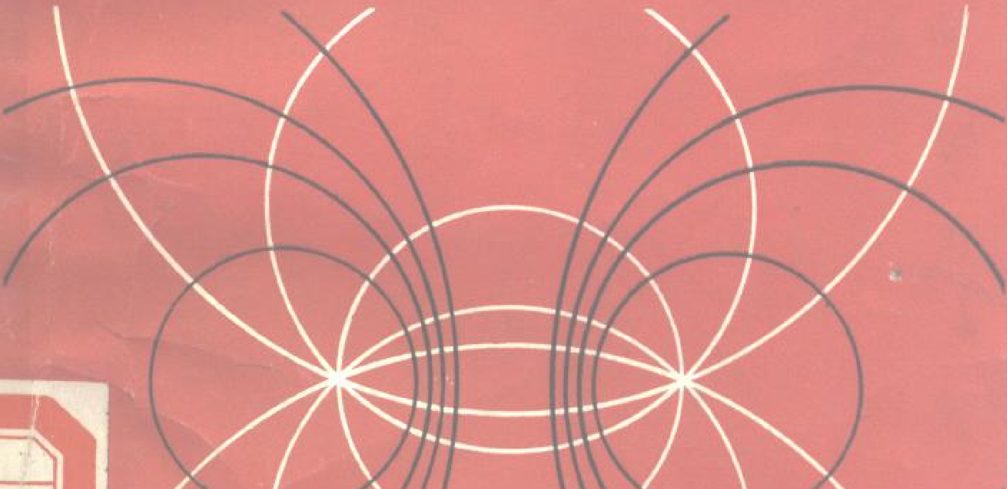
矢量、张量与矩阵

[美] 阿弗肯 著　　　　曹富田 译



计 量 出 版 社

矢量、张量与矩阵

〔美〕阿弗肯 著

曹富田 译

内 容 提 要

本书共分四章，第一章是矢量，它对于不易接受的基本概念如梯度、散度、旋度，阐述得透彻易懂；第二章系统地介绍了十四种坐标系，该两章具有工具书的性质；第三章是张量分析，本书的特色在这一章表现得尤为突出；第四章是行列式、矩阵、群论，它与近代物理结合得很紧密，比如固体物理、粒子物理等，内容颇为新颖。

本书为物理专业所需，对理工科院校师生及有关工程技术人员、科研人员都可参考。

ベクトル・テンソルと行列
ジョージ・アルフケソ著
講 談 社

矢量、张量与矩阵
〔美〕阿弗肯 著
曹富田 译
责任编辑 栾桂芬

计量出版社出版
（北京和平里11区7号）
北京计量印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

开本 787×1092 1/32　印张 9 3/4
字数 227 千字　印数 1—8000
1986年2月第一版　1986年2月第一次印刷
统一书号 15210·472
定价 2.25元

译者前言

本书原是英文版，著者是阿弗肯教授（G.Arfken），是为学习物理学的人写的，和近代物理联系甚为密切，共分十六章。本书日文版是分册译出的。第一册是英文版的第一章至第四章，本书是根据日文版第一册译出的。

本书是著者历经十八年教学经验的心血结晶，行文流畅，深入浅出，概念清晰。习题是精心挑选的，与本书内容融为一体，既有助于深化、巩固，又有助于灵活运用。本书也考虑了现代应用，比如为电子计算机编程序等。

本书的译出要感谢杨淑玲老师的帮助，否则这本书是不可能与读者见面的。

本译文如有不妥之处，希望读者批评指正。

译　者

1983年4月5日于天津

第 2 版前言

在物理数学的第 2 版里，基于第 1 版的使用经验和许多人的有益意见，进行了许多改动和改写．对狄拉克的 δ 函数，格林函数，复变函数的各节作了重要修订．对于斜交坐标，傅里叶·贝塞尔级数，角动量的升降算符新设了一些节．在有关群论的一些节里，作了主要润色．这些节虽可独立地自成一章，但还是觉得包括在第 4 章（矩阵）里较为合适，由于群论是利用矩阵表示的，把它包括在第 4 章里是比较妥善的．

第 1 版 前 言

本书是以大学本科 2、3 年级学生与硕士研究生为对象，作者在历经 18 年物理数学教学基础上写成的。本书旨在培养攻读有关物理学科的本科学生或硕士研究生，为掌握该领域所必需的数学方法，以及为攻读理论物理的学生奠定数学基础。作为本书预备知识，只需要基础课程度的微积分，在这以外，只需要有运用物理数学的愿望而已。

本书是基于两个基本点写的。第一是在结构上要便于自学物理数学的读者。各章内容既有相互联系又有相对独立性，没有必要从第 1 章按次序阅读。可能有的读者认为数学表示是完美而严谨的。然而在大多数情况下，这种完美感只有数学专家才会感受到，对初学者来讲未必容易体会到。因此，作者尽管努力不损害这种完美感，但为了使学生感到内容通顺并易于接受，有时不得不牺牲一些完美感。

对于数学的严格性，也持有相同的看法。对于使用中可能成为负担的一些数学问题，本书没有涉及到。然而为了不致于乱用数学关系式，同时也说明了该式子的使用范围。

第二是为了学生在各自的领域里如何具体地去运用这些数学，能独立地去解题，在本文和习题中，都是利用工程中常出现的实例来说明。本书内容的选择，就是从这考虑的。比如讲微分方程，不是为了获得无意义的难懂的解的魔术，而是要使学生明白，为了捕捉现实世界里所发生的现象，必然要碰到这些微分方程的解和一般性质。

感 谢 辞

没有许多人的帮助和影响，这个工作是不可能完成的。我衷心感谢教给我物理数学并把对这个领域的激情潜移默化地灌输给我的老师们。其中多亏G.Breit，H.Margenau，E.J.Miles教授的多方关照.感谢我的同事,特别是D.C.Kelly，P.A.Macklin教授的帮助和诚恳的批评。在本书的完成当中要感谢过去18年我教过的学生们尤其是J.Clow和S.Orfanides，他们提出了非常有益的批评和意见。特别是要感谢Juanita Killough认真地打印原稿。

绪 论

为了说明数学的应用，选用的多数题目取材于电磁学及量子力学。为方便起见，在下面列出主要方程的同时，也指出了符号所代表的意义，同时也列举了这两个领域的文献：

电磁学

麦克斯韦方程（MKS 单位系，真空中）

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J}$$

$\boldsymbol{E}$ 是用作用于电荷的力来定义的电场，$\boldsymbol{B}$ 是通过作用于运动电荷的力定义的磁感应强度，与它们有关的场 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 在真空中由

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$$

确定 量 ρ 代表自由电荷密度，$\boldsymbol{J}$ 代表电流密度。

要想知道得更详细请参考，J. M. Marion, Classical Electromagnetic Radiation, New York: Academic Press (1965)；W. K. H. Panofsky and M. Phillips, Classical Electricity and Magnetism, Reading, Mass: Addison-Wesley (1955)；J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, New York: Wiley (1962)

在 Marion 与 Jackson 的书里用的是高斯单位制。一看后面两本书要求学生有相当的数学素养，这就会痛感有学习这本书的必要。

量子力学

薛定谔方程（与时间无关）为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V\psi=E\psi$$

ψ 是未知波函数。用 V 代表势能，在许多情况下是位置的函数。E 代表系统的总能量。用 ψ 描述的粒子的质量为 m，$\hbar$ 是普朗克常数除以 2π。从许多初级及中级程度的教科书列举一些如下。

A. Messiah, Quantum Mechanics (2 vols), New York: Wiley(1961); R.H.Dicke and J.P.Wittke, Introduction to Quantum Mechanics, Reading Mass: Addison-Wesley (1960); E. Merzbacher, Quantum Mechanics (Second Edition), New York: Wiley (1970).

目　录

第1章 矢 量 分 析

1.1 绪 论

在科学或工程里，经常遇到象质量、时间、温度那样只有大小的量．把这些量叫做标量．另一方面，也有相当多有趣的物理量不仅有大小还有方向．其中包括位移、速度、加速度、力、动量、角动量，这种有大小和方向的量叫做矢量．在初步的定义里，一般矢量是有大小和方向的量．为区别矢量与标量，凡是矢量比如$\boldsymbol{V}$都用黑体字。

到目前举出的矢量，都是在力学里经常用的量，饶有兴趣的历史侧面倒是，矢量分析并不是在力学的创立与发展的过程中而创立与发展起来的。随着麦克斯韦理论的发展，发现电磁场量的矢量性是它的固有性质，这才开始认识到矢量分析的必要性。

为方便起见，矢量总是用具有与大小成正比的长度的一根箭头来表示．用箭头方向表示矢量的方向，箭头代表它的方向的正向。在这种表示方法当中，矢量和

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \tag{1.1}$$

是把矢量$\boldsymbol{B}$的始端置于矢量$\boldsymbol{A}$的末端即可得到．这时从$\boldsymbol{A}$的始端引向$\boldsymbol{B}$的末端就能得到矢量$\boldsymbol{C}$。根据这一手续，方程(1.1)就具有具体的意义．这个手续叫做和的三角形法则，如图1.1所示。

如图1.2所示由平行四边形可知

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \tag{1.2}$$

同理，由图1.2也能看出

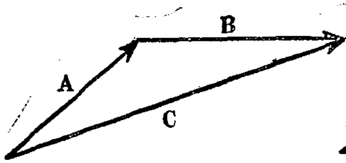


图 1.1 矢量和的三角形法则

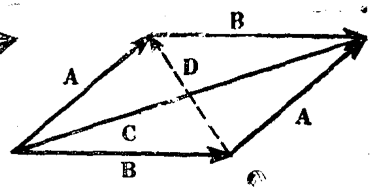


图 1.2 矢量和的平行四边形法则

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$$

作为表示有关矢量和的平行四边形法则的具体例子，可以考虑用两根弦吊起的物体，如图 1.3 所示，结合点 O 平衡时，两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的矢量和必须与向下的重力 $\boldsymbol{F}_3$ 刚好平衡。在这种情况下可以从实验上验证平行四边形法则❶。

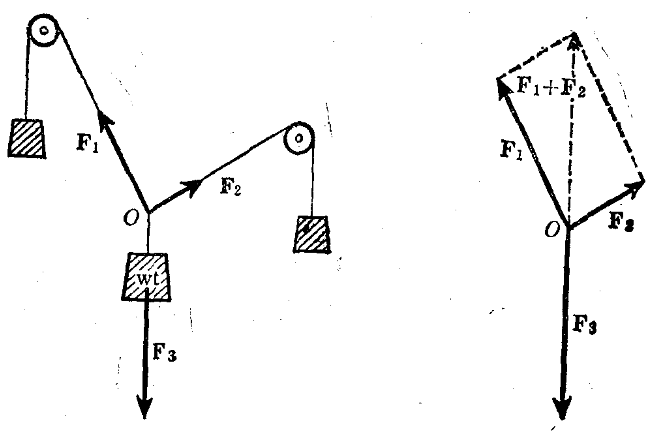


图 1.3 力的平衡 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{F}_3$

❶严格讲，平行四边形法则由一个定义加以规定。假定力为矢量，利用平行四边形法则时，从实验上可以肯定力是平衡的。

须注意矢量是与坐标系无关的几何学上的东西。实际上到目前为止，还没有用任何坐标系。也就是说与坐标系的取法无关，在下一节里还要详细阐述这一想法。

现在来考虑基于用箭头表示矢量$\boldsymbol{A}$的第二种表示方法。如图 1.4 所示，矢量$\boldsymbol{A}$ 从原点❶出发在点（x_1，y_1，z_1）终止。这样令矢量是从原点出发的箭头时，通过给定箭头尖端的直角坐标（x_1，y_1，z_1），就能够决定该矢量的尖端。

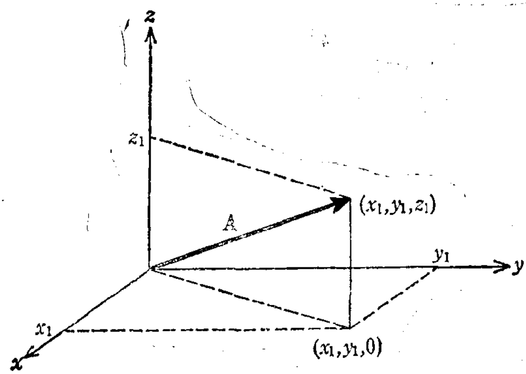


图 1.4 笛卡儿分量

$\boldsymbol{A}$ 虽用来代表动量，电场等任意矢量，然而一个特别重要的量是原点到点（x_1，y_1，z_1）的位移，用特殊符号$\boldsymbol{r}$ 来代表。于是表示位移，可以用矢量$\boldsymbol{r}$ 或者它的尖端的坐标（x_1，y_1，z_1）来表示。

$$\boldsymbol{r}=(x_1, y_1, z_1) \tag{1.3}$$

用r 代表矢量$\boldsymbol{r}$ 的大小时，根据图 1.5 可知尖端的坐标与r

❶在笛卡儿坐标系里虽从任何一点出发都行，这里为简单起见，假定从原点出发。

有下列关系.

$$x_1 = r\cos\alpha,\ y_1 = r\cos\beta,\ z_1 = r\cos\gamma \tag{1.4}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 叫做方向余弦，α 是所研究的矢量与 x 轴正方向之间的夹角，β，γ 可类推，x_1，y_1，z_1 叫做 $\boldsymbol{r}$ 的分量或 $\boldsymbol{r}$ 的投影.

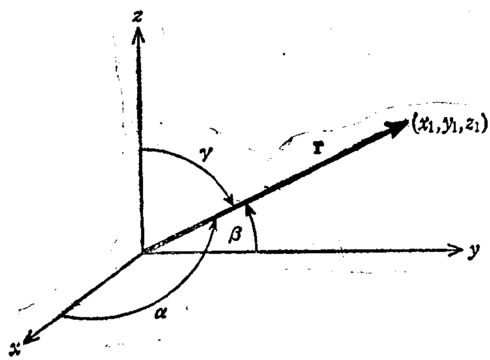


图 1.5　方向余弦

把上述想法再推进一步时，任意矢量$\boldsymbol{A}$分解成它的分量（或在坐标轴上的投影）

$$A_x = A\cos\alpha \tag{1.5}$$

α 是 $\boldsymbol{A}$ 和 x 轴正方向之间的夹角，用一个字 $\boldsymbol{A}$ 可以代表矢量或者用它的分量（A_x，A_y，A_z）也无妨. 其中 A_x 的下标 x 意味着 x 分量，须注意并不依赖于变量 x. 如果 A_x 是x，y，z 的函数时，才记作A_x（x，y，z）.

这里，为方便起见引入沿各坐标轴的单位矢量. 令$\boldsymbol{i}$为指向 x 轴的正方向，大小为 1 的矢量，$\boldsymbol{j}$为指向 y 轴正方向，大小为 1 的矢量，$\boldsymbol{k}$ 为指向 z 轴正方向大小为 1 的矢量. 于是 $\boldsymbol{i}A_x$ 是大小为 A_x，指向 x 轴正方向的矢量. 由矢量的加法得到的

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}A_x+\boldsymbol{j}A_y+\boldsymbol{k}A_z \tag{1.6}$$

意味着矢量$\boldsymbol{A}$等于它分量的矢量和。若矢量为0时，则$\boldsymbol{A}$的各分量必须都是0。即，如果

$$\boldsymbol{A}=0 \qquad 则A_x=A_y=A_z=0$$

最后利用勾股弦定理，矢量$\boldsymbol{A}$的大小为

$$A=(A_x{}^2+A_y{}^2+A_z{}^2)^{1/2} \tag{1.7a}$$

在第2章会看到，可以按照各种坐标系的不同情况，把矢量进行分解。

方程（1.6）规定由三个基矢$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$组成实际的三维空间。即一定大小的任意矢量可以用$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$的线性组合来表示。由于$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$是线性独立的（任何一个都不能用其它两个的线性组合来表示），所以这三个矢量构成实三维空间的基底。代替用图解法求解矢量的加法与减法，可以用它的分量来做。按

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}A_x+\boldsymbol{j}A_y+\boldsymbol{k}A_z与\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}B_x+\boldsymbol{j}B_y+\boldsymbol{k}B_z$$

有$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}(A_x\pm B_x)+\boldsymbol{j}(A_y\pm B_y)+\boldsymbol{k}(A_z\pm B_z)$ （1.7b）

例题 1.1.1 对于

$$\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$$

利用方程（1.7b），可得

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=8\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$$

习　题

1.1.1 给定$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$时，试问如何求$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$？

1.1.2 已知大小为10的矢量$\boldsymbol{A}$与各坐标轴的夹角都相等时，试求A_x，A_y，A_z。

1.1.3 试计算在 xy 平面上，与 x 及 y 轴的正方向之间的夹角相等的单位矢量的分量。

1.1.4 矢量方程可用 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 的形式来表示，从这一事实出发，试证明一个矢量方程与三个标量方程是等效的（把牛顿第二定律 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 当作一个矢量方程时，这意味着 a_x 只由 F_x 来决定，而与 F_y，F_z 是无关的）。

1.1.5 令三角形的顶点 A，B，C 分别为点（-1，0，2），（0，1，0），（1，-1，0）。试求图形 $ABCD$ 成为平行四边形的 D 点。

答（2，0，-2）

1.1.6 由原点出发的三个矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 的顶点作成一个三角形。由该三角形的各边得到的矢量和（$AB+BC+CA$）等于0，请用 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 表示之。

1.1.7 有中心处于 $\boldsymbol{r}_1$ 半径为 a 的球。

(a) 写出代表这个球的代数方程。

(b) 写出代表这个球的矢量方程。

答 (a) $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=a^2$

(b) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}$

（$\boldsymbol{a}$的大小虽是a，但认为指向可以取所有方向）。

1.1.8 由三个相互垂直的平面镜组成反射镜。试证明入射于这个反射镜的光线（入射时要保证能在三个平面镜上发生反射）沿着平行于入射方向而反射出去。

提示：就代表光线进行方向的矢量的分量来考虑反射效果。

1.2 坐标的旋转

在上一节用两个等效的方法定义了矢量。一个是作为决定大小与方向的箭头的方法，另一个是用分量来表示的方法。在这一节采用第三种方法，根据使坐标系旋转时各分量