



计算方法丛书

代数方程组和 计算复杂性理论

徐森林 王则柯 著

科学出版社

内 容 介 简

本书系统地论述了代数方程的 Kuhn 算法和增量算法(以 Newton 算法为其特例)、代数方程组和同伦算法以及同伦单纯轮迴算法。这些算法及其计算复杂性是应用数学领域中活跃的方向。本书作者按照由浅入深,从特殊到一般的原则,将这一方向的主要内容有机地组织起来,引导读者到此领域发展的前沿,因而本书是一本较为理想的入门读物。

本书可作为高等学校数学系师生的教学参考书,也可供数学工作者和科技工作者参考。

计算方法丛书

代数方程组和计算复杂性理论

徐森林 王则柯 著

责任编辑 苏芳霞

科学出版社出版

北京市东黄城根北街 16 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1989年5月第一版 开本:850×1168 1/32

1989年5月第一次印刷 印张:7 1/2

印数:0001—2,620 字数:192,000

ISBN 7-03-000998-3/O . 240

定 价: 7.10 元

《计算方法丛书》编委会

主 编 冯 康

副主编 石钟慈 李岳生

编 委 王仁宏 王汝权 孙继广 李德元 李庆扬

何旭初 吴文达 林 群 周毓麟 席少霖

徐利治 郭本瑜 袁兆鼎 黄鸿慈 蒋尔雄

雷晋干 滕振寰

序 言

过去的十五年中，在非线性系统解方面，特别是在计算不动点和解非线性方程组的领域里，以及在应用这些方法到平衡模型的方面都取得了有意义的进展。这个进展沿着两条主线发展：单纯形法和连续法。单纯形法来源于 Scarf 关于不动点逼近的首创的工作。正如 Kuhn 指出，基本思想是应用映射的单纯逼近，通过 Sperner 引理，它也被应用到 Brouwer 不动点定理的证明中。连续法来源于 Kellogg, Li, 和 Yorke 的工作，他们将 Brouwer 定理的 Hirsch 的非构造性证明转变为构造性的算法。

在许多方面，这两条主线的发展是平行的。例如，两者都应用同伦思想把一个容易的问题转到另一个难的问题。换句话说，在数值算法中，比较了两种观点，其中连续法差不多以概率 1 正常地工作（排除“坏”的情形），而单纯形法毫无例外地经常工作。

王则柯和徐森林著的书系统地阐述了应用于代数方程组解的单纯形法和连续法的最新成果。对于寻求复数域上单个多项式根的情形，所研究的单纯形法是由 Kuhn 提出的。王则柯和徐森林给出了这种算法的一个完全和配套的阐述。随之，通过误差、成本和效率的讨论，徐森林和王则柯作出了创造性的和有趣的贡献。对于由连续法探讨的相同问题，出发点是 Smale 的整体 Newton 方法的最新研究项目。

他们对 Smale 工作的阐述，其明晰性是值得注意的；此外，他们还纠正了许多错误和填补了一些论证中的漏洞。通过对 Kuhn 算法的成本估计与 Newton 方法的 Smale 估计的比较，进行了有创见的研究。

本书的另一半论述了很多关于代数方程组的最新研究成果。对于应用到这问题的广泛的不同的数学学科（如代数几何和微分拓

扑)的各种工具的描述也是值得注意的。如本书的第一部分那样,也讨论了连续法和单纯形法。最后一章包括了作者关于非线性代数方程组数值解的单纯同伦算法所作的贡献。

我高兴地将此书介绍给读者和学生,并确信,通过作者对活跃的研究领域的细致的描述,使读者产生广泛的兴趣并使这些问题的进一步进展成为可能。

H. W. 库恩

1983 年于普林斯顿大学

前 言

不动点算法和计算复杂性理论是近年来应用数学领域的两个活跃的方向。本书以代数方程和代数方程组为主要对象，进行算法及其复杂性理论的探讨。

自从1967年 H.E. Scarf 提出计算连续映射的不动点的算法以来，不动点算法，或者说分片线性同伦算法，作为一个新的方向迅速地发展起来，在非线性数学方面取得很大的成功，并且给纯粹数学带来一定的影响。在这发展中，特别有 B. C. Eaves, H. W. Kuhn 和 M. J. Todd 的贡献。

计算复杂性理论是计算机科学蓬勃发展的一个必然结果。对于一种算法，不仅要问它是否有收敛性的保证，而且还必须考虑它的计算成本。如果计算成本随问题规模的增加而增加的速度是指数式的，则这种算法将被认为是在实践中难以接受的。1978年，Khachiyan 证明了线性规划问题的椭球算法是一种多项式时间算法（即计算成本随问题规模增长的速度是一种多项式关系）。1981年，S. Smale 发表了有关 Newton 方法的一篇论文，从概率上说，Newton 方法就是一种多项式时间算法。1982年，S. Smale 宣布证明了线性规划中单纯形方法的平均速度随问题规模增长的关系概率地说来是线性的。这些都是引人注目的发展。

本书向读者介绍这一领域里近几年来的最新成果。全书力求写得深入浅出。所用的预备知识随着各章内容的发展逐渐有所增加。我们特别注意准确地阐述如何用拓扑学和代数几何的若干定理来解决本书所探讨的问题。全书的安排尽可能使不熟悉这些预备知识的读者能够顺利地阅读各章的基本内容。书中内容主要取自 [Chow, Mallet-Paret & Yorke, 1978], [Eaves & Scarf, 1976], [Garcia & Li, 1980], [Garcia & Zangwill, 1979, 1979a,

1979b], [kuhn, 1977],[kuhn, Wang & Xu, 1984], [Li,1982], [Shub & Smale, 1985], [Smale, 1981], [王则柯, 徐森林, 1984], [Xu & Wang, 1983],[徐森林,王则柯,1984],[徐森林,王则柯,曹怀东, 1984].

本书中的定义、定理、引理、例子等,均按章节统一编号. 定理 2.7 表示同一章(§2)中的定理 2.7,而定理 6.2.7 表示第六章中(§2)的定理 2.7. 记号 □ 表示证明完毕;在个别不给出证明的地方,则列出有关的参考文献.

美国普林斯顿大学项武忠教授热情支持本书写作,并提出了十分中肯的意见, H.W. kuhn 教授所写的序言为本书增色不少. 吴文俊教授对于作者在该领域的努力给予了热情的鼓励和帮助. 借此机会,作者谨向三位教授表示诚挚的感谢.

王则柯 徐森林

1982—1983 年于普林斯顿大学

目 录

第一章 代数方程的 kuhn 算法	1
§ 1. 剖分法与标号法	1
§ 2. 互补轮迴算法	7
§ 3. kuhn 算法的收敛性(一)	13
§ 4. Kuhn 算法的收敛性(二)	20
第二章 kuhn 算法的效率	30
§ 1. 误差估计	30
§ 2. 成本估计	33
§ 3. 单调性问题	40
§ 4. 关于单调性的结果	48
第三章 Newton 方法与逼近零点	55
§ 1. 逼近零点	55
§ 2. 多项式的系数	56
§ 3. 一步 Newton 迭代	63
§ 4. 达到逼近零点的条件	67
第四章 Kuhn 算法与 Newton 方法的一个比较	74
§ 1. Smale 关于 Newton 方法复杂性理论的概述	74
§ 2. 重零点多项式集合的邻域 $U_\rho(W_0)$ 及其体积估计	77
§ 3. 用 Kuhn 算法计算逼近零点	80
第五章 增量算法 I_{hsf} 和成本理论	84
§ 1. 增量算法	84
§ 2. Euler 算法具有效率 k	93
§ 3. 广义逼近零点	104
§ 4. 楔形区域上的 E_k 迭代	111
§ 5. Euler 算法 E_k 的成本理论	124

§ 6.	效率为 k 的增量算法 $I_{k,j}$	132
第六章	同伦算法	139
§ 1.	同伦和指数定理	139
§ 2.	映射的度数和同伦不变性定理	144
§ 3.	多项式映射的 Jacobi 矩阵	156
§ 4.	代数方程组和解的有界性条件	159
第七章	关于多项式映射零点的概率讨论	166
§ 1.	多项式映射零点的数目	166
§ 2.	多项式映射的孤立零点	179
§ 3.	确定有界区域内解析函数的零点	186
第八章	分片线性逼近	195
§ 1.	分片线性映射的零点集和零点的指数定理	196
§ 2.	分片线性逼近 Φ_δ	206
§ 3.	代数方程组同伦单纯轮迴算法的可行概率为 1	217
参考文献	226

第一章 代数方程的 Kuhn 算法

本章的内容是代数方程的 Kuhn 算法及其收敛性的证明。

与各种传统的迭代方法(例如 Newton 方法)不同, Kuhn 算法基于空间的一种单纯剖分, 一种整数标号法和一种互补轮回的算法过程. 如果说它的叙述不象 Newton 方法那么简单, 却应当指出, 一旦编成计算机程序以后, 它的使用反而是极其简单的. 为了用 Kuhn 算法解任何一个代数方程, 只要把这个代数方程所对应的多项式的复系数组和计算的精度要求输入机器. 然后, 算法就会把该代数方程的全部解一起算出来. 对于 Kuhn 算法, 不存在初值选择以及其他一些使用方面的棘手问题. 这是一种具有很强的大范围收敛性保证的算法. 另一方面, 虽然算法本身不象一个简单的迭代公式那么简单, 但为了编制计算机程序, 知道本章 § 1 和 § 2 的内容就足够了.

§ 1. 剖分法与标号法

设 $f(z)$ 是复变量 z 的 n 阶复系数的首一多项式, 即 $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, 这里 n 是自然数, a_1, \cdots, a_n 是复常数. 如果复数 ξ 满足 $f(\xi) = 0$, 就说 ξ 是多项式 f 的一个零点或代数方程 $f(z) = 0$ 的一个解. 我们的算法就是要把 f 的零点找出来.

记复数 $z = x + iy$ 平面为 \mathbf{C} , 复数 $w = u + iv$ 平面为 \mathbf{C}' , 则 $w = f(z)$ 确定复平面之间的一个多项式映射 $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$.

为了在下一节叙述算法, 我们先叙述半空间 $\mathbf{C} \times [-1, +\infty)$ 的一种剖分及由 f 导出的一种标号法.

在 $\mathbf{C} \times [-1, +\infty)$ 中, 记 $\mathbf{C}_d = \mathbf{C} \times \{d\}$, $d = -1, 0, 1, 2, \cdots$. 给定剖分中心 \tilde{z} 及初始格距 h .

1.1 C_d 平面的剖分 $T_d(\tilde{z}; h)$ (简记作 T_d) 剖分 $T_{-1}(\tilde{z}; h)$ 如图 1.1 所示. 剖分 $T_{-1}(\tilde{z}; h)$ 中的一个三角形由和为偶数的一对整数 (r, s) 及一对 $(a, b) \in \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$ 按以下方式完全确定: 它的顶点的复数坐标分别为

$$\begin{aligned} & \tilde{z} + (r + is)h; \quad \tilde{z} + [(r + a) + i(s + b)]h; \\ & \tilde{z} + [(r - b) + i(s + a)]h. \end{aligned}$$

称剖分 $T_{-1}(\tilde{z}; h)$ 中三角形直径之上界为 $T_{-1}(\tilde{z}; h)$ 的剖分网径. 易知, $T_{-1}(\tilde{z}; h)$ 的剖分网径为 $\sqrt{2}h$.

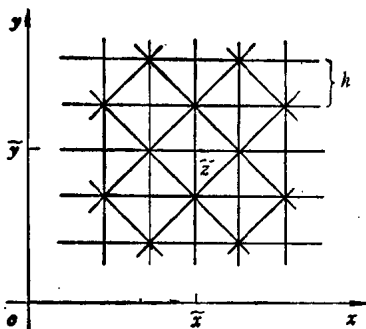


图 1.1

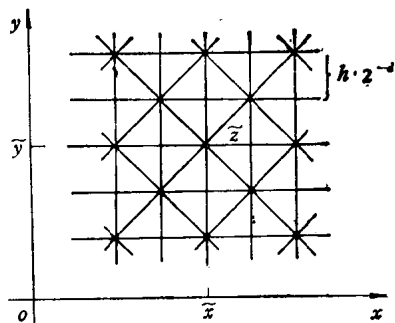


图 1.2

剖分 $T_d(\tilde{z}; h)$, $d = 0, 1, 2, \dots$, 如图 1.2 所示. $T_d(\tilde{z}; h)$ 中的一个三角形由和为奇数的一对整数 (r, s) 及一对 $(a, b) \in \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$ 按以下方式完全确定: 它的顶点的复数坐标分别为

$$\begin{aligned} & \tilde{z} + (r + is)h2^{-d}; \quad \tilde{z} + [(r + a) + i(s + b)]h \cdot 2^{-d}; \\ & \tilde{z} + [(r - b) + i(s + a)]h \cdot 2^{-d}. \end{aligned}$$

易知, 同样定义的 $T_d(\tilde{z}; h)$, $d = 0, 1, 2, \dots$, 的剖分网径为 $\sqrt{2} \cdot h \cdot 2^{-d}$.

注意在我们的剖分中, 每个三角形都是等腰直角三角形, 其直角边分别和 x 轴或 y 轴平行.

注 1.2 容易按四族平行直线的方程给出剖分 $T_d(\tilde{z}; h)$ 的另一刻划。但 1.1 刻划的好处是：剖分中的格点都用整数 $(r, s$ 和 $a, b)$ 表出。

1.3 半空间 $C \times [-1, +\infty)$ 的剖分 $T(\tilde{z}; h)$ (简记作 T)
按照平面的剖分, C_{-1} 的每一个正方形(由共有一斜边的一对三角形组成), 与 C_0 的一个正方形(也由共有一斜边的一对三角形组成)上下相对, 而斜边相错。 C_{-1} 和 C_0 之间每一个由上下相对的一对正方形所界定的正四棱柱, 按图 1.3 规则剖分成 5 个四面体。

按照平面的剖分, $C_d (d \geq 0)$ 的每一个正方形与 C_{d+1} 的四个正方形上下相对, 界定 C_d 和 C_{d+1} 之间的一个正四棱柱。 C_d 和 C_{d+1} 之间每一个这样的正四棱柱, 按图 1.4 的规则剖分成 14 个四面体。

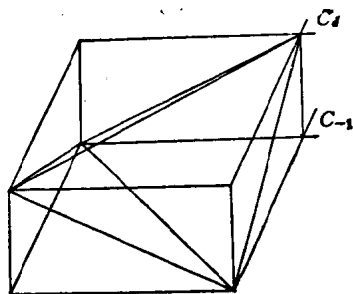


图 1.3

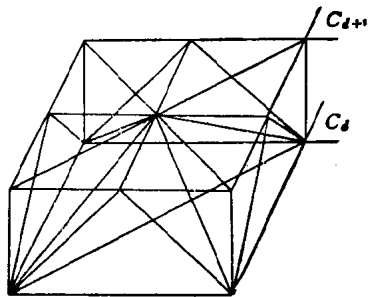


图 1.4

这样一来, 我们就得到半空间 $C \times [-1, \infty)$ 的一个单纯剖分 $T(\tilde{z}; h)$, 简记作 T 。

注意, 从各层 C_d 平面的剖分 $T_d(\tilde{z}; h)$ 到半空间的剖分 $T(\tilde{z}; h)$, 并没有增加新的剖分格点。所有剖分 $T_d(\tilde{z}; h)$, $d = -1, 0, 1, \dots$, 的格点, 组成剖分 $T(\tilde{z}; h)$ 的所有格点。格点都是顶点: 三角形的顶点和四面体的顶点。这样我们可以说: $T(\tilde{z}; h)$ 的所有剖分格点组成 $T(\tilde{z}; h)$ 的顶点集 $V(T(\tilde{z}; h))$, 简记作 $V(T)$ 。

在下面叙述的算法里, 主要牵涉到由剖分 T 中的四面体的界

面三角形的顶点所组成的三点组 $\{(z_1, d_1), (z_2, d_2), (z_3, d_3)\}$, 或简记作 $\{z_1, z_2, z_3\}$. 今后所说的三点组, 都是这样的三点组.

按照剖分法, 下面的引理是明显的.

引理 1.4 设 $\{(z_1, d_1), (z_2, d_2), (z_3, d_3)\}$ 是剖分 T 中的一个三点组, 记 $d = \min\{d_1, d_2, d_3\}$, 有 $d \leq d_k \leq d + 1, k = 1, 2, 3$. \square

在引理 1.4 的情况, 我们说三点组 $\{z_1, z_2, z_3\}$ 位于 C_d 和 C_{d+1} 之间. 特别地, 当 $d_1 = d_2 = d_3 = d$ 时, 我们说三点组 $\{z_1, z_2, z_3\}$ 位于 C_d 上.

设 $\{(z_1, d_1), (z_2, d_2), (z_3, d_3)\}$ 是剖分 T 中的一个三点组. 规定: 三点组的直径

$\text{diam} \{(z_1, d_1), (z_2, d_2), (z_3, d_3)\} = \max \{|z_1 - z_2|, |z_2 - z_3|, |z_3 - z_1|\}$, 也可简记作 $\text{diam} \{z_1, z_2, z_3\}$.

引理 1.5 设三点组 $\{z_1, z_2, z_3\}$ 位于 C_d 和 C_{d+1} 之间, 则

$$\text{diam} \{z_1, z_2, z_3\} \leq \sqrt{2} \cdot h \cdot 2^{-d}.$$

证明 从图 1.3 和图 1.4 容易看出, 位于 C_d 和 C_{d+1} 之间的所有可能的三点组的直径不超过 $\sqrt{2} \cdot h \cdot 2^{-d}$. \square

所以层数越高, 三点组的直径越小.

现在转而叙述标号法.

若复数 $w = u + iv \neq 0$, 规定 w 的幅角 $\arg w$ 为满足下述要求的唯一的实数 $\alpha: -\pi < \alpha \leq \pi, \cos \alpha = u/\sqrt{u^2 + v^2}$ 以及 $\sin \alpha = v/\sqrt{u^2 + v^2}$.

定义 1.6 称按下式确定的对应 $l: C \rightarrow \{1, 2, 3\}$ 为由多项式 f 确定的 z 平面 C 的标号法(图 1.5):

$$l(z) = \begin{cases} 1, & \text{若 } -\pi/3 \leq \arg f(z) \leq \pi/3 \text{ 或 } f(z) = 0; \\ 2, & \text{若 } \pi/3 < \arg f(z) \leq \pi; \\ 3, & \text{若 } -\pi < \arg f(z) < -\pi/3. \end{cases}$$

定义 1.7 记 $f_{-1}(z) = (z - \tilde{z})^n; f_d(z) = f(z), d = 0, 1, \dots$. 称按下式确定的对应 $l: V(T(\tilde{z}; h)) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ 为由多项式 f 导出的 $V(T(\tilde{z}; h))$ 的标号法:

$$l(z, d) = \begin{cases} 1, & \text{若 } -\pi/3 \leq \arg f_d(z) \leq \pi/3 \text{ 或 } f_d(z) = 0; \\ 2, & \text{若 } \pi/3 < \arg f_d(z) \leq \pi; \\ 3, & \text{若 } -\pi < \arg f_d(z) < -\pi/3. \end{cases}$$

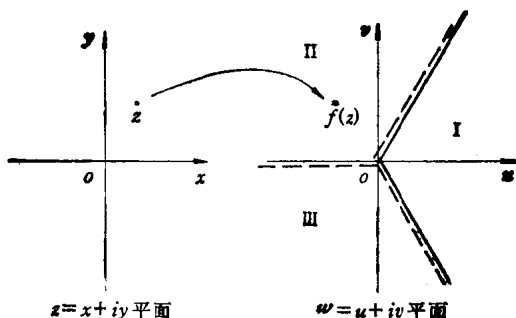


图 1.5

这里,定义 1.6 和定义 1.7 同用一个 l 并不会引起混淆. 我们看到,对顶点 $(z, d) \in V(T(\tilde{z}; h))$,若 $d \geq 0$,则该顶点的标号是由多项式 f 确定的;若 $d = -1$,则该顶点的标号实际上是由幂函数 $(z - \tilde{z})^n$ 确定的.

结合剖分法和标号法,我们建立具有 1, 2, 3 所有三个标号的完全标号三点组的概念. 完全标号三角形的概念是类似的.

定义 1.8 如果 $V(T(\tilde{z}; h))$ 的一个三点组 $\{z_1, z_2, z_3\}$ 满足 $\{l(z_1), l(z_2), l(z_3)\} = \{1, 2, 3\}$, 则称它为完全标号三点组, 简称全标三点组.

为方便起见,今后,完全标号三点组 $\{z_1, z_2, z_3\}$ 的记号均蕴涵 $l(z_k) = k, k = 1, 2, 3$.

全标三点组的说法本身,并没有指明点的标号是由 $(z - \tilde{z})^n$ 还是由 f 确定的. 事实上,今后我们遇到的全标三点组,其点的标号可以都由 $(z - \tilde{z})^n$ 确定,也可以都由 f 确定,还可以部分由 $(z - \tilde{z})^n$ 确定,部分由 f 确定.

下面的引理建立了标号都由 f 确定的完全标号三点组与 f 的零点的某种关系.

引理 1.9 设 $\{z_1, z_2, z_3\}$ 是标号都由 f 确定的完全标号三点组,并且 $|f(z_k) - f(z_l)| \leq \eta, k, l = 1, 2, 3$, 那末 $|f(z_k)| \leq 2\eta/\sqrt{3}, k = 1, 2, 3$.

证明 图 1.6 是 w 平面上相应于标号 1, 2, 3 的三个区域. z 的标号由 $w = f(z)$ 落在哪个扇形区域确定. 按照所设, $f(z_1)$ 必须在区域 1, 同时与区域 2 及区域 3 的距离均不超过 η . 这样, $f(z_1)$ 必须落在图 1.6 的菱形阴影区域内, 所以 $|f(z_1)| \leq 2\eta/\sqrt{3}$.

同理, $|f(z_2)| \leq 2\eta/\sqrt{3}, |f(z_3)| \leq 2\eta/\sqrt{3}$. \square

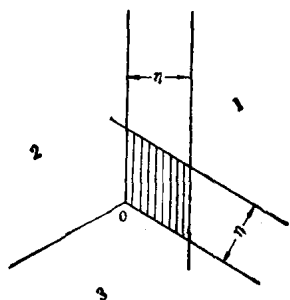


图 1.6

大家知道, 多项式函数在平面的有限区域上是一致连续的, 假如我们能够找到直径很小的标号都由 f 确定的完全标号三点组, 那么, 这三点的象在 w 平面上的相互距离也很小. 再由引理 1.9, 每点的象与 w 平面的原点的距离也就很小了. 当这个距离足够小时, 三点组的每一个点都可以足够精确地作为 f 的一个数值零点. 前面已经说明, 按照我们的剖分, 层数越高时, 三点组的直径就越小. 这就启发我们设计一种寻找完全标号三点组的算法, 使得一方面投影到平面上看, 计算不超过平面的一个有限区域, 另一方面计算要不断向上发展, 达到越来越高的层次. 找到这样的算法, 计算零点的问题也就解决了. 这就是下面所要做的工作.

§ 2. 互补轮迴算法

为建立算法,先证明两个引理.

在剖分为 $T_{-1}(\tilde{z}; h)$ 的 C_{-1} 平面上, 用 $Q_m(\tilde{z}; h)$ (简记作 Q_m) 表示顶点是 $\tilde{z} + mh(\pm 1 \pm i)$ 的方块, 这里 m 是一个正整数 (参看图 1.7). 也就是说, Q_m 是以 \tilde{z} 为中心的、半边长为 mh 的方块, 它的两对对边分别与 z 平面上的 x 轴和 y 轴平行. 三角形的一条边称为一条棱. 方块的边界 $\partial Q_m(\tilde{z}; h)$ (简记作 ∂Q_m) 取平面上的逆时针方向为正的方向. 并且, 当写 $\{z', z''\}$ 是 ∂Q_m 上的一条棱时, 蕴涵按 ∂Q_m 的正定向 z'' 是 z' 的下一个点. $T_{-1}(\tilde{z}; h)$ 的每个三角形, 按照其顶点的逆时针顺序定向, 并且, 若写 $\{z', z'', z'''\}$ 是 T_{-1} 的一个三角形, 蕴涵其顶点顺序给出三角形的正向.

平面上两点 z', z'' 对另一点 z^* 的张角, 是指射线 z^*z' 和 z^*z'' 之间的不超过 π 的夹角. 也可以把它叫做平面上线段 $z'z''$ 对另一点 z^* 的张角

引理 2.1 设 $m \geq 3n/2\pi$, 则 ∂Q_m 上按照正向次序, 恰有 n 条标号为 $(1, 2)$ 的棱 (即始端标号为 1 终端标号为 2 的棱), 而没有标号为 $(2, 1)$ 的棱.

证明 设 $\{z', z''\}$ 是 ∂Q_m 上的一条棱, z' 和 z'' 对 \tilde{z} 的张角记作 α . 由图 1.7 易知

$$0 < \alpha \leq \arctg \frac{h}{mh} < \frac{1}{m} \leq 2\pi/3n.$$

记 β 为 $w' = (z' - \tilde{z})^n$ 和 $w'' = (z'' - \tilde{z})^n$ 对原点 o 的张角, 则

$$0 < \beta = n\alpha < \frac{n}{m} \leq 2\pi/3.$$

按照 Q_m 的构造和幂函数 $w = (z - \tilde{z})^n$ 的性质, ∂Q_m 的象在 w 平面上恰好绕原点 n 圈. 根据 $0 < \beta < 2\pi/3$ 可知, 在 ∂Q_m 上沿正向每走一步 (相当于一棱), ∂Q_m 的象的相应部分在 w 平面按正向绕原点旋转了一个小于 $2\pi/3$ 的正角. 所以, 在 w 平面上从

$w = (mh)^n$ 出发, ∂Q_m 的象正好 n 次由相应标号 1 的区域一步进入相应标号 2 的区域. 回到 z 平面上, 知 ∂Q_m 上正好有 n 条棱, 始端标号为 1, 终端标号为 2.

同样, 由于 $0 < \beta < 2\pi/3$, 若 $l(z') = 2$, 则 $l(z'') = 2$ 或 3, 所以 ∂Q_m 上没有标号为 (2, 1) 的棱. \square

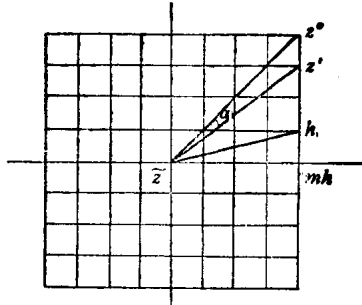


图 1.7

以后, 我们从 $z = \tilde{z} + mh \in \partial Q_m$ 出发, 沿 ∂Q_m 的正向顺序, 给 ∂Q_m 上 n 条 (1, 2) 标号棱以 $j = 1, \dots, n$ 的编号.

引理 2.2 设 $m \geq 3(1 + \sqrt{2})n/4\pi$, 则在 $Q_m(\tilde{z}; h)$ 外没有 $T_{-1}(\tilde{z}; h)$ 的标号由 $(z - \tilde{z})^n$ 确定的完全标号三角形.

证明 首先证明, 若 $z'z''$ 是 ∂Q_m 上或 Q_m 外的一条棱, 则 $z'z''$ 对 \tilde{z} 的张角小于 $2\pi/3n$. 事实上, 若 $z'z''$ 是平行于 x 轴或平行于 y 轴的棱, 这已由引理 2.1 的证明及 $3(1 + \sqrt{2})n/4\pi > 3n/2\pi$ 保证. 现只须考虑 $z'z''$ 是 T_{-1} 的三角形的斜边的情况. 根据 Q_m 的构造, 不难证明张角最大的情况发生在靠近 ∂Q_m 的地方. 由于对称性, 只要证明 k 是自然数, 而 $z' = \tilde{z} + h(m + 1 + ki)$, $z'' = \tilde{z} + h(m + (k + 1)i)$ 时, $z'z''$ 对 \tilde{z} 的张角 α 小于 $2\pi/3n$ 即可. 由图 1.8,

$$\alpha = \arctg \frac{k+1}{m} - \arctg \frac{k}{m+1}, \quad \text{tg } \alpha = \frac{m+k+1}{m^2+m+k^2+k}.$$

所以, 若视 k 为连续变量, 则当 $k = \sqrt{2m(m+1)} - m - 1$ 时 $\text{tg } \alpha$