

北京钢铁学院“概
率统计”编写组

概率论习题集

(含习题解答)

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

概 率 论 习 题 集

(附习题解答)

北京钢铁学院“概
率统计”编写组



湖 南 出 版 社

内 容 简 介

本书按照高等工科院校“概率论”课程的基本要求编写。在教学实践的基础上，收集和汇编了400多道基本题，按由浅入深、循序渐进的原则分类编排，并附有解答。

本书共分五章。第一章 概率论的基本概念；第二章 随机变量及其分布；第三章 多维随机变量及其分布；第四章 随机变量的数字特征；第五章 大数定律及中心极限定理。书中每节都按内容提要，习题和习题解答三部分编排。可供工科院校教师、学生，中学数学教师，工程技术人员和自学青年参考。

概率论习题集
(附习题解答)

北京钢铁学院“概率统计”编写组

测绘出版社出版

山西新华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

开本：787×1092 1/32 印张：8.75 字数：196千字

1981年11月第一版 1981年11月第一次印刷

印数：1—61000册 定价：0.92元

统一书号：13039·新222

前 言

为了逐步适应四个现代化的要求，科学技术的各个领域正在愈来愈广泛地采用许多新的数学方法，“概率论与数理统计”就是其中之一。目前，高等工科院校的教学计划中已将这部分内容列为必修的课程。许多工程技术人员也正在通过各种渠道学习这种数学方法。

与其他数学课程比较，“概率论与数理统计”这门课具有许多不同的特点，这给初学者入门带来不少困难，尤其是在解题时常常无从下手，解完后感觉把握不大。为了帮助初学者克服学习中的困难，较好地掌握课程的基本内容，我们编写了这本书。根据工科院校中这门课程的基本要求，在以往教学实践的基础上，精选了400多道基本题，按照由浅入深，循序渐进的教学原则分类编排；力求题意明确，叙述清楚，尽量避免繁琐的计算；针对学生掌握概念和方法时容易出现错误，还有意识地编入了某些辨析、思考题；此外许多题目采用了一题多解的方法，以利于学生举一反三，开阔思路。

本书共分五章，重点是第一章、第二章和第四章的第一节。我们认为：这些内容是工科院校“概率论”课程最基本的内容。为了便于少学时类型的课程使用，在编写中我们有意地使这部分内容具有相对的独立性。对于多学时类型的课程来说，除上述内容外，可酌情增加其他部分的内容。

我们殷切希望青年学生在使用本书时要立足于独立思考，刻苦钻研，切忌一遇困难就去查解答，这种做法对能力

的培养是很不利的，而任何有损于学习能力培养的做法都是违背出版此书的根本目的的。

本书是由北京钢铁学院数学教研室庞鹏颺、吕世意、戚国安、杜才难、徐曼华、张建业、秦明达编写的。在编写过程中得到本教研室的大力支持和帮助。教研室主任何品三教授以及刘钦圣副教授、高瑞同志等进行了审阅。最后特请北京师范大学概率统计教研室主任严士健教授进行了审定。特此表示衷心地感谢。由于水平所限，本书会有不少缺点错误，请读者批评指正。

编 者

1981.5

〔说 明〕

(1) 关于分布函数定义, 本书一律采用下列定义方法, 即

$$F(x) = P\{\xi \leq x\}$$

而不采用
的定义。

$$F(x) = P\{\xi < x\}$$

(2) 关于拉普拉斯函数表, 本书一律按

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

的函数表解题, 并由此给出几个常用的查表公式, 而不采用

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

的函数表及其所附属的几个查表公式。

(3) 本书内容提要 and 习题中打 • 号处分别表示非基本内容和选题。

参 考 书 目

- 〔1〕 浙江大学数学系高等数学教研组编: 概率论与数理统计, 1977.
- 〔2〕 王梓坤著: 概率论基础及其应用, 1976.
- 〔3〕 复旦大学编: 概率论第一册概率论基础, 1979.
- 〔4〕 沈恒范编: 概率论讲义, 1978.
- 〔5〕 林少宫编: 基础概率与数理统计, 1962.
- 〔6〕 同济大学数学教研室主编: 高等数学(下册), 1978.
- 〔7〕 南京工学院数学教研组编: 高等数学, 1978.
- 〔8〕 关家骥、瞿永然编: 概率统计习题解答, 1980.
- 〔9〕 W.Feller, An introduction to probability theory and its applications. Vol.1 第二版, 1957; Vol.2, 第二版, 1971.
- 〔10〕 M.Fisz, 概率论及数理统计, 1958 (王福保译).
- 〔11〕 Morris H. Degroot, probability and statistics, 1974.
- 〔12〕 A.A. 史威斯基柯夫等著, 概率论解题指南, 1962, (计度生、朱锡斌译)

目 录

〔说明〕 参考书目

第一章 概率论的基本概念

- § 1 集合论初步.....(1)
- § 2 排列与组合.....(21)
- § 3 随机试验和随机事件.....(33)
- § 4 概率的定义和性质.....(43)
- § 5 条件概率与事件独立性.....(63)

第二章 随机变量及其分布

- § 1 随机变量的概念.....(88)
- § 2 随机变量的分布函数.....(105)
- § 3 随机变量函数的分布.....(130)

第三章 多维随机变量及其分布

- § 1 二维随机变量及其分布.....(148)
- § 2 二维随机变量函数的分布.....(182)

第四章 随机变量的数字特征

- § 1 一维随机变量的数字特征.....(203)
- § 2 二维随机变量的数字特征.....(231)

第五章 大数定律和中心极限定理

附表 1 标准正态分布表

附表 2 泊松分布表

第一章 概率论的基本概念

§ 1 集合论初步

一、内容提要

1. 集合的概念

(1) 一般将集合理解为具有某种共同性质的一些对象组成的全体。组成某一集合的那些对象叫做该集合的元素。通常用大写字母 A 、 B 、 C 等表示集合，用小写字母 a 、 b 、 c 等表示元素。

(2) 如果 a 是集合 A 的元素，则称“ a 属于 A ”，记作 $a \in A$ ；如果 a 不是集合 A 的元素，则称“ a 不属于 A ”，记作 $a \notin A$ 。

(3) 仅含有限多个元素的集合叫有限集，含有无限多个元素的集合叫无限集。在无限集中，能与自然数集建立一一对应关系的集合叫可列集（或可数集），否则叫做不可列集。

不含任何元素的集合称为空集，记作 ϕ 。仅含一个元素 x 的集合称为单元素集，记作 $\{x\}$ 。

2. 子集与空间

(1) 如果集合 A 的每一个元素都属于 B ，则称 A 为 B 的子集，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ ，读作“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”。

(2) 如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称集合 A 与集合 B 是相等的, 记作 $A = B$.

(3) 倘若研究某一问题时所涉及的有关集合都是某个集合的子集, 则称该集合为空间, 记作 Ω 、 U 或 S .

(4) 如果集合 A 是空间 Ω 的子集, 把 Ω 中所有不属于 A 的元素组成的集合叫做 A 的余集, 记作 $\bar{A}$.

3. 集合的运算

(1) 由属于集合 A 或集合 B 的那些元素的全体所组成的集合称为 A 与 B 的并集 (或和集), 记作 $A \cup B$.

有限个及可列个集合的并集分别记作 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 及 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

(2) 由属于集合 A 又属于集合 B 的那些元素的全体所组成的集合称为 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$.

有限个及可列个集合的交集分别记作 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 及 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

(3) 由属于集合 A 而不属于集合 B 的那些元素的全体所组成的集合称为 A 与 B 的差集, 记作 $A \setminus B$. 余集 $\bar{A}$ 是空间 Ω 与集合 A 的差集, 所以有

$$\bar{A} = \Omega \setminus A \text{ 或 } A = \Omega \setminus \bar{A} \text{ 或 } A \cup \bar{A} = \Omega.$$

(4) 集合运算的某些性质:

1° 并与交的交换律

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A.$$

2° 并与交的结合律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C;$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

3° 分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

4° 德莫根 (de Morgan) 定理

$$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}; \quad \overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}; \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}; \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}.$$

*4. 集类的概念

以集合为元素的集合叫做集类, 一般用花写字母 $\mathcal{F}$, $\mathcal{B}$ 等表示. 若集合 A 属于集类 $\mathcal{F}$, 则记作 $A \in \mathcal{F}$; 否则记作 $A \notin \mathcal{F}$.

二、习题

1.1 指出下列集合是怎样的集合? 是有限集还是无限集? 若是无限集, 是否是可列集?

(1) $A = \{x \mid x^2 = 9\};$

(2) $B = \{x \mid x + 2 = -5\};$

(3) $C = \{x \mid x^2 < 0, x \text{ 为实数}\};$

(4) $D = \{x \mid x = 4n + 1; \quad n = 1, 2, 3, \dots\};$

(5) $E = \{x \mid x = 2, 3, 4, 5, \dots\};$

(6) $F = \{x \mid x \geq a, x \leq b; \quad a, b \text{ 为给定的实数}\};$

(7) $G = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\};$

*(8) $H = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \text{ 是任意实数且 } a \neq 0\}.$

1.2 用形如 $A = \{\text{元素 } x \mid x \text{ 具有性质 } p\}$ 的记号表示下列集合:

(1) 小于100的正整数集;

(2) 全部偶数集;

(3) 双曲线 $xy = 1$ 上一切点的集合;

(4) 所有平行于已知直线 $l_0: 2x + y = 1$ 的一切直线 l 所组成的集合.

1.3 设 Ω 为某一空间, A 为它的某一子集, x 为 A 中某一元素. 问下列记法哪些正确? 哪些错误?

(1) $x \in A$; (2) $x \in \Omega$;

(3) $x \subset A$; (4) $x \subset \Omega$;

(5) $A \in \Omega$; (6) $A \subset \Omega$;

(7) $\{x\} \in A$; (8) $\{x\} \subset A$.

1.4 设 A 和 B 都是有限集, 问在什么条件下 $A \cup B$ 的元素个数等于 A 的元素与 B 的元素个数之和?

1.5 集合 $A \cup A$ 及 $A \cap A$ 分别等于什么? 数字运算有类似结果吗?

1.6 下面两式分别表示 A 、 B 之间有什么包含关系?

(1) $A \cap B = A$; (2) $A \cup B = A$.

1.7 在什么情况下等式 $A \cap B \cap C = C$ 成立?

1.8 在什么情况下才会有 $B \setminus A = B$ 成立?

1.9 区间 $[-3, 3]$ 与 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ 的交集是怎样的一个集合?

1.10 设 $A = \{x \mid x^2 + x - 6 < 0\}$,

$B = \{x \mid x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, 求 $A \cap B = ?$

1.11 平面上由 $x^2 + y^2 \leq 4$ 所确定的集合与由 $x^2 + y^2 > 1$ 所确定的集合的交集是怎样的一个集合?

1.12 设 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, $B = \{(x, y) \mid -\infty$

$\{x < \infty, -\frac{1}{2} < y < \frac{3}{2}\}$. 画图表示:

(1) $A \cup B$; (2) $A \cap B$; (3) $A \setminus B$; (4) $B \setminus A$.

1.13 设空间 $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, 集合 $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, $B = \{e_1, e_2, e_4, e_6\}$, $C = \{e_4, e_5, e_6, e_8\}$, $D = \{e_8\}$. 试求下列各集合:

(1) $\bar{A}$; (2) $B \cap D$; (3) $A \cup C$; (4) $B \cap C$;

(5) $\overline{B \cup C}$; (6) $A \cap (B \cup C)$.

1.14 设 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \mid 3 < x \leq 7\}$, $C = \{x \mid x \leq 0\}$, 都是空间 $R_1 = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$ 中的集合. 试求下列各集合:

(1) $\bar{A}$; (2) $A \cup B$; (3) $B \cap \bar{C}$; (4) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$;

(5) $(A \cup B) \cap C$.

1.15 设 $R_1 = (-\infty, +\infty)$, $A = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$,

$B = \left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

试求:

(1) $\overline{A \cup B}$; (2) $\overline{A \cup \bar{B}}$; (3) $\overline{A \cap B}$; (4) $\bar{A} \cap \bar{B}$.

1.16 由上题的结果验证下列各命题是否成立?

(1) 若 $A \subset B$, 则 $\bar{B} \subset \bar{A}$; (2) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;

(3) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; (4) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;

(5) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1.17 设 A, B 为任意两个集合, 试将 $A \cup B$ 表示成 A 及另一个与 A 互不相交的集合的并集.

1.18 设 A, B, C 为任意三个集合, 从 $A \cap C$ 和 $B \cap C$ 不

相交能否推出 A, B 一定不相交的结论? 作图表示你的答案。

1.19 证明: (1) $\overline{\overline{A}} = A$; (2) $\overline{A} = \Omega \setminus A$;

(3) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

1.20 证明集合运算的分配律:

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

* (2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1.21 证明:

(1) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$;

(2) $\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.

1.22 证明:

(1) $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$;

(2) $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$.

1.23 化简:

(1) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$;

(2) $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B})$;

(3) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$;

(4) $(B \cup C) \cap (B \cup \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C)$.

*1.24 判断下列等式是否成立? 若成立, 试用已知等式推证之; 若不成立, 请举反例说明之:

(1) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

(2) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$;

(3) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

(4) $(A \cup B) \setminus B = A$;

(5) $(A \setminus B) \cup B = A$.

通过此题想一想，数字运算的类似规律成立否？

*1.25 已知空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$;

(1) 写出 Ω 的全部子集;

(2) 若将 Ω 的全部子集组成一个集类 $\mathcal{F}$, 这个集类对集合的三种基本运算 (“并”、“交”及“差”) 都封闭吗?

(“封闭”指对 $\mathcal{F}$ 中的任意两个集合进行某种运算的结果仍在 $\mathcal{F}$ 内)。

(3) 如果在 $\mathcal{F}$ 中去掉一个集合 Ω , 问新的集类 $\mathcal{F}'$ 对三种基本运算仍封闭吗?

三、习题解答

1.1 指出下列集合是怎样的集合? 是有限集还是无限集? 若是无限集, 是否是可列集?

(1) $A = \{x \mid x^2 = 9\}$

解 A 仅含 -3 和 3 两个元素, 故为有限集。

(2) $B = \{x \mid x + 2 = -5\}$

解 B 仅含 -7 一个元素, 故为单元素集。

(3) $C = \{x \mid x^2 < 0; x \text{ 为实数}\}$

解 C 是空集 ϕ , 是有限集的一种特殊情形, 因为它的元素的个数为 0。

(4) $D = \{x \mid x = 4n + 1; n = 1, 2, 3, \dots\}$

解 D 所含元素组成等差数列: 5, 9, 13, $\dots$ 。因为 D 通过关系式 $x = 4n + 1$ 可与自然数集 N 建立一一对应关系, 所以 D 是可列无限集。

(5) $E = \{x \mid x = 2, 3, 4, 5, \dots\}$

解 因为 E 可改写为 $E = \{x \mid x = n + 1; n = 1, 2, \dots\}$, 所以

E 是可列无限集.

(6) $F = \{x \mid x \geq a, x \leq b; a, b \text{ 为给定的实数}\}$

解 1° 如果 $a < b$, 则 $F = [a, b]$ 是不可列无限集;

2° 如果 $a = b$, 则 F 为有限集且为单元素集, 仅含 $x = a$ 或 b ;

3° 如果 $a > b$, 则 F 为空集.

(7) $G = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$

解 G 为 xOy 平面上由同心圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x^2 + y^2 = 4$ 所夹的环形域 (包括外边界而不包括内边界), 它是无限不可列集.

*(8) $H = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \text{ 为任意实数且 } a \neq 0\}$

解 H 为一切实系数二次多项式 ($a \neq 0$) 的集合, 它是无限不可列集.

1.2 用形如 $A = \{\text{元素 } x \mid x \text{ 具有性质 } p\}$ 的记号表示下列集合:

(1) 小于100的正整数集

解 $A = \{x \mid x < 100; x \text{ 是正整数}\}.$

(2) 全部偶数集

解 $B = \{x \mid x = 2n; n = 1, 2, 3, \dots\}.$

(3) 双曲线 $xy = 1$ 上一切点的集合

解 $C = \{(x, y) \mid xy = 1\}.$

(4) 所有平行于已知直线 $l_0: 2x + y = 1$ 的一切直线 l 所组成的集合.

解 $D = \{\text{直线 } l \mid l \parallel l_0; \text{ 其中 } l_0 \text{ 为直线 } 2x + y = 1\}.$

1.3 设 Ω 为某一空间, A 为它的某一子集, x 为 A 中某一元素, 问下列记法哪些正确? 哪些错误?

(1) $x \in A$; (2) $x \in \Omega$; (3) $x \subset A$; (4) $x \subset \Omega$;
 (5) $A \in \Omega$; (6) $A \subset \Omega$; (7) $\{x\} \in A$; (8) $\{x\} \subset A$.

解 (1)(2)(6)(8)正确。(3)(4)(5)(7)错误。

1.4 设 A 和 B 都是有限集,问在什么条件下 $A \cup B$ 的元素个数等于 A 的元素与 B 的元素个数之和?

解 条件为 $A \cap B = \phi$.

1.5 集合 $A \cup A$ 及 $A \cap A$ 分别等于什么? 数字运算有类似结果吗?

解 $A \cup A = A$; $A \cap A = A$. 数字运算中的加法和乘法对非零数 a 来说, $a + a = a$ 不成立; 对非零且非 1 的数 a 来说, $a \cdot a = a$ 不成立. 这是集合运算与数字运算不同点之一.

1.6 下面两式分别表示 A, B 之间有什么包含关系?

(1) $A \cap B = A$; (2) $A \cup B = A$;

解 (1) 表示 $A \subset B$; (2) 表示 $B \subset A$.

1.7 在什么情况下等式 $A \cap B \cap C = C$ 成立?

解 在集合 $A \cap B$ 包含集合 C 即 $C \subset A \cap B$ 时, 等式才成立.

1.8 在什么情况下才会有 $B \setminus A = B$ 成立?

解 当 $A \cap B = \phi$ 或 $A = \phi$ 时, 等式成立.

1.9 区间 $[-3, 3]$ 与 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ 的交集是怎样的一个集合?

解 它们的交集是集合:

$$[-3, -1) \cup \{3\}.$$

1.10 设 $A = \{x \mid x^2 + x - 6 < 0\}$,

$$B = \{x \mid x^2 - 2x - 3 \leq 0\}, \text{ 求 } A \cap B = ?$$

解 由解不等式可知: $A = (-3, 2)$, $B = [-1, 3]$,

$$\therefore A \cap B = (-3, 2) \cap [-1, 3] = [-1, 2).$$

1.11 平面上由 $x^2 + y^2 \leq 4$ 所确定的集合与由 $x^2 + y^2 > 1$ 所确定的集合的交集是怎样的一个集合?

解 设 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

$$B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$$

于是

$$A \cap B = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$$

是一个环形域 (含外边界而不含内边界) .

1.12 设 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$,

$$B = \left\{ (x, y) \mid -\infty < x < +\infty, -\frac{1}{2} < y < \frac{3}{2} \right\},$$

画图表示:

(1) $A \cup B$;

(2) $A \cap B$;

(3) $A \setminus B$;

(4) $B \setminus A$.

