高等学校教学参考书

高等数学讲义

下　　册

樊映川等编

人民教育出版社

高等数学讲义
下　册

樊映川等编

人民教育出版社（北京沙滩后街）
上海市印刷四厂印装
新华书店上海发行所发行
各地新华书店经售

统一书号 13012·068　开本 787×1092 1/32　印张 7 2/16
字数 189,000　3,273,001—3,373,000　定价 ¥(5) 0.56
1958年4月第1版　1964年10月第2版
1980年9月上海第35次印刷

下册目录

第二篇　数学分析(續)

第二篇　数学分析(續)

第十章　級数

I. 常数項級数

§10.1 无穷級数概念

設已給数列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$, 則式子

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

或簡写为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

叫做无穷級数，或就叫做級数，其中第 n 項 u_n 叫做級数的一般項。

作級数的前 n 項的和

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$

可得到另一个数列:

$$s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots.$$

根据这个数列有沒有极限，我們可以引进无穷級数(1)的收斂或发散的概念。

定义　当 n 无限增大时，若数列 s_n 趋近于一个极限(有限的):

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n,$$

就叫无穷級数(1)收斂，这时极限值 s 叫做級数(1)的和，并写成

$$s=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots;$$

若 s_n 沒有极限，就叫无穷級数(1)发散。

当无穷級数收斂时，其前 n 項的和 s_n 是級数的和 s 的近似値，它

們之間的差值

$$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

叫做級数的 n 項后的余項. 用近似值 s_n 代替和 s 所产生的誤差是这个余項的絕对值, 即誤差是 $|r_n|$.

最簡单的无穷級数之一是**几何級数**:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots, \tag{2}$$

其中 r 叫做級数的公比. 現在来考虑它的斂散性.

今若 $|r| \neq 1$, 則

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}.$$

当 $|r| < 1$ 时, 由于 $\frac{ar^n}{1-r} \to 0$, 故 $s_n \to \frac{a}{1-r}$, 这时几何級数收斂, 其和为 $\frac{a}{1-r}$. 当 $|r| > 1$时, 由于 $\frac{ar^n}{1-r} \to \infty$, 故 $s_n \to \infty$, 因而几何級数发散. 当 $r = 1$ 时, $s_n = na \to \infty$, 故級数发散. 当 $r = -1$ 时, 級数成为 $a - a + a - a + \cdots$, 显見 s_n 随 n 为奇数或为偶数而等于 a 或等于零, 故极限不存在, 从而級数发散. 綜合上述結果, 我們得到: **若几何級数之公比 r 的絕对值 $|r| < 1$ 时, 則此級数收斂, 若 $|r| \geq 1$ 时, 則級数发散.**

§ 10.2 无穷級数的基本性质 收斂的必要条件

1°若級数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

收斂于和 s, 則每項乘以一个不为零的常数 k 所得的級数

$$ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n + \cdots$$

收斂于和 ks.

因为級数的前 n 項的和是

$$\sigma_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = ks_n,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} ks_n = k \lim_{n\to\infty} s_n = ks.$$

又若 s_n 沒有极限，σ_n 也不可能有极限．所以級数的各項乘一不为零的常数后它的斂散性总是不变的．

2° 收斂級数可以逐項相加或逐項相減，就是說，若有两收斂級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=s,$$

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots=\sigma,$$

則級数 $$(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)+\cdots$$

必收斂于和 $s\pm\sigma$.

这是因为最后一个級数的前 n 項的和

$$(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)=$$

$$=(u_1+u_2+\cdots+u_n)\pm(v_1+v_2+\cdots+v_n)=$$

$$=s_n\pm\sigma_n\to s\pm\sigma.$$

3° 在級数前面加上有限項或去掉有限項，不会影响級数的斂散性，不过在收斂情形时，一般說来級数的和要改变的．

为确定起見，我們考虑下面两个級数

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots,\quad u_3+u_4+u_5+u_6+\cdots,$$

第二个是由第一个去掉前两項所得到的．仍用 s_n 表示第一个級数的前 n 項的和，用 σ_n 表示第二个級数的前 n 項的和，显然有

$$\sigma_{n-2}=s_n-(u_1+u_2),\quad s_n=\sigma_{n-2}+(u_1+u_2).$$

由此可見，当 $n\to\infty$ 时，σ_{n-2}、s_n 或同时具有极限 σ、s 或同时沒有极限；在有极限时，其間关系为 $\sigma=s-(u_1+u_2)$.

4° 收斂級数加括弧后所成的級数仍然收斂于原来的和 s.

設級数

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\cdots=s,$$

按照某一規律加括弧后所成的級数为

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots.$$

用 σ_m 表示第二个級数的前 m 項的和，用 s_n 表示相当于 σ_m 的第一个級数的前 n 項的和，这就是說，

$$\sigma_1 = s_2,\quad \sigma_2 = s_5, \cdots, \sigma_m = s_n, \cdots.$$

由此可見，当 $m\to\infty$ 时，$n\to\infty$，于是

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m = \lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

于是又得到，若加括弧后所成的級数发散，則原来級数也必发散，因若收斂，那末根据剛才所证，加括弧后的級数就应收斂了.

此外，收斂級数去括弧后所成的級数不一定仍是收斂的．例如級数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots$$

显然收斂于零，但級数

$$1-1+1-1+-\cdots.$$

却是发散的．若所論級数是正項級数(即各項 $u_n \geqslant 0$)，則无論加括弧或去括弧都不会影响它的斂散性①.

5° 收斂性的必要条件　若級数(1)收斂，則当 n 无限增大时，它的一般項 u_n 必趋近于零：

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

因为

$$u_n = s_n - s_{n-1},$$

所以

$$\lim u_n = \lim(s_n - s_{n-1}) =$$
$$= \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0.$$

由此可知：**若級数的一般項不趋近于零，則級数发散.** 但一般項趋近于零并不是收斂的充分条件，有些級数纵然一般項趋近于零，仍然是发散的．例如**調和級数**

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots, \tag{2}$$

它的一般項 $u_n = \dfrac{1}{n}\to 0$，我們不难证明它是发散的．順序把級数(2)的

① 这是因为从单調增加的数列中抽出来的任何子数列必与原来数列同时趋近于无穷大或同时趋近于同一极限的緣故.

一項、两項、四項、八項、…括在一起:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots,$$

这个加括弧的級数的各項显然大于級数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

对应的各項，而后一級数前 n 項的和等于 $n\cdot\frac{1}{2}$，故发散于 $+\infty$，于是加括弧后的級数也发散于 $+\infty$，因而調和級数(2)也必发散于 $+\infty$.

§10.3 正項級数 收斂性的充分判定法

在前两节中所讲的都是任意項級数，即級数中各項可以是正数、負数、或者零. 現在我們只討論正項級数(各項$u_n\geqslant 0$). 这个情形特别重要，以后可以看到許多任意項級数收斂性的問題会归結为正項級数收斂性的問題. 在下面我們先讲基本的比較判定法，然后再由此推出在实用上很方便的比值法、根值法和积分法.

設級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

是一个正項級数，显然它的前 n 項的和 s_n 是一个单調增加数列: $s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant s_n\leqslant\cdots$. 如果数列 s_n 为有界，即 s_n 恒小于某一定数M，則級数收斂于和 $s\leqslant M$(§ 2.7 极限存在准則 Ⅱ). 反之，若正項級数(1)收斂于和 s，即 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$，則数列为有界(§ 2.2). 所以，**正項級数(1)为收斂的必要且充分条件是，它的前 n 項的和所构成的数列 s_n 为有界.**

根据这个原理，我們取另一正項級数

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots, \tag{2}$$

把它与級数(1)作比較.

若級数(2)收斂于和 σ, 并且 $u_n\leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$, 則

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant v_1+v_2+\cdots+v_n<\sigma,$$

即 s_n 恒小于这个定数 σ, 故可肯定級数(1)收斂.

若級数(2)发散于 $+\infty$, 并且 $u_n\geqslant v_n(n=1,2,\cdots)$, 則

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\geqslant v_1+v_2+\cdots+v_n=\sigma_n\to+\infty,$$

即級数(1)也发散.

因此, 我們证得

比較判定法 **若級数(2)收斂, 并且 $u_n\leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$, 則級数(1)也收斂; 若級数(2)发散, 并且 $u_n\geqslant v_n(n=1,2,\cdots)$, 則級数(1)也发散.**

注意到級数各項乘以不为零的常数 k、以及去掉級数前面的有限項不会改变級数的斂散性, 我們立刻得到

推論 **若級数(2)收斂, 并且从某項起(例如第 N 項起), $u_n\leqslant kv_n$, 則級数(1)也收斂; 若級数(2)发散, 并且从某項起, $u_n\geqslant kv_n(k>0)$, 則級数(1)也发散.**

例 作为比較判定法的一个例子, 我們来討論 p-級数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots,\quad \text{常数 } p>0. \tag{3}$$

現在要分別证明**当 $p\leqslant1$ 时級数发散; $p>1$ 时級数收斂.**

設 $p\leqslant1$. 这时級数的每一項不小于調和級数的对应項: $\dfrac{1}{n^p}\geqslant\dfrac{1}{n}$; 但調和級数发散, 故当 $p\leqslant1$ 时級数(3)发散.

例如級数 $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots$发散.

設 $p>1$. 順序把級数(3)的一項、两項、四項、八項…括在一起

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{7^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right)+\cdots, \tag{4}$$

它的各項显然小于級数

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)+\cdots=$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\cdots$$

对应的各項；而后一級数是几何級数，其公比 $r=\frac{1}{2^{p-1}}<1$，故收斂．于是，当 $p>1$ 时，級数(4)收斂，又因为收斂的正項級数去括弧后仍收斂，所以級数(3)收斂．

例如級数 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$ 收斂．

取一几何級数作为級数(2)来与已給級数比較，我們能得到在实用上极方便的两个充分判定法：比值法与根值法．

比值判定法　設正項級数(1)之后項与前項的比值的极限等于 ρ：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,$$

則当 $\rho<1$ 时級数收斂；$\rho>1\left(\text{或}\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty\right)$ 时級数发散；$\rho=1$ 时級数可能收斂或可能发散．

我們分别证明如下：

(i) 設 $\rho<1$．选定一个适当小的正数 ε 使得 $\rho+\varepsilon=r<1$．根据极限定义，当 $n\geqslant m$ 时，我們有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon=r.$$

因此

$$u_{m+1}<ru_m,\ u_{m+2}<ru_{m+1}<r^2u_m,\ u_{m+3}<ru_{m+2}<r^3u_m,\ \cdots;$$

而級数
$$u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots$$
的各項就小于公比为 $r<1$ 的收斂几何級数
$$ru_m+r^2u_m+r^3u_m+\cdots$$
的对应項，所以它是收斂的．由于已給級数(1)比它只多了前面 m 項，

因此也是收斂的了(前节基本性质 3°).

(ii) 設 $\rho>1$. 选定一个适当小的正数 ε 使得 $\rho-\varepsilon>1$. 根据极限定义，当 $n\geqslant m$ 时，就有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\rho-\varepsilon>1,$$

也就是

$$u_{n+1}>u_n.$$

因之，当 $n\geqslant m$ 时，級数的一般項 u_n 是增大着的，当 n 无限增大时它不可能趋近于零，所以級数发散(前节基本性质 5°). $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty\right.$ 时，证明亦同).

(iii)設 $\rho=1$. 我們注意到当 n 无限增大时，若比值$\frac{u_{n+1}}{u_n}$是由大于或等于 1 而趋近于极限 $\rho=1$ 时，显然一般項 u_n 不能趋近于零，故級数发散. 一般而論，在 $\rho=1$ 的情形下，比值判定法不能解决級数的斂散性的問題. 例如 p- 級数(3)当 $n\to\infty$ 时均有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^p\to 1,$$

但我們知道 $p\leqslant 1$ 时級数发散；而 $p>1$ 时級数收斂. 因此只根据 $\rho=1$ 不能断定級数是收斂或是发散.

在上面判定法的证明中，我們看到如果級数自某項起，适合不等式:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<r<1,$$

则不論$\frac{u_{n+1}}{u_n}$是否趋向极限，級数总是收斂的，因为級数从某項起各項均小于收斂几何級数的对应項.

如果上面的不等式自某 n 項起成立，则我們取級数前 n 項的和 s_n 作为和 s 的近似值，这时所产生的誤差 r_n 可估計如下:

$$r_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots<ru_n+r^2u_n+\cdots=\frac{ru_n}{1-r}.$$

例 1. 研究下面級数的收斂性并估計誤差:

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}+\cdots.$$

解 第 n 項为

$$u_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)},$$

而
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}:\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}=\frac{1}{n}\to 0.$$

这时 $\rho=0<1$, 故級数收斂.

誤差 r_n 为

$$\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\right)<$$

$$<\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots\right)=\frac{1}{(n-1)\cdot(n-1)!}.$$

例 2. 研究級数

$$\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+\cdots.$$

解
$$u_n=\frac{1\cdot 2\cdots n}{10^n},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1\cdot 2\cdots(n+1)}{10^{n+1}}:\frac{1\cdot 2\cdots n}{10^n}=\frac{n+1}{10}\to\infty.$$

这时 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$, 故級数发散.

例 3. 研究級数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots.$$

解
$$u_n=\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n-1)\cdot 2n}{(2n+1)(2n+2)}\to 1.$$

这时 $\rho=1$, 比值判定法失效. 但显然可見級数的各項小于收斂級数

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

的对应項, 根据比較法它是收斂的.

根値判定法 **設正項級数(1)的一般項 u_n 的 n 次根的极限等于 ρ:**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho,$$

則当 $\rho<1$ 时級数收斂; $\rho>1$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\infty$) 时級数发散; $\rho=1$ 时級数可能收斂或可能发散。

这个判定法的证法基本上与比值判定法的相同.

(i) 設 $\rho<1$. 当 $n\geqslant m$ 时, 我們有

$$\sqrt[n]{u_n}<\rho+\varepsilon=r<1.$$

因此 $$u_m<r^m,\quad u_{m+1}<r^{m+1},\quad u_{m+2}<r^{m+2},\cdots,$$

而級数 $$u_m+u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots$$

的各項就小于公比 $r<1$ 的收斂几何級数

$$r^m+r^{m+1}+r^{m+2}+\cdots$$

的对应項. 于是, 級数(1)收斂.

(ii) 設 $\rho>1$. 这时 $u_n\geqslant1$, $u_{n+1}\geqslant1$, $\cdots$, (1)的一般項不能趋近于零, 故必发散.

(iii) 設 $\rho=1$. 仍可取 p-級数为例. $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}=\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p\to1$ (因为当 $x\to+\infty$ 时未定式 $x^{\frac{1}{x}}\to1$, 故 $n^{\frac{1}{n}}\to1$), 这就說明了 $\rho=1$ 时級数可能收斂也可能发散.

在上面根値判定法的证明中, 我們也看到如果級数自某項起, 适合不等式:

$$\sqrt[n]{u_n}<r<1,$$

則不論 $\sqrt[n]{u_n}$ 是否趋向极限, 級数总是收斂的, 因为級数从某項起各項均小于收斂几何級数的对应項. 并且以和 s_n 作为和 s 的近似值时所产生的誤差 r_n 可估計为

$$r_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots<r^{n+1}+r^{n+2}+\cdots=\frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

例 4. 研究級数的收斂性并估計誤差:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots.$$

解 $$\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\frac{1}{n}\to0,$$

故級数收斂. 誤差 r_n 为

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)^{n+2}}+\frac{1}{(n+3)^{n+3}}+\cdots<$$

$$<\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+1)^{n+2}}+\frac{1}{(n+1)^{n+3}}+\cdots=\frac{1}{n(n+1)^{n}}.$$

积分判定法 設級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

的各項可以看作是区間 $[1,\infty)$ 上正的减函数 $f(x)$（連续的）对应于 $x=1, 2, \cdots, n, \cdots$ 的各个值:

$$u_1=f(1),\quad u_2=f(2),\cdots,\quad u_n=f(n),\cdots,$$

則广义积分

$$I=\int_1^{\infty} f(x)dx$$

收斂或发散时，級数也随之收斂或发散.

考察曲綫 $y=f(x)$ 与纵綫 $x=1, x=n$ 及 x 軸所圍成的面积:

$$I_n=\int_1^n f(x)dx.$$

由图 10.1 可見这个面积小于 $(n-1)$ 个高出于曲綫上面的矩形之和 $u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}=s_n-u_n$，而大于低入于曲綫下面的 $(n-1)$ 个矩形之和 $u_2+u_3+\cdots+u_n=s_n-u_1$，故有

$$s_n-u_1<I_n<s_n-u_n.$$

由此，即得不等式

$$s_n<I_n+u_1 \text{ 及 } s_n>I_n.$$

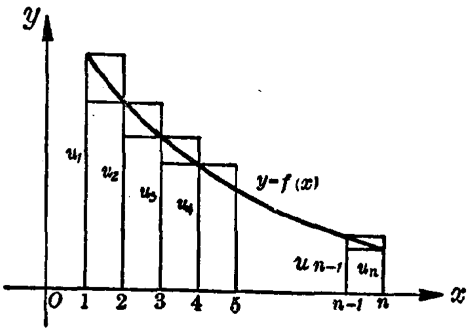

图 10.1

先設 $I=\lim I_n$ 存在. 根据前一不等式，則单調增加数列 $s_n<I+u_1$ 是有界的，因之它必具有极限而級数 (1) 收斂. 次設 $\lim I_n=\infty$. 根据后一不等式，則有 $\lim s_n=\infty$，故极限不存在而級数(1)发散. 证明完毕.

下面举一个例子說明有时用比值法或根值法所不能解决的問題却很容易用积分法来解决.

例 5. 用积分判定法研究 p-級数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \quad (p>0)$$

的斂散性.

解 这时 $u_n=\frac{1}{n^p}$, 可取 $f(x)=\frac{1}{x^p}$. 根据§8.8例2, 我們知道广义积分

$$I=\int_1^\infty\frac{dx}{x^p}$$

当 $p\leqslant 1$ 积分发散, 当 $p>1$ 积分收斂而等于 $\frac{1}{p-1}$. 于是根据积分判定法仍然得到我們在前面用比較法所证出的結果: 若 $p\leqslant 1$ 已給級数发散, 若 $p>1$ 級数收斂。

§10.4 任意項級数 絕对收斂

現在讲任意項級数, 即級数中各項可以有正数、負数、或者零. 首先讲交錯級数. 所謂交錯級数是这样的級数, 它的各項是正負相間的, 从而可以写成下面的形状:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots, \tag{1}$$

其中 $u_1, u_2, \cdots$ 是正数. 我們来证明萊布尼茲关于交錯級数收斂性的定理:

定理 1. 若交錯級数(1)满足条件:

1° $u_n\geqslant u_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$

2° $\lim u_n=0$,

則級数收斂, 其和 $s\leqslant u_1$, 其余項 r_n 的絕对值 $|r_n|\leqslant u_{n+1}$.

证 先证明前 $2n$ 項的和的极根 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$ 存在。

把級数的前 $2n$ 項写成两种形式:

$$s_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})$$

及

$$s_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n},$$

由条件 1° 知道所有括弧中的差都不能为負. 首先由第一行可見 s_{2n} 随 n 增大而增大, 由第二行可見 s_{2n} 恒小于 u_1. 根据极限存在准則Ⅱ(§2.7)知道, 当 n 无限增大时, s_{2n} 趋近于一个极限 s, 并且 s 不大于

u_1：

$$\lim s_{2n}=s\leqslant u_1.$$

此外，因 $u_{2n+1}\to 0$，我們又有

$$s_{2n+1}=s_{2n}+u_{2n+1}\to s.$$

于是，已給級数的前偶数項的和与奇数項的和趋近于同一极限 s，即級数(1)的前 n 項和 s_n 有极限 s. 这就证明了級数(1)收斂于和 s，且 $s\leqslant u_1$.

最后，不难看出余項 r_n 可以写成

$$r_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots),$$

其絕对值
$$|r_n|=u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots$$

也是个交错級数，也滿足收斂的两个条件，故其和不大于这級数的第一項，也就是說

$$|r_n|\leqslant u_{n+1}.$$

定理证毕.

例 交錯級数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

滿足条件

$1°$ $u_n=\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}=u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 及 $2°$ $\lim u_n=\lim\dfrac{1}{n}=0$,

所以它是收斂的. 在 § 10.12 将会看到它的和是

$$s=\ln 2<1(=u_1).$$

若取前 n 項的和

$$s_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

作为 s 的近似值，所生誤差是 $|r_n|<\dfrac{1}{n+1}(=u_{n+1})$.

設任意項級数为

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \tag{2}$$