义域 $D(f)=[0, b]$ 。

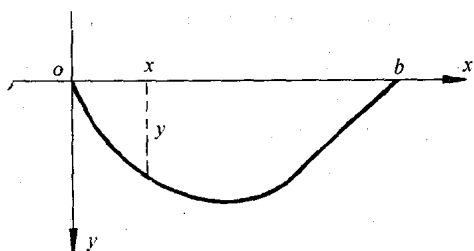


图 1-7

函数的三种表示法中，公式法便于理论研究，表格法使用方便和精确，图形法具有直观的显明性。

2. 有些函数，对于其定义域内自变量 x 不同的值，不能用一个统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为“分段函数”。例如

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

如图 1-8 所示。

又如

$$y = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x - 1, & x > 0 \end{cases}$$

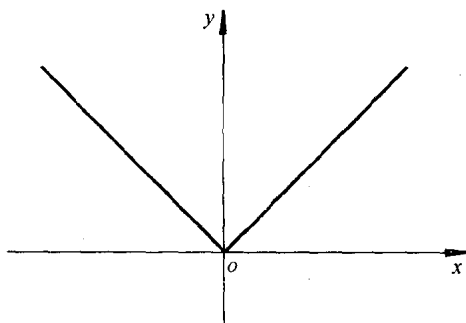


图 1-8