现代控制工程

赵康怀编著

中国铁道出版社

现代控制工程

（电力牵引与传动控制类专业适用）

赵 康 怀 编著

中 国 铁 道 出 版 社

1 9 8 6 年・北京

内 容 简 介

本书从工程观点，深入浅出地介绍了现代控制理论的基础知识，并将它具体应用于机车控制和传动控制中。全书共分七章，包括系统的状态空间表示法、状态方程的特征规范形、系统运动的分析、李雅普诺夫稳定性分析、能控性和能观测性、控制系统的综合、最优控制等。

本书可作为高等学校电力牵引及传动控制专业教材，也可供从事自动控制的工程技术人员及大专院校有关专业师生参考。

现代控制工程

（电力牵引与传动控制类专业适用）

赵康怀编著

中国铁道出版社出版

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092毫米 1/16 印张：14 字数：349 千

1986年3月 第1版 第1次印刷

印数：0001—5,500 册 定价：2.70 元

前　　言

当今，自动控制正被广泛地应用于工业、农业、国防、交通运输以及科研等各个领域之中，它对于促进科学技术的迅速发展和繁荣起着极其重要的作用。与此同时，科学技术的进步，反过来也深深地影响和推动着自动控制本身，致使自动控制理论也有了很大的突破和飞跃。

众所周知，早在四、五十年代时，就已经有了和当时技术水平相一致的所谓自动调节原理（也称古典控制理论或经典控制理论）。这种理论乃是以传递函数作为系统的基本描述，以根轨迹法和频率法作为主要手段。它对于单输入、单输出线性定常系统的分析和综合无疑是十分有效的。可是，对于时变系统、复杂的非线性系统以及多输入、多输出系统却显得无能为力。又由于人们对系统的要求多是以时域的某种性能指标给出的，而经典理论则是依据复数域、频率域的间接指标来定性地了解和评价系统的品质，故而其设计方法只能建立在试探的基础之上。如此，通常也得不到系统的最优性能。

随着科学技术的发展，以及人们对控制系统的要求愈来愈高，所要完成的任务也越来越复杂。为适应这一需要，从六十年代以来，出现并逐步形成了一种新的控制理论，即所谓现代控制理论。这种理论和古典的控制理论不论在数学模型上、应用范围上，或是在研究方法上都有很大不同。它不仅适用于单输入、单输出系统，也适用于多输入、多输出系统。而且这些系统既可以是线性的，也可以是非线性的；可以是定常的，也可以是时变的。它不像古典控制理论那样仅着眼于系统的外部联系。现代控制理论不单注意到系统的外部（输入、输出）状态，同时还注意到系统的内部状态，以及内部和外部状态之间的相互联系，把系统的内部状态、外部状态均作为变量来处理。并由此建立起系统在状态空间的表达式，一种比传递函数更为完整的表达式。现代控制理论便是以这种表达式作为数学模型，采用一种对于控制过程来说直接的时域方法进行系统分析研究，因此有可能针对由时域给出的性能指标来实现系统的最优控制，进而去设计诸如自适应的或自学习的等控制系统。

现代控制理论并不排斥经典控制理论的一些特长，但它确有着许多古典理论所不及的优点，目前正以日新月异的面貌向前发展着。今后，在机车等自动控制中，愈来愈多地应用现代理论自然也属势所必然。

本书系根据一九八二年六月在西南交通大学召开的对口专业教材会议所制订的“现代控制工程”教学大纲要求，先以讲义，经试用、修改，再编写而成的。

全书共分七章。前两章着重讨论了系统在状态空间的表达式；三、四、五章则分别对系统的运动，系统的稳定性、能控性、能观测性进行了分析；最后两章还根据不同要求，对系统作了综合设计。

在编写过程中，西南交通大学杜庆萱教授对本书文稿进行了仔细审阅，提出了许多宝贵意见和建议，在此谨表感谢。

为能及时供专业教学需要，按要求在短期内写就本书。因限于水平，错误和不妥之处，至希读者批评指正。

作　　者

一九八三年三月　　于上海铁道学院

目　　录

第一章　状态空间表达式

第一节　引　　言

古典控制理论中，常采用传递函数作为系统的数学模型。需知，这种数学模型所能表达的主要是系统的输入和输出关系，被描述的只是系统的端部特性。具有相同端部特性的系统其结构特性可并非总是一样，因此用传递函数作为系统的描述有时是不完整的。而且单知端部状态，对于充分了解一个系统的运动状况，掌握系统的全体性质往往也是不够的。譬如，有一列车在外力作用下作直线运动。若要想说明该列车在某一时刻t_0时的状态，光知道列车在t_0时的位置 $S(t_0)$，而不同时知道列车在此时刻下的速度则还是不明确的。因为位置相同，速度不同的列车所代表的运动状况并不一样。尤其当涉及诸如时变系统、复杂的非线性系统以及多输入多输出系统时，根本就无法借用传递函数来进行描述。鉴于上述原因，促使人们去寻找一种新的数学模型，这正是本章将要讨论的所谓系统的状态空间表达式。这种表达式不但能表示出系统的外部、且也能表示出系统的内部，即系统的全部状态和特性。而且还不会因系统输入输出数目的增多而增加其在形式上的复杂性。另外，这种表达式还特别适合应用数字计算机的计算分析，有很多突出的优点。

在具体讨论关于系统的状态空间表达式之前，下面先介绍几个有关的术语。

状态　控制系统的状态是指能完全描述系统时域行为的一个最少变量组。这里所谓的完全描述，意为当给定$t=t_0$时刻的这组变量值和$t\geqslant t_0$时的输入函数，那么$t\geqslant t_0$任何时刻下系统的行为便能完全确定。根据这一定义可知，系统的行为乃是由t_0时刻的系统状况和$t\geqslant t_0$时的输入唯一确定，而与t_0时刻以前的状况和输入无关。

状态变量　是构成系统状态的变量，是指能完全描述系统行为的最少变量组中的每一个变量。如果以最少的n个变量 $x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$可以完全描述系统，那么 $x_i(t)$（$i=1$，2，…，n）便是其中一个状态变量。

状态向量　设系统的状态变量为 $x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$，那么状态向量便是以这组状态变量为分量所构成的向量，记作

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

状态空间　状态向量$\mathbf{X}(t)$的所有可能值的集合在几何学上叫状态空间，或者说由x_1轴，x_2轴，……，x_n轴所组成的n维空间称为状态空间。

状态空间中的每一个点，对应于系统的某一特定状态。反过来，系统在任一时刻的状态都可用状态空间中的一个点来表示。显然，系统在不同时刻下的状态，可用状态空间中的一条轨迹来表示。轨迹的形状，完全由系统在t_0时刻的初态 $\mathbf{x}(t_0)$和$t\geqslant t_0$时的输入函数，以及

系统本身的动力学特性所决定。

第二节　控制系统的状态空间描述

为了充分描述一控制系统，除了像古典控制理论中将输入函数 $u_1(t)$，$u_2(t)$，…，$u_l(t)$，输出函数 $y_1(t)$，$y_2(t)$，…，$y_m(t)$ 看成变量之外，这里还引入一组能表示系统内部状态的所谓状态变量$x_1(t)$，$x_2(t)$，…$x_n(t)$。如图1—1所示。

图　1—1

可以说，任何控制系统其变量总不外乎这三种。输出变量和控制系统的要求（控制目的）直接有关，输入变量则是给系统的行为予以不同的影响，而状态变量则反应系统内部的时域特征，和输入、输出变量相贯联。弄清这三种变量的变化及其相互的关系，自然也就把握了系统的各种特性。

为了今后的讨论和表述的方便起见，兹将系统的输入、输出及状态变量的集合记成向量形式，而把诸变量看成为某向量的分量。即把

输入变量的集合记成输入向量：

$$\mathbf{u}(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_l(t) \end{pmatrix}$$

输出变量的集合记成输出向量：

$$\mathbf{y}(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix}$$

状态变量的集合记成状态向量：

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

向量$\mathbf{u}(t)$、$\mathbf{y}(t)$ 、$\mathbf{x}(t)$ 分别是l、m、n维。

由状态变量的定义已知，系统在某时刻t的状态，由$t=t_0$时刻的初始状态向量 $\mathbf{x}(t_0)$ 和

t_0到t时刻加在系统的输入向量$\mathrm{u}(t_0, t)$唯一确定。用式则可表示为：

$$\mathrm{x}(t)=\mathrm{F}\{\mathrm{x}(t_0), \mathrm{u}(t_0, t)\} \tag{1—1}$$

式中 $\mathrm{x}(t_0)$——初态向量；

$\mathrm{u}(t_0, t)$——从t_0到t的输入向量；

$\mathrm{F}\{\cdot\}$——表示一个单值向量函数。

类似地可写出在 t 时刻的输出向量与输入向量及状态向量的关系式：

$$\mathrm{Y}(t)=\mathrm{G}\{\mathrm{x}(t_0), \mathrm{u}(t_0, t)\} \tag{1—2}$$

这里$\mathrm{G}\{\cdot\}$表示单值向量函数。

式（1—1）和（1—2）分别称为系统的状态方程和输出方程（或观测方程）。这二个向量方程表述了系统输入、输出及状态变量三者之间的关系，构成了系统在状态空间的表达式。

考虑到一般情况下，控制系统的状态变量于暂态过程中是随时间而变化的。因此描述系统状态的方程不是代数方程，而是微分方程。所以状态方程和输出方程常分别表示成：

$$\dot{\mathrm{x}}(t)=\mathrm{F}[\mathrm{x}(t), \mathrm{u}(t)] \tag{1—3}$$

$$\mathrm{y}(t)=\mathrm{G}[\mathrm{x}(t), \mathrm{u}(t)] \tag{1—4}$$

若所论系统为线性时变系统，可用线性变系数微分方程表述时，向量函数$\mathrm{F}[\cdot]$、$\mathrm{G}[\cdot]$为线性关系。这时状态空间表达式则为

$$\dot{\mathrm{x}}(t)=\mathrm{A}(t)\mathrm{x}(t)+\mathrm{B}(t)\mathrm{u}(t) \tag{1—5}$$

$$\mathrm{y}(t)=\mathrm{C}(t)\mathrm{x}(t)+\mathrm{D}(t)\mathrm{u}(t) \tag{1—6}$$

式中的$\mathrm{A}(t)$是$n\times n$矩阵，称为系数矩阵（或系统矩阵）；$\mathrm{B}(t)$是$n\times l$矩阵，称为控制矩阵（或驱动矩阵）；$\mathrm{C}(t)$是$m\times n$矩阵，称输出矩阵；$\mathrm{D}(t)$是$m\times l$矩阵，称传递矩阵。以上各矩阵的元都为时间 t 的函数。

将上述系统在线性的状态空间描述表示成方块图，则如图 1—2 所示。

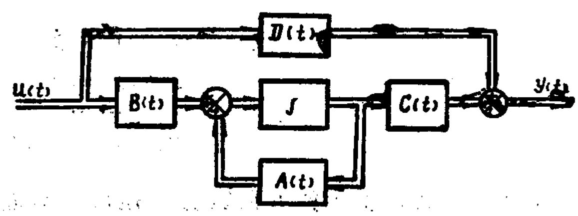

图 1—2

显然，当所论线性系统的特性不随时间变化，即对于线性定常系统，可用常系数微分方程来描述时，系统的状态空间表达式则可表示为：

$$\dot{\mathrm{x}}(t)=\mathrm{A}\mathrm{x}(t)+\mathrm{B}\mathrm{u}(t) \tag{1—7}$$

$$\mathrm{y}(t)=\mathrm{C}\mathrm{x}(t)+\mathrm{D}\mathrm{u}(t) \tag{1—8}$$

其中 A、B、C、D分别为$n\times n$、$n\times l$、$m\times n$及$m\times l$ 的常数阵。式（1—8）右边第二项$\mathrm{D}\mathrm{u}(t)$表示系统的输入通过D阵和输出有直接联系。在一般控制系统中$\mathrm{D}=0$，因而线性定常系统的状态空间表达式，常表作：

$$\dot{\mathrm{x}}(t)=\mathrm{A}\mathrm{x}(t)+\mathrm{B}\mathrm{u}(t) \tag{1—9}$$

$$\mathrm{y}(t)=\mathrm{C}\mathrm{x}(t) \tag{1—10}$$

从以上的表达式可见，系统的状态方程式是表述系统构造和性质的微分式，而输出方程则只是一种变量的变换式。通过下节对系统状态空间表达式建立的讨论，将会更具体地看清楚这一点。

第三节 化微分方程为状态空间表达式

系统的运动状况，一般常用微分方程来进行描述。就线性定常（时不变）系统而言，则可用常系数微分方程来作为它的数学模型。

设单输入单输出系统具有如下所示微分表述式：

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=b_0u^{(m)}+b_1u^{(m-1)}+\cdots+b_mu \tag{1—11}$$

式中 $y,y^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$——分别为系统的输出函数及其各阶导数；

$u,u^{(j)}(j=1,2,\cdots,m)$——分别为系统的输入函数及其各阶导数；

a_i,b_j——方程的系数。

本节将依据式（1—11），按两种不同输入情况来讨论状态空间表达式的建立。对于多输入多输出系统可采用类似的方法（见例1—4）；对于可用变系数微分方程描述的线性时变系统在本章第六节再予论述。

一、当输入函数不含导数项时

设系统的方程为：

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=u \tag{1—12}$$

根据微分方程理论知道，对于 n 阶微分方程式，如给定 $y(0)$，$\dot{y}(0)$，…，$y^{(n-1)}(0)$及$t>0$时的输入$u(t)$，则系统正时域的运动状态就能完全确定。因而我们可以选取 $y(t)$，$\dot{y}(t)$，…，$y^{(n-1)}(t)$ n个变量作为系统的一组状态变量，并将这些变量记为：

$$\begin{cases} x_1=y \\ x_2=\dot{x}_1=\dot{y} \\ x_3=\dot{x}_2=\ddot{y} \\ \quad\cdots\cdots \\ x_n=\dot{x}_{n-1}=y^{(n-1)} \end{cases} \tag{1—13}$$

于是式（1—12）所示的n阶微分方程可改写成n个一阶微分方程。即

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=x_3 \\ \quad\cdots\cdots \\ \dot{x}_{n-1}=x_n \\ \dot{x}_n=-a_nx_1-a_{n-1}x_2-\cdots-a_1x_n+u \end{cases} \tag{1—14}$$

及

$$y=x_1 \tag{1—15}$$

将上式写成矩阵形式，便可得系统的通过状态空间表达的状态方程式：

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots\cdots & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}u \tag{1—16}$$

输出方程式

$$y=[1\quad 0\cdots 0]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \tag{1—17}$$

将方程（1—16）及（1—17）写成式（1—9）（1—10）那样的形式：

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}$$

那末这里所表示的

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\qquad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \tag{1—18}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&0&\ddots&\vdots\\0&0&\vdots&\vdots&1\\-a_n&-a_{n-1}&-a_{n-2}&\cdots&-a_1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} \tag{1—19}$$

$$\mathbf{C}=[1\quad 0\cdots\cdots 0]$$

【例 1—1】设有图 1—3 所示的弹簧—质量—阻尼器系统，外作用力为 $p(t)$，输出量为质量的位移 $y(t)$，试求出该系统的状态空间表达式。

【解】根据牛顿定律可得系统的运动方程式：

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+f\frac{dy}{dt}+ky=p(t) \tag{1—20}$$

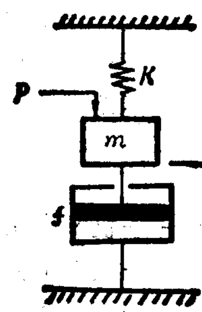

图 1—3

式中 m——质量；

f——粘性摩擦系数；

k——弹簧刚度。

今选状态变量：

$$x_1=y$$
$$x_2=\dot{y}$$

于是有

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=-\frac{k}{m}x_1-\frac{f}{m}x_2+\frac{p(t)}{m}$$

写成矩阵形式，则为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-\frac{k}{m}&-\frac{f}{m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{m}\end{pmatrix}p(t) \tag{1—21}$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \tag{1—22}$$

若表成统一形式

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}$$

针对本例，显然有

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{f}{m}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{1}{m}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

【例1—2】试求机车牵引电动机电枢两端输入一控制电压u_d时的状态空间表达式。

【解】牵引电机电枢回路方程为

$$L\frac{di}{dt}+Ri+E=u_d \tag{1}$$

式中 u_d——加到电枢两端的电压；

i——牵引电机的电枢回路电流；

L——牵引电机电枢回路的总电感；

R——牵引电机电枢回路的总电阻；

E——牵引电机的反电势。其值为

$$E=C_v\phi v \tag{2}$$

其中 C_v——牵引电机电势常数；

ϕ——牵引电机的磁通量；

v——列车速度。

列车的运动方程式为

$$F_s-F_c=M(1+\gamma)\frac{dv}{dt} \tag{3}$$

式中 F_s——机车牵引力；

F_c——列车阻力；

M——列车质量；

$1+\gamma$——列车换算系数。

每台牵引电机的动力学方程

$$f_s-f_c=\frac{M(1+\gamma)}{N}\ \frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{dt} \tag{4}$$

式中 N——机车上牵引电机的台数；

m——折算到每台牵引电机的换算质量，其值为

$$m=\frac{M(1+\gamma)}{N} \tag{5}$$

f_c——折算到每台牵引电机的阻力，其值为

$$f_c=\frac{F_c}{N} \tag{6}$$

f_s——机车上每台牵引电机所发挥的牵引力，其值为：

$$f_s=\frac{F_s}{N}=C_f\phi i \tag{7}$$

其中 C_f——电机的牵引力常数。

将式（7）代入式（4）有

$$C_f\phi i=m\frac{dv}{dt}+f_c \tag{8}$$

从而得

$$i=\frac{1}{C_f\phi}\left(m\frac{dv}{dt}+f_c\right) \tag{9}$$

将式（2），（9）代入到式（1），得

$$\frac{L}{C_f\phi}\frac{d}{dt}\left(m\frac{dv}{dt}+f_c\right)+\frac{R}{C_f\phi}\left(m\frac{dv}{dt}+f_c\right)+C_v\phi v=u_d$$

$$\frac{Lm}{C_f\phi}\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{Rm}{C_f\phi}\frac{dv}{dt}+C_v\phi v+\frac{Rf_c}{C_f\phi}+\frac{L}{C_f\phi}\frac{df_c}{dt}=u_d$$

$$\frac{Lm}{C_f\phi C_v\phi}\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{Rm}{C_f\phi C_v\phi}\frac{dv}{dt}+v=\frac{u_d}{C_v\phi}-\frac{L}{C_f\phi C_v\phi}\frac{df_c}{dt}-\frac{R}{C_f\phi C_v\phi}f_c$$

$$T_mT_l\frac{d^2v}{dt^2}+T_m\frac{dv}{dt}+v=\frac{u_d}{C_v\phi}-\frac{L}{C_f\phi C_v\phi}\frac{df_c}{dt}-\frac{R}{C_f\phi C_v\phi}f_c$$

式中 T_m——机电时间常数，其值为

$$T_m=\frac{Rm}{C_f\phi C_v\phi} \tag{10}$$

T_l——电磁时间常数，其值为

$$T_l=\frac{L}{R}$$

若不考虑阻力f_c，略去上式右端的后二项，则有

$$T_mT_l\frac{d^2v}{dt^2}+T_m\frac{dv}{dt}+v=\frac{u_d}{C_v\phi} \tag{11}$$

根据方程（11），取状态变量

$$x_1=v$$
$$x_2=\dot{v}$$

于是可得

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-\dfrac{1}{T_mT_l}x_1-\dfrac{1}{T_l}x_2+\dfrac{u_d}{T_mT_lC_v\phi}\end{cases}$$

$$y=x_1$$

状态空间表达式

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{1}{T_mT_l} & -\dfrac{1}{T_l}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{1}{T_mT_lC_v\phi}\end{pmatrix}u_d$$

$$y=[1\quad 0]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

二、当输入函数含有导数项时

设系统的运动方程式为

$$\begin{aligned}&y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny\\&=b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_nu\end{aligned}\tag{1—23}$$

方程的左边和式（1—12）相同，而右边除输入函数$u(t)$外，还包含$u(t)$的n阶导数。在这种情况下如仍按以前一样选y，$\dot{y}$，$\ddot{y}$，…，$y^{(n-1)}$作为一组状态变量，那末得到的n个一阶微分方程组将是：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\\dot{x}_2=x_3\\\vdots\\\dot{x}_n=-a_nx_1-a_{n-1}x_2-\cdots-a_1x_n+b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\cdots+b_nu\end{cases}\tag{1—24}$$

上式（1—24）最后一个方程中包含有输入函数的导数项，这是不希望的，因为这样可能使方程组解的存在性和唯一性被破坏。譬如输入$u(t)$为一阶跃函数，在$t=t_0$有一有限的跳跃，那末在$t=t_0$时$\dot{u}(t)$便成了脉冲函数$\delta(t)$，$u^{(i)}(t)$（$i=1,2,\cdots\cdots,n$）则成了高阶脉冲函数。显然，这样选得的一组变量，虽则知道初态x（t_0）及$t\geqslant t_0$时的输入，也难以确定出该系统在$t=t_0$以后的状况。因此它不具备作为状态变量的要求。

为使包含状态变量的n个一阶微分方程中，任何一个微分方程均不含有输入函数的导数项，可选下列n个变量：

$$\begin{cases}x_1=y-\beta_0u\\x_2=\dot{x}_1-\beta_1u=\dot{y}-\beta_0\dot{u}-\beta_1u\\x_3=\dot{x}_2-\beta_2u=\ddot{y}-\beta_0\ddot{u}-\beta_1\dot{u}-\beta_2u\\\cdots\cdots\\x_n=\dot{x}_{n-1}-\beta_{n-1}u=y^{(n-1)}-\beta_0u^{(n-1)}-\beta_1u^{(n-2)}-\cdots-\beta_{n-2}\dot{u}-\beta_{n-1}u\end{cases}\tag{1—25}$$

作为一组状态变量，其中β_0，β_1，…，β_{n-1}是待定常数。下面我们来确定这些常数的值。

对式（1—25）最后一方程的两边取导数，得

$$\dot{x}_n=y^{(n)}-\beta_0u^{(n)}-\beta_1u^{(n-1)}-\cdots-\beta_{n-2}\ddot{u}-\beta_{n-1}\dot{u}\tag{1—26}$$

分别依次用a_n、a_{n-1}、…、a_1乘式（1—25）中第1、第2、…、第n方程则得

$$\begin{cases} a_n x_1 = a_n y - a_n \beta_0 u \\ a_{n-1} x_2 = a_{n-1} \dot{y} - a_{n-1} \beta_0 \dot{u} - a_{n-1} \beta_1 u \\ a_{n-2} x_3 = a_{n-2} \ddot{y} - a_{n-2} \beta_0 \ddot{u} - a_{n-2} \beta_1 \dot{u} - a_{n-2} \beta_2 u \\ \cdots\cdots \\ a_1 x_n = a_1 y^{(n-1)} - a_1 \beta_0 u^{(n-1)} - a_1 \beta_1 u^{(n-2)} - \cdots - a_1 \beta_{n-2} \dot{u} - a_1 \beta_{n-1} u \end{cases} \tag{1—27}$$

把式（1—26）和式（1—27）中的n个方程加起来，得

$$\begin{aligned} & \dot{x}_n + a_n x_1 + a_{n-1} x_2 + a_{n-2} x_3 + \cdots + a_1 x_n \\ = & y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-2} \ddot{y} + a_{n-1} \dot{y} + a_n y - \beta_0 u^{(n)} - (\beta_1 + a_1 \beta_0) u^{(n-1)} \\ & - (\beta_2 + a_1 \beta_1 + a_2 \beta_0) u^{(n-2)} - \cdots - (\beta_{n-1} + a_1 \beta_{n-2} + \cdots + a_{n-2} \beta_1 + a_{n-1} \beta_0) \dot{u} \\ & - (a_1 \beta_{n-1} + a_2 \beta_{n-2} + \cdots + a_{n-1} \beta_1 + a_n \beta_0) u \end{aligned} \tag{1—28}$$

将方程（1—23）代入式（1—28），并加以整理，则得

$$\begin{aligned} & \dot{x}_n + a_n x_1 + a_{n-1} x_2 + a_{n-2} x_3 + \cdots + a_1 x_n \\ = & (b_0 - \beta_0) u^{(n)} + (b_1 - \beta_1 - a_1 \beta_0) u^{(n-1)} + (b_2 - \beta_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_2) u^{(n-2)} \\ & + \cdots + (b_{n-1} - \beta_{n-1} - a_1 \beta_{n-2} - \cdots - a_{n-2} \beta_1 - a_{n-1} \beta - a_{n-1} \beta_0) \dot{u} \\ & + (b_n - a_1 \beta_{n-1} - a_2 \beta_{n-2} - \cdots - a_{n-1} \beta_1 - a_n \beta_0) u \end{aligned} \tag{1—29}$$

令上式右边除最后一项外的其余各项的系数均为零，以消去上式中的输入函数的导数项。据此则可解出

$$\begin{cases} \beta_0 = b_0 \\ \beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 \\ \beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\ \cdots\cdots \\ \beta_{n-1} = b_{n-1} - a_1 \beta_{n-2} - \cdots - a_{n-2} \beta_1 - a_{n-1} \beta_0 \end{cases} \tag{1—30}$$

由于a_i（$i = 1, 2, \cdots, n$），b_j（$j = 1, 2, \cdots, n$）为已知值，因之按式（1—30）可顺序地确定出待定常数β_k（$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$）。并令

$$\beta_n = b_n - a_1 \beta_{n-1} - a_2 \beta_{n-2} - \cdots - a_{n-1} \beta_1 - a_n \beta_0 \tag{1—31}$$

于是式（1—29）变成

$$\dot{x}_n + a_n x_1 + a_{n-1} x_2 + \cdots + a_1 x_n = \beta_n u \tag{1—32}$$

将式（1—32）连同式（1—25）中后（$n-1$）个方程一起，可得一阶微分方程组：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \\ \cdots\cdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - a_{n-2} x_3 - \cdots - a_1 x_n + \beta_n u \end{cases} \tag{1—33}$$

以及

$$y = x_1 + \beta_0 u \tag{1—34}$$

写成矩阵形式，即得系统状态空间表达式。其中状态方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} u \qquad (1-35)$$

输出方程：

$$y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u \qquad (1-36)$$

将式（1—35）、（1—36）表示成统一形式：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \qquad (1-37)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \qquad (1-38)$$

其中

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \\ \hline -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{array}\right], \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad 0], \quad \mathbf{D} = \beta_0 = b_0$$

从所得的表达式（1—18）、（1—19）及（1—37）、（1—38），进一步可见，不论系统的输入是否含有$u(t)$的导数项，其系数矩阵**A**和输出矩阵**C**并无异样，$u(t)$的导数项只对控制矩阵**B**及传递矩阵**D**有影响。

考虑到一般系统的$b_0 = 0$，故通常表达式（1—38）中的**D** $= 0$。

【例1—3】已知给定系统的方程为

$$\dddot{y} + 4\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \ddot{u} + \dot{u} + 3u$$

试写出系统的状态空间表达式。

【解】由方程显见上式

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 1;$$

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 3。$$

利用式（1—30）及式（1—31）中β_k（$k = 0, 1, \cdots, n$）的定义，可算出

$$\beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = 1$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = -3$$

$$\beta_3=b_3-a_2\beta_2-a_2\beta_1-a_3\beta_0=13$$

把上结果代入式（1—25）则得状态变量

$$x_1=y-\beta_0 u=y$$
$$x_2=\dot{y}-\beta_0\dot{u}-\beta_1 u=\dot{y}-u=\dot{x}_1-u$$
$$x_3=\ddot{y}-\beta_0\ddot{u}-\beta_1\dot{u}-\beta_2 u=\dot{x}_2-\beta_2 u=\dot{x}_2+3u$$

于是利用式（1—33）可得一阶微分方程组：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2+u\\ \dot{x}_2=x_3-3u\\ \dot{x}_3=-x_1-2x_2-4x_3+13u\end{cases}$$

将上式写成矩阵形式，或直接利用（1—37）（1—38）式，即得状态空间表达式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ -3\\ 13\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

【例1—4】试求机车牵引电动机在受到负载影响时的状态空间表达式。

【解】由例1—2已经导得牵引电动机当考虑到负载变化时的运动方程式为

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{T_l}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{T_mT_l}v=\frac{u_d}{C_v\phi T_mT_l}-\frac{L}{C_f\phi C_v\phi T_mT_l}\frac{df_c}{dt}-\frac{Rf_c}{C_f\phi C_v\phi T_mT_l}$$

即

$$\ddot{v}+a_1\dot{v}+a_2v=b_2u_d+c_1\dot{f}_c+c_2f_c \qquad (1)$$

其中

$$a_1=\frac{1}{T_l}$$
$$a_2=\frac{1}{T_mT_l}$$
$$b_2=\frac{1}{C_v\phi T_mT_l}$$
$$c_1=-\frac{L}{C_f\phi C_v\phi T_mT_l}$$
$$c_2=-\frac{R}{C_f\phi C_v\phi T_mT_l}$$
$$T_m=\frac{Rm}{C_f\phi C_v\phi}$$
$$T_l=\frac{L}{R}$$

选状态变量

$$x_1=v-\beta_0u_d-\alpha_0f_c$$