

弹性稳定理论

S. 铁摩辛柯 著

彈 性 穩 定 理 論

S. 鐵 摩 辛 柯 著

張 福 範 譯

科 學 出 版 社

1958年3月

THEORY OF ELASTIC STABILITY

S. TIMOSHENKO

內 容 提 要

本書詳盡地討論了彈性體的穩定理論，其內容包括中心受壓桿的屈曲及其實驗與設計算式、受壓的圓環和曲桿的屈曲、梁的側向屈曲、薄板的彎曲、薄板的屈曲、薄殼的彎曲、薄殼的屈曲、薄壁桿件的平衡與屈曲。本書不僅為工科學的機械、土木、航空、力學專業的參考書，並為工程師們實際工作所需。

彈 性 穩 定 理 論

S. 鐵摩辛柯 著

張 福 範 譯

*

科學出版社出版(北京朝陽門大街117號)

北京市書刊出版業營業許可證出字第061號

科學出版社上海印刷廠印刷 新華書店總經售

*

1958年3月第一版

書號: 1052

1958年3月第一次印刷

字數: 433,000

(滬)道: 1—434

開本: 850×1168 1/32

報: 1—1,658

印張: 17 9/16 插頁: 3

定價: (10) 道林本布面精裝 5.10 元
報紙本紙面精裝 3.70 元

序

鋼和高強度合金在現代工程結構中的運用，尤其是用於橋梁、船舶與飛機，已使彈性穩定成為一極重要的問題。迫切的實際需要促使近年來在理論和實際上對於桿、板、殼等構件的穩定條件作了廣泛的研究。這些在不同地域和以各種不同文字所記載的工作，現在似乎時機已成熟，應將它們蒐集成書。這些工作係為工程師們設計所需，但往往是不易獲得的。

約在二百年以前，歐拉（Euler）解出了關於壓桿橫向屈曲的第一個彈性穩定的問題。在當時，主要的建築材料為木頭和石頭。對於這種強度較低的材料，必須使用粗短的構件，因而彈性穩定這問題並不是首要的。因此，歐拉的細桿理論長久地並無實際應用。祇當在十九世紀後半期，鐵路鋼橋開始大量修建時，壓桿屈曲這問題才有了實際的意義。鋼的運用很自然地導致具有細長壓桿，薄板及薄殼等類型的結構。經驗證明，在某些情況下，這類結構的失去效用，並非是由於應力超過了材料的強度，而是由於細長或薄壁構件的彈性穩定的不足。

在迫切的實際需要之下，歐拉所創的柱的橫向屈曲問題，已在理論和實際上作廣泛地研究，並確定了這理論公式的限制。但壓桿的橫向屈曲祇是彈性穩定中的一個特例。在橋梁、船舶及飛機的現代設計中，我們遇到了各種的穩定問題。我們不僅遇到實心的柱，並且是組合的或“格子”型的柱以及管狀的桿件。對於它們，可能發生局部的屈曲和整體的屈曲。在板梁和飛機結構中運用薄的材料時，我們必須注意，當力作用在板的平面內時，薄板可能失去穩定，並由於橫向的屈曲而遭損壞。須抵抗均佈外壓力的柱狀薄殼，例如真空容器，如果殼的厚度較直徑太小時，可能發生不穩

定並在較小的應力下發生屈曲。柱形薄殼也可能在軸向壓力、彎曲、扭轉及在它們的組合作用下屈曲。在現代的單殼式飛機設計中，所有這些問題是極端重要的。

在討論這類的問題和它們的解時，將彈性穩定的一般理論包括進去是認為不必要的，因這在彈性理論的書中是有其適當的章節的。本書直接由特殊問題着手，並對於每一情況指明在什麼條件下應考慮穩定性問題。就諸類型的問題的最相宜的解法，提出了各種的解法。大多數的解都輔以表和曲綫，以提供每一特殊情況的臨界荷重及臨界應力的值。在提供了有關這問題的可用資料以後，並不企圖進入實際的設計，因在設計中，除理論與試驗外，尚其他的因素應加以考慮。

讀這本書時，應具有數學和材料力學的知識，即我們在工科學校中所修的。而在需要更多數學的場合，將在書中加以適當的說明。為了便於閱讀，雖然是有實際重要性但在初讀時可以省略的問題，均以小字刊印。讀者在讀完這書的主要部分以後，可再研究這些問題。

有關穩定問題的參考論文和書籍，均在書中列出。對於要更詳盡地研究某些特殊問題的工程師們，這些參考資料可能是有興趣的。它們描述了彈性穩定理論的現代發展過程，並且對於計劃在這園地工作的研究生們也可能是有用的。

在寫這本書時，儘量地採用了作者以前所寫關於處理穩定問題這書*的內容。在許多俄國的工科學校中，這本書是作為薄板與殼的理論的教程的。

鐵摩辛柯

恩,阿盤,密歇根

五月, 1936.

* “彈性理論”, vol. II, St. Petersburg, Russia, 1916.

譯 者 序

雖然鐵摩辛柯教授的彈性穩定理論是在二十年以前出版的，但由於內容的豐富和創造性，這書至今仍為工程師們和從事於這方面工作的學者們所必需的一寶貴的資料。蘇聯最近有俄譯本的第二版刊印即為一很好的說明。

除了在彈性理論，振動學，結構力學諸方面的貢獻外，鐵摩辛柯教授的工作尤其傑出地豐富了彈性穩定的理論。這是為每一個讀者必然會領會到的。

附錄中的開口薄壁桿件的彎曲、扭轉與屈曲理論係譯自鐵氏在 1945 年發表於弗蘭克林學報的論文。

原著中所用的英制，已按照俄譯本改為公制。

張福範

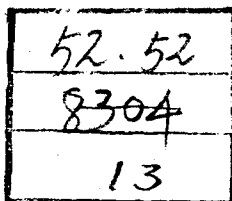
北京，清華大學，

1956, 3, 15.

符 號

x, y, z	直交坐標
l	桿的長度
L	壓桿的計算長度
h	梁的高度，板或殼的厚度
r	慣性半徑，半徑
s	核心半徑
$\frac{l}{r}$	壓桿的長細比
$\frac{1}{\rho}, \frac{1}{r}$	撓曲曲綫的曲率
e	偏心率
A	橫截面積
P	軸向力
Q	剪力，橫向荷重
q	分佈荷重的強度
P_{cr}	壓桿的臨界荷重
P_s	壓桿的歐拉荷重
M	彎矩
M_t	扭矩
E	張力與壓力的彈性模量
G	剪切的彈性模量
μ	泊松係數
E_r	縮減模量
$B = EI$	梁的抗彎剛度
$D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$	板與殼的抗彎剛度
C	抗扭剛度
$k^2 = \frac{P}{EI}$	對於壓桿

$u = \frac{kl}{2}$	對於壓桿
σ	正應力
τ	剪應力
σ_{cr}	臨界正應力
τ_{cr}	臨界剪應力
$\sigma_{Y.P.}$	屈服點應力
σ_c	柱的平均壓應力
u, v, w	在 x, y, z 方向的位移分量
ϵ	單位伸長
γ	單位角變形
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$	應變分量
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$	曲率的改變
N_x, N_y, N_{xy}	在板的中間平面或殼的中間面內的合力
Q_x, Q_y	垂直於中間面的板或殼內的合剪力
M_x, M_y, M_{xy}	在板或殼內的合彎矩及合扭矩
V	應變能
T	外力所作的功



目 錄

序.....	v
譯者序	vii
符號.....	ix

第一章 等截面直桿在軸向與橫向荷重共同作用下的彎曲

1. 有一個橫向荷重作用於壓桿.....	1
2. 幾個橫向荷重作用於壓桿.....	5
3. 均佈橫向荷重作用於壓桿.....	7
4. 由力偶作用的壓桿的彎曲.....	11
5. 兩端固定的軸向受壓的梁.....	20
6. 軸向受壓的連續梁.....	23
7. 三角級數的應用.....	28
8. 初彎曲對於撓度的影響.....	36
9. 許可應力的決定.....	42
10. 超過比例極限的彎曲.....	49
11. 超過比例極限時彎曲與壓縮的聯合作用.....	55

第二章 中心受壓桿的屈曲

12. 歐拉算式.....	67
13. 屈曲的細桿的大撓度.....	72
14. 穩定與不穩定平衡.....	78
15. 以能量法計算臨界荷重.....	81
16. 以逐次近似法計算臨界荷重.....	87
17. 一端鉸接、一端固定的桿的屈曲.....	90
18. 彈性固定端的桿的屈曲，框架.....	92

19. 爲剛性支座所支承的連續桿的屈曲	99
20. 在彈性支座上的桿的屈曲	103
21. 在彈性基礎上的桿的屈曲	112
22. 在多個壓力作用下桿的屈曲	115
23. 等截面桿在分佈的軸向荷重作用下的屈曲	118
24. 低桁架橋頂部弦桿的穩定	126
25. 變截面桿的屈曲	132
26. 剪力對於臨界荷重的影響	143
27. 格子柱的屈曲	145
28. 彈性桿系的穩定	150
29. 超過比例極限的壓桿的屈曲	160
30. 受壓螺旋彈簧的側屈曲	168
31. 承受扭矩和壓力的軸的穩定	171

第三章 實驗與設計算式

32. 實心柱的實驗	173
33. 以臨界應力圖作爲設計柱的根據	181
34. 設計柱的經驗算式	184
35. 以所設的缺陷作爲設計柱的根據	187
36. 各種的端點條件	192
37. 組合柱的設計	196

第四章 受壓的環和曲桿的屈曲

38. 圓形薄曲桿的彎曲	203
39. 應用三角級數以研究薄圓環的彎曲	206
40. 軸向壓力或張力對於圓環的彎曲的影響	211
41. 在均佈外壓力下圓環及管的屈曲	214
42. 將所設的缺陷爲根據以設計在均佈外壓力作用下的管	219
43. 均勻受壓的圓形拱的屈曲	222
44. 有小曲率的曲桿的屈曲	227
45. 由兩種金屬組合的小條的屈曲	232

第五章 梁的側向屈曲

46. 一薄條在它的平面內承受純彎曲的側向屈曲	236
47. 橫截面為狹長矩形的懸臂梁的側向屈曲	242
48. 狹長矩形截面的簡支梁的側向屈曲	247
49. 工形梁的扭轉	252
50. 在純彎曲作用下的工形梁的側向屈曲	255
51. 工形截面的懸臂梁的側向屈曲	259
52. 兩端簡支的工形梁的側向屈曲	261
53. 應力超過比例極限後工形梁的側向屈曲	269
54. 軸綫為圓弧形的薄條的側向屈曲	274

第六章 薄板的彎曲

55. 板的純彎曲	282
56. 在分佈的橫向荷重作用下板的彎曲	289
57. 板的彎曲與拉或壓的聯合作用	297
58. 板彎曲的應變能	300
59. 簡支邊矩形板的撓度	308
60. 具有小初曲率的板的彎曲	313
61. 板的大撓度	315

第七章 薄板的屈曲

62. 臨界荷重的計算方法	318
63. 在一個方向均勻受壓的簡支矩形板的屈曲	321
64. 在兩垂直方向受壓的簡支矩形板的屈曲	327
65. 承受均佈壓力的矩形板的屈曲: 與壓力方向垂直的兩相對邊為簡支, 而沿其餘的兩邊有各種的邊界條件	331
66. 在彎曲與壓聯合作用下簡支矩形板的屈曲	344
67. 在剪應力作用下的矩形板的屈曲	350
68. 矩形板屈曲的其他情形	356
69. 圓板的屈曲	360

70. 以肋條加强的板的穩定·····	364
71. 超過比例極限後板的屈曲·····	377
72. 屈曲板的大撓度·····	383
73. 屈曲板的極限強度·····	389
74. 板屈曲的試驗·····	393
75. 板屈曲理論的實際應用·····	397

第八章 薄殼的彎曲

76. 殼上一微體的變形·····	410
77. 圓柱形殼的對稱變形·····	414
78. 圓柱形殼的無伸長的變形·····	416
79. 柱形殼的變形的一般情形·····	419
80. 球形殼的對稱變形·····	425

第九章 殼的屈曲

81. 圓柱形殼在均佈的軸向壓力的作用下的對稱屈曲·····	429
82. 圓柱形殼由於不穩定性的無伸長彎曲形式·····	433
83. 在均勻的橫向外壓力作用下圓柱形殼的屈曲·····	435
84. 在均勻的軸向壓力作用下圓柱形殼的屈曲·····	444
85. 圓柱形殼軸向受壓的試驗·····	451
86. 彎曲的或偏心受壓的圓柱形殼·····	454
87. 曲薄板的軸向壓縮·····	457
88. 加固的圓柱殼在軸向受壓下的屈曲·····	460
89. 在軸向與均佈的側向壓力共同作用下圓柱形殼的屈曲·····	465
90. 受扭轉的圓柱殼的屈曲·····	470
91. 均勻受壓的球形殼的屈曲·····	481
附 錄·····	488
開口薄壁桿件的彎曲, 扭轉與屈曲理論·····	488
人名索引·····	545
題目索引·····	549

第一章

等截面直桿在軸向與橫向荷重共同作

用下的彎曲

從初等彎曲理論中我們知道，若僅有橫向荷重作用於梁時，梁的撓度和應力係與荷重的大小成正比。荷重位置的稍微改變，對於撓度和應力祇產生很小的影響。小的撓度對於梁的彎矩和剪力並無多大影響，所以在計算梁的彎矩和剪力時，通常完全略去梁的變形，而用原來沒有彎曲的直梁來決定所有必須的距離。

對於軸向和橫向荷重共同作用的梁，情況將完全不同。應力和撓度並不與軸向荷重的大小成比例。軸向荷重作用的稍微偏心，以及梁的極微小初彎曲，可能對於撓度和應力有很大影響。在計算彎矩和剪力時，梁的小撓度不能被略去，而必須加以考慮。當軸向壓力接近於某一通常稱為臨界荷重時，對於軸向荷重的大小或作用點的稍有改變，撓曲將十分敏感，而梁的彎曲將變為特有的突然的橫向屈曲。

從軸向及橫向荷重共同作用的等截面直桿的上述這特點開始研討，是有利於對於穩定問題的充分了解的。討論這問題所得的結果，以後可用於研究其他的各種穩定問題。

1. 有一個橫向荷重作用於壓桿

若一軸向壓力作用於一理想的等截面直桿，則祇產生均佈的壓應力。但如果還有一橫向荷重作用於桿，這軸向力將影響桿的彎曲。這影響祇能由考慮桿的撓曲曲綫而加以研究。我們首先研究一最簡單的情況：有一橫向荷重 Q 作用於一兩端為鉸支座的壓

桿(圖 1)。設彎曲發生在桿的兩主平面的一個主平面內¹⁾，並以

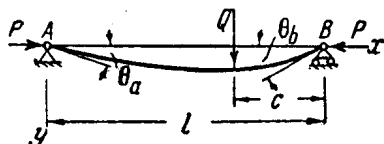


圖 1.

EI 為相應的抗彎剛度, P 為軸向壓力, 則桿的左段及右段的撓曲曲線的微分方程各為

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Qc}{l}x - Py; \quad (a)$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Q(l-c)(l-x)}{l} - Py, \quad (b)$$

式中的 l 為跨度, c 為從荷重 Q 至梁右端支座的距離。為簡化計, 以

$$\frac{P}{EI} = k^2. \quad (1)$$

於是方程(a)成為

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = -\frac{Qc}{EI}x.$$

這方程的通解為

$$y = A \cos kx + B \sin kx - \frac{Qc}{Pl}x. \quad (c)$$

同樣的, 方程(b)的通解為

$$y = C \cos kx + D \sin kx - \frac{Q(l-c)(l-x)}{Pl}. \quad (d)$$

積分常數 $A, \dots, D$ 將由桿在兩端及在荷重 Q 的作用點的條件來決定。由於桿兩端的撓度為零, 我們斷定:

$$A = 0, \quad C = -D \tan kl. \quad (e)$$

1) 若荷重不作用於主平面內, 它們可各被分解為兩分量作用在兩主平面內。這樣就能將問題化為桿在主平面內彎曲的問題。

在荷重 Q 的作用點，由方程(c)與(d)所示的兩撓曲曲綫將有相同的撓度及公有的切綫。於是

$$\begin{aligned} B \sin k(l-c) - \frac{Qc}{Pl} (l-c) &= D [\sin k(l-c) - \\ &\quad - \tan kl \cos k(l-c)] - \frac{Qc}{Pl} (l-c); \\ Bk \cos k(l-c) - \frac{Qc}{Pl} &= Dk [\cos k(l-c) + \\ &\quad + \tan kl \sin k(l-c)] + \frac{Q(l-c)}{Pl}, \end{aligned}$$

從以上兩式，得

$$B = \frac{Q \sin kc}{Pk \sin kl}; \quad D = -\frac{Q \sin k(l-c)}{Pk \tan kl}. \quad (f)$$

將由(e), (f)所得的常數代入(c)與(d)，我們得到撓曲曲綫的兩個部分的方程爲：

$$y = \frac{Q \sin kc}{Pk \sin kl} \sin kx - \frac{Qc}{Pl} x, \quad \text{當 } x < (l-c); \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{Q \sin k(l-c)}{Pk \sin kl} \sin k(l-x) - \frac{Q(l-c)(l-x)}{Pl}, \\ &\quad \text{當 } x > (l-c). \end{aligned} \quad (3)$$

我們可以看出，若以 $(l-c)$ 代 c ，以 $(l-x)$ 代 x ，則方程(3)可自方程(2)得到。

微分(2), (3)兩式，得到在以後計算中有用的下列諸算式

$$y' = \frac{Q \sin kc}{P \sin kl} \cos kx - \frac{Qc}{Pl}, \quad \text{當 } x < (l-c); \quad (4)$$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{Q \sin k(l-c)}{P \sin kl} \cos k(l-x) + \frac{Q(l-c)}{Pl}, \\ &\quad \text{當 } x > (l-c); \end{aligned} \quad (5)$$

$$y'' = -\frac{Qk \sin kc}{P \sin kl} \sin kx, \quad \text{當 } x < (l-c); \quad (6)$$

$$y'' = -\frac{Qk \sin k(l-c)}{P \sin kl} \sin k(l-x),$$

當 $x > (l-c)$. (7)

對於荷重作用於中點的這特殊情況，撓曲曲線是對稱的，於是祇須考慮荷重左邊的這段。要得到在這特殊情況下的最大撓度，我們將 $x = c = \frac{l}{2}$ 代入(2)式，得到

$$\delta = (y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Q \tan \frac{kl}{2}}{2Pk} - \frac{Ql}{4P}.$$

爲了簡化此方程，用以下這記號：

$$\frac{kl}{2} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} = u. \quad (8)$$

於是

$$\delta = \frac{Q}{2Pk} \left(\tan \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \right) = \frac{Ql^3}{48EI} \frac{3(\tan u - u)}{u^3}. \quad (9)$$

在這方程右邊的第一個因數，表示祇有橫向荷重作用時的撓度。第二個因數表明了軸向力 P 對於撓度 δ 的影響¹⁾。當 P 很小時， u 的數值也很小[參閱方程(8)]，於是上述這因數接近於一。這可用下列級數並祇保留其爲首的兩項而證明之。

$$\tan u = u + \frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{15} + \dots$$

當 u 增大時，這因數也增大，並當 u 接近於 $\frac{\pi}{2}$ 時，這因數接近於無

限大。當 $u = \frac{\pi}{2}$ 時，自(8)式得到

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (10)$$

1) 對於各不同的 u 值，這因數的數值可由表 1 查得 (13 頁)。運用了這表，對於每一特殊情形，可以很容易地自方程(9)計算桿的撓度。

這樣就可得到結論：當軸向壓力接近於極限值(10)時，即使很小的橫向荷重，可以產生極大的撓度。這壓力的極限值稱為臨界荷重，並以 P_{cr} 表示。運用了軸向力的臨界值(10)， u 的值[參閱方程(8)]可表示如下：

$$u = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \quad (8')$$

這樣， u 祇與 $P:P_{cr}$ 的比值有關。

要計算撓曲曲線一端的斜度，我們以 $c = \frac{l}{2}$ ， $x = 0$ 代入方程(4)。於是，

$$(y')_{x=0} = \frac{Q}{2P} \left(\frac{1}{\cos \frac{kl}{2}} - 1 \right) = \frac{Ql^2}{16EI} \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u} \quad (11)$$

運用方程(6)，得到最大的彎矩：

$$M_{\max} = -EI(y'')_{x=\frac{l}{2}} = \frac{EIQk}{2P} \tan \frac{kl}{2} = \frac{Ql}{4} \frac{\tan u}{u} \quad (12)$$

我們可以看出，在橫向荷重與軸向荷重共同作用下，最大彎矩等於橫向荷重所產生的彎矩乘以某個三角函數的因數。當軸向壓力逐漸變小時，這因數的數值接近於一；而當 u 的數值接近於 $\frac{\pi}{2}$ 時，即當壓力接近於臨界值(10)時，這因數將無限地增大。

2. 幾個橫向荷重作用於壓桿

前一節的結果可用於更一般的情況，即有多個橫向荷重及軸向壓力共同作用於梁。方程(2)，(3)指出，對於任一已知的軸向力，桿的撓度與橫向荷重 Q 成正比。同時，撓度與軸向力 P 值之間的關係將更為複雜，因這軸向力是包括在含有 k 的三角函數內的。撓度為 Q 的綫性函數這事實表明：通常常用於當梁祇有橫向荷重作用時的疊加法，稍加更改後亦能應用於橫向荷重及軸向力共同作用下的情形。從方程(2)，(3)可以看出，當除橫向荷重 Q 外加