工科大专教材

高等数学

哈尔滨工程大学数学教研室 编

哈尔滨工程大学出版社

大专教材

高 等 数 学

（修订版）

哈尔滨工程大学数学教研室编

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书内容包括：一元函数微积分、常微分方程、无穷级数、空间解析几何、多元函数微分法、二重积分、三重积分、曲线积分。书内各节附有习题，各章附有小结、综合习题，书后附有习题答案。

本书可供高等院校大专班作为教材，也可供高等专科学校、成人高校作为教材或教学参考书，也可作为工程技术人员、管理人员学习高等数学的自学用书。

高等数学

（修订版）

哈尔滨工程大学数学教研室编

责任编辑：金　英

*

哈尔滨工程大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

哈尔滨毕升电脑排版有限公司排版

东北农业大学印刷厂印刷

*

开本 850×1168　1/32 印张 15.25 字数 396 千字

1994 年 9 月第 1 版　1997 年 9 月修订版　1997 年 9 月第 1 次印刷

印数：5 001—10 000 册

ISBN 7-81007-462-8

O·26　定价：15.00 元

前　　言

为了适应教学工作发展的需要，我们在总结历年大专班教学实践的基础上，参考了一些院校的高等数学教材，编写成这本大专班用《高等数学》。全书内容以一元函数微积分为主，也适当的讲述了常微分方程、幂级数、傅立叶级数，并对空间解析几何及多元函数的微积分作了简要介绍。全书教学可以用140学时完成。

本书编写时，注意了与中学数学课程内容的衔接。重视由实际问题引出一些重要概念。为了切实加强基本理论的学习，提高分析问题解决问题的能力，注意到例题及习题的选配。在文字和内容的叙述上力求详尽，深入浅出，通俗易懂。除各节附有基本训练习题外，各章还附有综合习题，供学生提高综合解题技能用。书末附以习题答案，便于自学时查阅。

书中有些内容加了“※”号，选用本书时可以根据教学的需要和学时安排略去不讲。

参加编写与审阅的有施久玉、孟镇纲、沈继红、陈琳珠、王如森、张晓威、罗跃生，由施久玉任主编。

在编写过程中，曾得到有关领导的鼓励与帮助，唐向浦教授、王其元教授对原稿提出了许多宝贵的建设性意见，谨致衷心谢意。

由于我们的水平有限，加上时间仓促，书中难免有不妥之处，恳切希望广大读者批评指正。

编　者

写在修订版之前

本次修订，对第一版编写及排印中的疏漏进行了修正，并对部分章节进行了删改，补充了一些内容，引入了初等数学建模思想。这次修订工作得到了数学教研室的同志们大力支持，对本教材的修改提出了许多宝贵的意见。在此，表示衷心的感谢。

参加修订工作的有施久玉、孟镇纲、沈继红、陈琳珠、王如森、张晓威、罗跃生。由施久玉任主编。

编　者

1997.7.

目　　录

第一章 函 数

高等数学是一门研究数量关系与空间形式的科学。本书以实数为基础，主要的研究对象是函数。

§1 实数与数轴的基本概念

一、实数与数轴

有理数包括正、负整数，正、负分数及 0。任何有理数都可以表示为分数$\frac{p}{q}$，(其中 p，q 为整数，且 $q\neq0$)。任何一个有理数$\frac{p}{q}$都可以在数轴上找到一个点与之对应，这个点叫有理点。反之，数轴上任何一个有理点必对应一个有理数。

任何两个有理数 a，b ($a<b$)，在 a，b 之间至少可以找到一个有理数 c，使得 $a<c<b$，例如 $c=\frac{a+b}{2}$。同样地，在 a，c 之间也至少可以找到一个有理数 d，使得 $a<d<c$。依次类推，可知不论有理数 a,b 相差多么小，在 a、b 之间总可以找到无穷多个有理数，这就是有理数的稠密性。因为任何一个有理数必和数轴上的一个有理点相对应，因此数轴上任意两个有理点之间总可以找到无穷多个有理点，即有理点在数轴上是处处稠密的。

虽然有理点在数轴上处处稠密，但是有理点尚未充满数轴。例如边长为 1 个单位长度的正方形，其对角线的长度为 $\sqrt{2}$ 个长度单位，可以证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数，因此数轴上坐标为 $\sqrt{2}$ 的点不是有理点。这种不是有理点的点也有无穷多个，而且在数轴上也

是处处稠密的。例如坐标$\sqrt{2}+1$，$\sqrt{2}+0.1$，$\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{7}$，π等都不是有理数，它们代表的点都不是有理点。因此数轴上除有理点之外，还有无穷多个“空隙”，可以证明这些空隙也是稠密的。这些空隙代表的点称为无理点，与无理点对应的数称为无理数。

有理数和无理数统称为实数，全体实数所成的集合称为实数集，用R表示。实数充满数轴，而且没有空隙，这就是实数的连续性。由此可知，每一个实数必是数轴上某一个点的坐标；反之，数轴上每一个点的坐标必是一个实数，这就是说，全体实数与数轴上的全体点形成一一对应的关系。今后本书所研究的数都是实数，为了简单起见，常常将实数和数轴上与它对应的点不加区别，用相同的符号表示，如点a和实数a是相同的意思。

二、绝对值

在以后的学习中，常常要用到实数绝对值的概念，下面综合复习绝对值的定义及性质。

定义 1.1　一个实数x的绝对值，记为$|x|$，其定义为

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

$|x|$的几何意义表示数轴上点x与原点之间的距离。

绝对值及其运算有下列性质：

1. $|x|=\sqrt{x^2}$
2. $|x|\geqslant 0$
3. $|-x|=|x|$
4. $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$
5. $|x|<a$ 与 $-a<x<a$ 等价
6. $|x|>b$ 与 $x>b$ 或 $x<-b$ 等价
7. $|x+y|\leqslant |x|+|y|$，$|x-y|\geqslant |x|-|y|$
8. $|xy|=|x||y|$，$\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$ $(y\neq 0)$

三、区　间

区间是实数集合的一种几何形象表示法。设a，b为实数，且$a<b$

1. 满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a, b 为端点的开区间，记作 (a, b)，如图 1-1，即

$$(a,b) = \{x | a < x < b\}$$

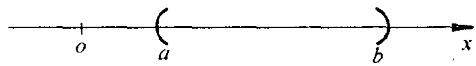

图 1-1

2. 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a，b 为端点的闭区间，记作 $[a, b]$，如图 1-2，即

$$[a,b] = \{x | a \leqslant x \leqslant b\}$$

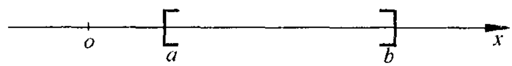

图 1-2

3. 满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $(a\leqslant x<b)$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a，b 为端点的半开半闭区间，记作 $(a, b]$ 或 $[a, b)$，如图 1-3 和图 1-4，即

$$(a,b] = \{x | a < x \leqslant b\}$$
$$[a,b) = \{x | a \leqslant x < b\}$$

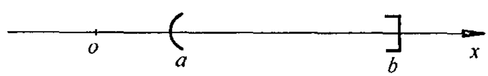

图 1-3

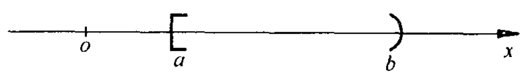

图 1-4

以上三类区间为有限区间，有限区间右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$，称为区间的长。

还有以下几类无限区间：

$(a, +\infty) = \{x | x > a\}$，$(-\infty, b) = \{x | x < b\}$

$[a, +\infty) = \{x | x \geqslant a\}$，$(-\infty, b] = \{x | x \leqslant b\}$

$(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}$（即全体实数的集合）

四、邻　域

由绝对值的性质可知，实数集合

$$\{x \,\big|\, |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$$

在数轴上是一个以点 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，这个开区间称为点 x_0 的 δ 邻域，x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径，如图 1-5。

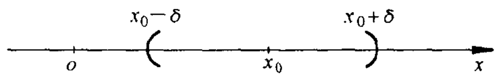

图 1-5

例 1　$|x-5| < \frac{1}{2}$，即为以点 $x_0=5$ 为中心，以 $\frac{1}{2}$ 为半径的开区间，也就是开区间 $(4.5, 5.5)$。

在微积分中还常常用到集合

$$\{x \,\big|\, 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$$

这是在点 x_0 的 δ 邻域内去掉点 x_0 以后，其余的点组成的集合，即集合 $(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$，这个集合称为以 x_0 为中心，半径为 δ 的空心邻域，如图 1-6。

例 2　$0 < |x-1| < 2$，即为以点 $x_0=1$ 为中心，半径为 2 的空心邻域 $(-1,1) \cup (1,3)$。

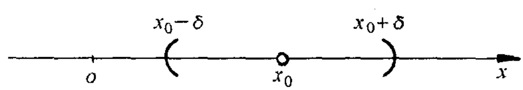

图 1-6

习题 1-1

1. 解下列不等式：

(1) $x^2<9$　　(2) $|x-4|<7$

(3) $0<(x-2)^2<4$　　(4) $|x|>x$

(5) $|x^2-3x+2|>x^2-3x+2$　　(6) $\left|\frac{x}{1+x}\right|>\frac{x}{1+x}$

(7) $|ax-x_0|<\delta$ ($a>0$，$\delta>0$，x_0 为常数)

2. 求下列方程的实根

(1) $|x|=x+1$　　(2) $|x|=-x$

(3) $|\sin x|=\sin x+2$　　(4) $|2x+3|=x^2$

3. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合。

(1) $|x|\leqslant 3$　　(2) $|x|\geqslant 5$

(3) $|x-2|\leqslant 1$　　(4) $|x-a|\leqslant\varepsilon$($a$ 为常数，$\varepsilon>0$)

(5) $|x+1|>2$　　(6) $1<|x-2|<3$

§2　函数关系

一、函数概念

定义 1.2　设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，如果当变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x)$$

其中 x 叫自变量，y 叫因变量（或函数）。

函数的定义包括三个要点：

1. 函数的定义域

自变量 x 的变化范围叫做函数的定义域。

如果自变量取某一数值 x_0 时，函数有确定的值和它对应，那

么就说函数在 x_0 处有定义，这时的函数值记作 $f(x_0)$，因此函数的定义域可以说成是使函数有定义的全体实数的集合。

定义域不同，函数就不同，例如：

$$y = 2\log_a x, \qquad y = \log_a x^2$$

前者的定义域是 $(0, +\infty)$，后者的定义域是 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$，所以这是两个不同的函数。

2. 对应关系

定义中“变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应”一语，表明了 y 与 x 之间的关系是按照一定的法则联系起来的。这个“一定的法则”就是 x 和 y 的对应关系，即函数关系。因此，对应关系不同，就是不同的函数，给出 y 与 x 的对应关系就是给出了函数。

函数记号 $y=f(x)$中的字母“f”是表示 x 与 y 之间的对应关系的，也就是定义中的“一定的法则”，因此，当同时考察几个不同函数时，为了避免混淆，就要用不同的字母表示不同的函数。例如：

$$y = x \qquad 与 \qquad y = \sqrt{x^2}$$

虽然定义域相同，但对应关系不同，仍是两个不同的函数，如果同时讨论它们，应当记作

$$y = f(x) = x \quad 与 \quad y = F(x) = \sqrt{x^2}.$$

3. 函数的值域

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，那么对于 $D(f)$中的每一个 x 值，函数 y 就有确定的值 $f(x)$和它对应，所有函数值全体的集合叫做函数的值域。

例如，函数 $y=x$ 的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$，值域是 $(-\infty, +\infty)$，函数 $y=\sqrt{x^2}$的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$，值域是 $[0, +\infty)$，函数 $y=\sin x$ 的定义域是 $D(f)=(-\infty,+\infty)$，值域是 $[-1, 1]$。

此外，对于函数定义域还应注意的是：自变量在定义域中任

意取定一个值时,“变量 y……总有确定的数值和它对应”,至于函数 y 有几个数值和自变量取定的那个数值相对应,由概念的内含可知,至少一个,多则不限。如果对于自变量的每一个值,函数都只有一个确定的值和它对应,这种函数叫单值函数。否则叫多值函数。例如 $y^2=x$,函数 y 在 $[0,+\infty)$ 内是 x 的双值函数,在此定义域内,对于 x 的每一个值,y 有两个数值和它对应,即 $y=\pm\sqrt{x}$,$x\in[0,\infty)$。以后凡是没有特别说明时,本书所说的函数都是指单值函数。多值函数可以拆成几个单值函数,每一个单值函数叫做多值函数的单值分支,例如 $y^2=x$ 可折成 $y=\sqrt{x}$,$x\in[0,+\infty)$ 和 $y=-\sqrt{x}$,$x\in[0,+\infty)$ 两个单值分支。

在函数的定义中,并不要求在自变量变化时,函数一定要变,只要求有确定的函数值和它对应即可,因此,在此种意义下,常量可以当作函数来对待,即常量 $y=c$ 是一个函数,它对于自变量的一切值来说,函数恒取相同的值 c,其图象是平行于 x 轴的一条直线。

二、函数表示法

1. 函数常用的表示方法有三种:公式法、表格法和图形法。下面各举一个例子。

例 1 $y=f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}+\sqrt{9-x^2}$

这是用公式表达的 y 是 x 的函数关系,它的定义域

$$D(f)=[-3,0)\cup(0,1)\cup(1,3]$$

例 2 下面的表格表示一个函数

x	1	2	3	4
y	0	0	1	5

这个函数的定义域是 $D(f)=\{1,2,3,4\}$,对应规律是表格,值域是 $\{0,1,5\}$。三角函数表、常用对数表等都是最常见的表格表示的函数。

例 3 某河道的一个断面图形如图 1-7 所示,其深度 y 与岸边到测点的距离 x 之间的对应关系如图中曲线所示。这里深度 y 是测距 x 的函数,定义域 $D(f)=[0,b]$。

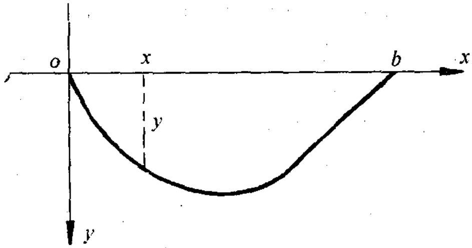

图 1-7

函数的三种表示法中，公式法便于理论研究，表格法使用方便和精确，图形法具有直观的显明性。

2. 有些函数，对于其定义域内自变量 x 不同的值，不能用一个统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为"分段函数"。例如

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

如图 1-8 所示。

又如
$$y = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x - 1, & x > 0 \end{cases}$$

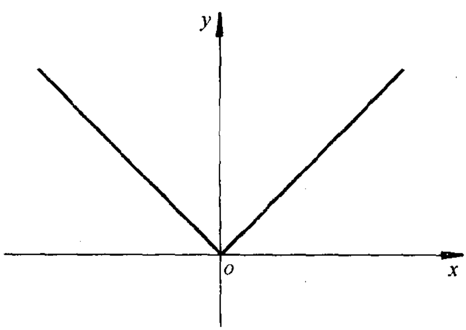

图 1-8