最优化计算方法

杜藏 编著

天津大学出版社

最优化计算方法

杜　藏　编著

天津大学出版社

内容提要

本书以简练的语言详细论述了各种最优化计算方法，主要内容有凸分析、最优解条件、线性规划、无约束最优化方法和约束最优化方法.

本书可作为本科生教材和其它各类学校师生的参考书.

最优化计算方法
杜 藏 编著
*
天津大学出版社
（天津大学内）
邮编：300072
天津市宝坻县第二印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行
*
开本：850×1168 毫米 1/32 印张：6 5/8 字数 172 千
1996 年 6 月第一版 1996 年 6 月第一次印刷
印数：1—1000
ISBN 7－5618－0866－6
0. 定价：9.00 元

前　言

有许多领域中，如资源分配、生产组织、无线电通讯、系统工程、空间技术、军事科学等，设计或决策问题常常归结为各种形式的最优化问题. 多年的发展表明，最优化方法已经形成了一门生气勃勃的重要学科. 它伴随着现代社会的不断进步，正以更加完善的理论、实用而有效的算法和丰富多彩的应用等渗透到众多边缘学科中，发挥着越来越重要的作用. 最优化技术已成为现代科技人员从事科学研究与生产实践的有力工具.

目前，高等学校中许多专业都设置了不同层次的最优化计算方法课程. 最优化理论的独特结构体系，最优化计算方法的巧妙构造技术，最优化应用的斑烂色彩可以训练学生的素质，为他们成材打下基础.

本教材曾作为南开大学计算数学及其应用软件专业最优化方法课程的讲义. 该讲义已使用了十几年，现在整理成书. 在理论上，本书以最优性条件为主干，对最优解的条件进行了简练透彻的描述. 这是最优化算法的基础. 对于算法的介绍，则侧重其构造原理、计算过程及收敛性分析.

由于作者水平有限，本书可能有不妥之处，恳请读者指正.

作者

1996.1

目　录

第一章 引　言

在本书开头，先给出最优化问题的一般形式. 请看以下几例.

例 1.（数据拟合问题）理论上已知变量 y 是 t 的函数，即 $y=y(t,x)$. 其中 t 为实变量，而 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 是 n 个参数构成的向量. 例如，金属杆的长度是温度 t 的函数，即 $y=y_0(1+x_1t+x_2t^2)$. 现在用数据拟合方法确定参数 x，而得到 y 对 t 的一个实验公式.

在实验室中，设对 t_i 测得函数值 $y_i(i=1,\cdots,m)$，$m\gg n$. 因此，参数 x 可由下面问题的解确定：

$$\min \sum_{i=1}^{m}(y(t_i,x)-y_i)^2$$

当然，有时还要求某些参数 x_i 满足一些附加的条件.

例 2.（投资问题）某部门以总数为 a 的资金计划在 m 个项目中投资. 设对第 i 个项目的投资额 a_i 可得收益 b_i. 请设计最佳投资方案.

为了使收益最大，投资决策的数学模型应为

$$\max \sum_{i=1}^{m} b_i x_i$$

$$\text{s.t} \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \leqslant a$$

$$x_i(x_i-1)=0, i=1,\cdots,m$$

其中 x_i 为决策变量. $x_i=1$ 时决定对第 i 项投资；$x_i=0$ 时决定对第 i 项不投资. s. t 为 Subject to 的字头，其后给出的关系式为约束条件.

为了使利率最高，投资方案的数学模型应为

$$\max \sum_{i=1}^{m} b_i x_i / \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$$

$$\text{s. t} \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \leqslant a$$

$$x_i(x_i - 1) = 0 \qquad i = 1, \cdots, m$$

例 3.（极小化填充量问题）对已知的稀疏矩阵 A，有稀疏的线性代数方程组 $Ax=b$. 下面给出用消元法求解时的选主原则. 在一步消元过程中，系数矩阵中原来为 0 的元素可能变成非 0. 这些新增加的非 0 元个数称为这步消元过程的填充量. 填充量与主元的选择有关. 为了保持矩阵的稀疏性，每步消元的填充量应尽量少. 为了控制舍入误差的传播与积累，主元值又不能过分小. 设 $\varepsilon>0$ 为主元容许限，则主元 a_{pq} 应满足 $|a_{pq}|>\varepsilon$. 以下只讨论第一步消元的情形，其余各步与此类似. 对已知的 A，设 $B=(b_{ij})$ 及 $\overline{B}=(\overline{b}_{ij})$ 按如下定义：

$$b_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若 } a_{ij}\neq 0\\ 0 & \text{若 } a_{ij}=0\end{cases}$$

$$\overline{b}_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若 } a_{ij}=0\\ 0 & \text{若 } a_{ij}\neq 0\end{cases}$$

以 a_{ij} 为主元的消元公式为

$$a_{ij}^{(1)}=a_{ij}-a_{iq}a_{pj}/a_{pq} \qquad (i\neq p, j\neq q)$$

因此，(i,j) 元素产生填充量的条件为 a_{ij} 为 0，而 $a_{ij}^{(1)}$ 非 0. 即，当 $e_p^T B e_j \cdot e_i^T \overline{B} e_j \cdot e_i^T B e_q = 1$ 时，(i,j) 处产生填充量. 这样，整个消元一步的填充量为

$$Q_{pq}=\sum_{ij=1}^{n} e_p^T B e_j e_i^T \overline{B} e_j e_i^T B e_q$$

当 A 对称且只在主对角线上选主时，填充量的计算可由 $Q_{pq}=(e_p^T Bv-1)^2$ 给出. 其中 v 为全 1 向量. 于是，主元的选择可由下面问题确定：

$$\min\ e_p^T Bv$$
$$\text{s.t}\ |a_{pp}|>\varepsilon$$

若 t 为该问题的解，则 a_{tt} 可作为第一步消元过程的主元.

上面均为最优化问题，其数学模型为在某些等式与不等式的约束条件下优化某个函数. 各种形式的优化问题都容易化成下面的形式

$$\begin{aligned}&\min\ f(x)\\&\text{s.t}\quad g_i(x)\geqslant 0\quad i=1,\cdots,m\\&h_j(x)=0\quad j=1,\cdots,l\end{aligned}\tag{1-1}$$

其中 f、g_i 及 h_j 为 n 元实值函数. 如果记

$$g(x)=(g_1(x),\cdots,g_m(x))^T$$
$$h(x)=(h_1(x),\cdots,h_l(x))^T$$

则问题(1－1)可写为

$$\begin{aligned}&\min\ f(x)\\&\text{s.t}\quad g(x)\geqslant 0\\&h(x)=0\end{aligned}\tag{1-2}$$

今后称 $f(x)$ 为目标函数，是优化的对象，称 $g_i(x)$ 为不等式约束函数，称 $h_j(x)$ 为等式约束函数. 而

$$S=\{x\,|\,g(x)\geqslant 0,h(x)=0\}$$

为问题的可行域. $x\in S$ 时，称 x 为可行解(点).

如果 $x^*\in S$，对任意 $x\in S$ 都有 $f(x)\geqslant f(x^*)$，则称 x^* 为问题的整体最优解. 有时也叫整体极小或整体解. 如果 x^* 是整体解，当 $x\neq x^*$ 时有 $f(x)>f(x^*)$，则称 x^* 为强整体最优解或强整体解. 如果对 $x^*\in S$ 有 $\delta>0$，当 $x\in N_\delta(x^*)\cap S$ 时，有 $f(x)\geqslant f(x^*)$，则称 x^* 为问题的局部最优解或局部极小、局部解. 其中

$$N_\delta(x^*)=\{x\,|\,\|x-x^*\|<\delta\}$$

式(1－1)中，若目标函数和约束条件都是线性的，则称为线性最优化问题或线性规划；否则为非线性最优化问题或非线性规划；目标函数为二次而约束条件为线性的最优化问题为二次规划.

第二章　凸分析初步

本章介绍 n 维欧氏空间 E_n 中凸集及 n 元凸函数的有关概念和性质. 这是最优化问题的数学基础知识. 下面所用记号 x_i^k 表示 E_n 空间中点 x^k 的第 i 个分量,其中 k 为足标.

2.1　凸集

已知集合 $S\subset E_n$,如果对任意 x^1、$x^2\in S$ 及 $\lambda\in(0,1)$有

$$\lambda x^1+(1-\lambda)x^2\in S$$

则称 S 为凸集.

从几何上看,凸集内任意两点为端点的线段仍含于其中.

由凸集的上述定义不难看出下面诸集均凸:

①超平面 $H=\{x\mid p^Tx=\alpha\}$. 其中 $p\neq0$ 为 H 的法向量,α 为纯量.

②半空间 $S=\{x\mid p^Tx\leqslant\alpha\}$.

③m 个半空间的交 $S=\{x\mid Ax\leqslant b\}$,其中 A 为 $m\times n$ 的矩阵.

④线性规划问题

$$\begin{aligned}\min\quad & C^Tx\\ \text{s.t}\quad & Ax=b\\ & x\geqslant0\end{aligned}$$

的解集.

利用凸集的定义,可以证明以下简单性质:

①若 X 为凸集,A 为 $m\times n$ 阶矩阵,则

$$AX=\{y\mid y=Ax,x\in X\}$$

为凸集.

②设 $X_i(i=1,\cdots,m)$ 为 m 个凸集，则它们的交 $\bigcap_{i=1}^{m} X_i$ 为凸集.

③S 凸的充分必要条件是，对任意整数 $k\geqslant 2$，若 $x^1,\cdots,x^k\in S$，则 $x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x^i\in S$. 其中 $\lambda_i\geqslant 0,i=1,\cdots,k$，而且 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$（此时称 x 为 $x^1,\cdots,x^k$ 的凸组合）.

④若 S_1,S_2 凸，则 $S_1\pm S_2=\{x\mid x=x^1\pm x^2,x^1\in S_1,x^2\in S_2\}$ 凸.

任给集合 S，可以由此生成不同的凸集，特别可以生成凸包. S 中任意有限个点的凸组合构成的集合称为 S 的凸包，记为 $H(S)$.

显然，对 $x\in H(S)$，就有 $x^1,\cdots,x^k\in S$ 及 $\lambda_i\geqslant 0,i=1,\cdots,k$，$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$，使得 $x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x^i$.

凸包有下面的重要性质：

定理1 任给 $x\in H(S)$，有 $x^1,\cdots,x^{n+1}\in S$，使得

$$x=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x^i$$

其中 $\lambda_i\geqslant 0,i=1,\cdots,n+1$，且 $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1$.

证明 由凸包的定义，对 $x\in H(S)$ 有

$$x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x^i$$

其中 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1,\lambda_i>0,x^i\in S,i=1,\cdots,k$. 如果 $k\leqslant n+1$，则表明定理结论已成立. 若 $k>n+1$，则 $x^2-x^1,\cdots,x^k-x^1$ 线性相关，于是有不全为零的 $\mu_2,\cdots,\mu_k$ 及 $\mu_1=-\sum_{i=1}^{k}\mu_i$，使得

$$\sum_{i=1}^{k}\mu_i x^i=0$$

而且 $\mu_i(i=1,\cdots,k)$ 中至少有一个为正. 因此，对任意实数 α 有

$$x=\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i-\alpha\mu_i)x^i$$

取

$$\alpha=\min\{\frac{\lambda_i}{\mu_i}|\mu_i>0\}=\frac{\lambda_j}{\mu_j}$$

则有

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i-\alpha\mu_i)=1,\lambda_i-\alpha\mu_i\geqslant 0,i=1,\cdots,k$$

而且 $\lambda_j-\alpha\mu_j=0$. 即，x 最多为 $k-1$个点的凸组合. 重复上述过程，直到 x 表示为 $n+1$个点的凸组合. 证完.

2.2 凸集的闭包和内部

点 x 的 ε 邻域记为 $N_\varepsilon(x)=\{y|\|y-x\|<\varepsilon\}$. 对已知的集合 S，其闭包、内部和边界分别记为 $\mathrm{cl}S$，$\mathrm{int}S$ 和 ∂S，它们的定义如下：

$$\mathrm{cl}S=\{x|\forall\ \varepsilon>0,N_\varepsilon(x)\cap S\neq\Phi\}$$

$$\mathrm{int}S=\{x|\exists\ \varepsilon>0,N_\varepsilon(x)\subset S\}$$

$$\partial S=\{x|\forall\ \varepsilon>0,N_\varepsilon(x)\cap S\neq\Phi,N_\varepsilon(x)\cap\overline{S}\neq\Phi\}$$

凸集的闭包和内部有以下性质：

定理1 设 S 为凸集（其内部不空），$x^1\in\mathrm{cl}S$，$x^2\in\mathrm{int}S$. 则对 $\forall\ \lambda\in(0,1)$有

$$\lambda x^1+(1-\lambda)x^2\in\mathrm{int}S$$

证明 因为 $x^2\in\mathrm{int}S$，有 $\varepsilon>0$使得

$$\{z|\|z-x^2\|<\varepsilon\}\subset S$$

为了证明对任一固定的 $\lambda\in(0,1)$，有

$$y=\lambda x^1+(1-\lambda)x^2\in\mathrm{int}S$$

构造 y 的一个邻域：$\{z|\|z-y\|<(1-\lambda)\varepsilon\}$，今证明该邻域含于 S. 设 z 满足$\|z-y\|<(1-\lambda)\varepsilon$. 由于 $x^1\in\mathrm{cl}S$，有

$$\{x|\|x-x^1\|<\frac{(1-\lambda)\varepsilon-\|z-y\|}{\lambda}\}\cap S\neq\Phi,$$

从而有 $z^1\in S$，使得

$$\|z^1-x^1\|<\frac{(1-\lambda)\varepsilon-\|z-y\|}{\lambda}$$

令 $z^2=(z-\lambda z^1)/(1-\lambda)$，则

$$
\begin{aligned}
&\|z^2-x^2\| \\
=&\left\|\frac{z-\lambda z^1}{1-\lambda}-\frac{y-\lambda x^1}{1-\lambda}\right\|\leqslant\frac{1}{1-\lambda}(\|z-y\|+\lambda\|x^1-z^1\|)<\varepsilon
\end{aligned}
$$

可见 $z^2\in S$，从而 $z=\lambda z^1+(1-\lambda)z^2\in S$，$y\in \text{int}S$. 证完.

2.3　凸集的分离和支撑

凸集分离和支撑的概念与理论在最优化中很重要. 很多最优性条件和对偶关系都要用到凸集的某种程度的分离和支撑. 这节的结果以下面的一个几何结论为基础.

定理1　设 S 是闭凸集，$y\overline{\in}S$，则有唯一的 $\bar{x}\in S$ 与 y 相距最近. 此外，$\bar{x}$ 为 S 中与 y 相距最近的点，其充分必要条件是对$\forall\ x\in S$ 有

$$(x-\bar{x})^T(\bar{x}-y)\geqslant 0$$

证明　设 $r=\inf\{\|y-x\|\mid x\in S\}$. 显然 $r>0$ 且有 $\{x^k\}\subset S$ 使得 $\|x^k-y\|\to r$，于是 $\{x^k\}$ 有收敛子列. 不妨设 $x^k\to\bar{x}$，则 $\|\bar{x}-y\|=r$；又因为 S 为闭集，一定有 $\bar{x}\in S$. 这说明 $\bar{x}$ 为 S 中与 y 相距最近的点. 设还有 $x'\in S$ 使得 $\|x'-y\|=r$. 于是有

$$
\begin{aligned}
r^2&=\left\|y-\frac{\bar{x}+x'}{2}\right\|^2=\left\|\frac{1}{2}(y-\bar{x})+\frac{1}{2}(y-x')\right\|^2 \\
&=\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{2}(y-\bar{x})^T(y-x')
\end{aligned}
$$

$$(y-\bar{x})^T(y-x')=\|y-\bar{x}\|\|y-x'\|$$

这表明 $y-\bar{x}$ 与 $y-x'$ 线性相关，因此有 λ 使得

$$y-\bar{x}=\lambda(y-x')$$

而且 $|\lambda|=1$. 显然 $\lambda\neq-1$. 这样，$\lambda=1$，$\bar{x}=x'$. 因此，S 中与 y 相距最近的点是唯一的.

下面证明定理的最后一部分.

设对$\forall\ x\in S$ 有 $(x-\bar{x})^T(\bar{x}-y)\geqslant 0$. 由此对$\forall\ x\in S$ 有

$$
\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &= \|x-\bar{x}+\bar{x}-y\|^2 \\
&= \|x-\bar{x}\|^2+\|\bar{x}-y\|^2+2(x-\bar{x})^T(\bar{x}-y) \\
&\geqslant \|\bar{x}-y\|
\end{aligned}
$$

这说明 $\bar{x}$ 为 S 中与 y 相距最近的点. 反之，设对$\forall\ x\in S$，$\|x-y\|^2\geqslant\|\bar{x}-y\|^2$. 于是对$\forall\ \lambda\in(0,1)$有

$$\|\lambda x+(1-\lambda)\bar{x}-y\|^2\geqslant\|\bar{x}-y\|^2$$

即

$$\|(\bar{x}-y)+\lambda(x-\bar{x})\|^2\geqslant\|\bar{x}-y\|^2$$

由此容易得到$(\bar{x}-y)^T(x-\bar{x})\geqslant 0$. 证完.

形如 $H=\{x\mid p^Tx=\alpha\}$ 的集合叫超平面. 其中 α 为纯量，$p\neq 0$ 为 H 的法向量. 超平面 H 确定了两个闭半空间：

$$H^+=\{x\mid p^Tx\geqslant\alpha\}$$

$$H^-=\{x\mid p^Tx\leqslant\alpha\}$$

也确定了两个开半空间：

$$H^{0+}=\{x\mid p^Tx>\alpha\}$$

$$H^{0-}=\{x\mid p^Tx<\alpha\}$$

设 S_1、S_2为非空集合，如果对$\forall\ x\in S_1$有 $p^Tx\geqslant\alpha$，而对$\forall\ x\in S_2$有 $p^Tx\leqslant\alpha$，则称由 p 和 α 确定的超平面 H 分离 S_1和 S_2.

有了这些概念，就可以介绍凸集的分离定理了. 第一个分离定理是凸集和一个点的分离定理，这是最基本的一个分离定理. 以后要介绍的分离和支撑都以此为基础.

定理2 设 S 为闭凸集，$y\notin S$，则存在一个向量 $p\neq 0$及纯量 α，使得对$\forall\ x\in S$ 有

$$p^Ty>\alpha$$

$$p^Tx\leqslant\alpha$$

证明 由点到闭凸集的最小距离定理，有唯一的 $\bar{x}\in S$. 使得

$$\|y-\bar{x}\|=\min\{\|x-\bar{x}\|\mid x\in S\}$$

且$(\bar{x}-y)^T(x-\bar{x})\geqslant 0$. 构造一个过 $\bar{x}$ 且以 $p=y-\bar{x}$ 为法向的超平面 $H=\{x\mid p^Tx=p^T\bar{x}\}$. 取 $\alpha=(y-\bar{x})^T\bar{x}$，这可使得

$$p^T y=(y-\bar{x})^T(y-\bar{x})+\alpha>\alpha$$

而且对$\forall\ x\in S$有

$$p^T x=(y-\bar{x})^T(x-\bar{x})+\alpha\leqslant\alpha$$

证完.

推论 设S为闭凸集,则S是包含它的所有闭半空间的交.

由上述定理导出的一族不等式的“两择一定理”在线性与非线性规划理论中常用到.

定理3(Farkas) 设A为$m\times n$矩阵,c为n维向量.则不等式组

$$Ax\leqslant 0 \qquad c^T x>0 \tag{2-3-1}$$

有解的充分必要条件是不等式组

$$A^T y=c \qquad y\geqslant 0 \tag{2-3-2}$$

无解.

证明 设不等式组式(2—3—2)有解.即有$y\geqslant 0$,使得$A^T y=c$.若有x满足$Ax\leqslant 0$,则必有

$$c^T x=y^T Ax\leqslant 0$$

因此,x不满足$c^T x>0$,式(2—3—1)无解.

设(2—3—2)无解.构造集合

$$S=\{x\,|\,x=A^T y,y\geqslant 0\}$$

可以证明S为闭凸集且$c\overline{\in}S$.利用点和闭凸集的分离定理,有$p\neq 0$及α使得

$$p^T c>\alpha$$

$$p^T x\leqslant\alpha \qquad \forall\ x\in S$$

显然$\alpha\geqslant 0$.于是有

$$p^T c>0$$

$$y^T(Ap)\leqslant\alpha \qquad \forall\ y\geqslant 0$$

这表明p为(2—3—1)的解.证完.

由Farkas定理容易证明下列推论.

推论1 设A为$m\times n$矩阵,C为n维向量,则不等式组

$$Ax \leqslant 0$$
$$x \geqslant 0$$
$$c^T x > 0$$

有解的充分必要条件是不等式组

$$A^T y \geqslant c$$
$$y \geqslant 0$$

无解.

推论2 设 A 为 $m \times n$ 矩阵,B 为 $l \times n$ 矩阵,c 为 n 维向量,则不等式组

$$Ax \leqslant 0$$
$$Bx = 0$$
$$c^T x > 0$$

有解的充分必要条件是不等组

$$A^T y + B^T z = c$$
$$y \geqslant 0$$

对 y 及 z 无解.

前面建立了闭凸集 S 与其外面一点 y 之间的分离定理. 若 S 非闭,当 $y \overline{\in} \mathrm{cl}S$ 时,则存在一个超平面分离 y 与 $\mathrm{cl}S$;当 $y \in \partial S$ 时,则在 y 处存在 S 的一个支撑超平面.

设 S 为非空集合,$\bar{x} \in \partial S$,$H = \{x \mid p^T x = p^T \bar{x}\}$. 如果 $S \subset H^+$(或 $S \subset H^-$)则称 H 为 S 在 $\bar{x}$ 处的支持超平面.

下面给出支撑超平面的存在性.

定理4 设 S 为非空凸集,$\bar{x} \in \partial S$,则存在一个超平面在 $\bar{x}$ 处支撑 S.

证明 对 $\bar{x} \in \partial(\mathrm{cl}S)$,有 $y^k \overline{\in} \mathrm{cl}S$,$k = 1, 2, \cdots$,使得 $y^k \to \bar{x}$. 对 $\mathrm{cl}S$ 与每个 y^k 利用凸集与其外一点的分离定理,则有 $p^k \neq 0$,使得对$\forall\ x \in \mathrm{cl}S$ 有

$$p^{kT} y^k > p^{kT} x$$

不妨设$\|p^k\| = 1 (k = 1, 2, \cdots)$. 于是$\{p^k\}$有界,有收敛子列. 设 $p^k \to$

p，于是对$\forall\ x\in \mathrm{cl}S$ 有

$$p^T\bar{x}\geqslant p^Tx$$

这说明 $S\subset H^-=\{x\mid p^Tx\leqslant p^T\bar{x}\}$. 证完.

推论 设 S 为非空凸集，$\bar{x}\overline{\in}S$，则有 $p\neq 0$，使得对$\forall\ x\in S$ 有

$$p^T(x-\bar{x})\leqslant 0$$

该推论说明，$H=\{x\mid p^Tx=p^T\bar{x}\}$分离 S 与 $\bar{x}$.

现在讨论两个凸集的分离问题.

定理5 设 S_1、S_2为非空凸集，$S_1\cap S_2=\Phi$，则存在一个超平面分离 S_1与 S_2.

证明 构造集合

$$S=\{x\mid x=x^1-x^2, x^1\in S_1, x^2\in S_2\}$$

显然 S 为凸集，且$0\overline{\in}S$. 对点0与 S 利用分离定理，有 $p\neq 0$，使得$\forall\ x\in S$ 有

$$p^Tx\geqslant 0$$

即对$\forall\ x^1\in S_1, x^2\in S_2$有

$$p^T(x^1-x^2)\geqslant 0$$

$$\inf\{p^Tx\mid x\in S_1\}\geqslant \sup\{p^Tx\mid x\in S_2\}$$

这表明有一个超平面分离 S_1和 S_2. 证完.

由两凸集的分离定理可以证明非线规划中的另一个常用的“两择一定理”.

定量6(Gordan) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则不等式组

$$Ax<0 \qquad (2-3-3)$$

有解的充分必要条件是不等式组

$$\left.\begin{array}{l} A^Ty=0 \\ y\geqslant 0 \\ y\neq 0 \end{array}\right\} \qquad (2-3-4)$$

无解.

证明 设式(2—3—3)有解 $\bar{x}$，对任意 $p\geqslant 0, p\neq 0$有

$$p^TA\bar{x}<0$$