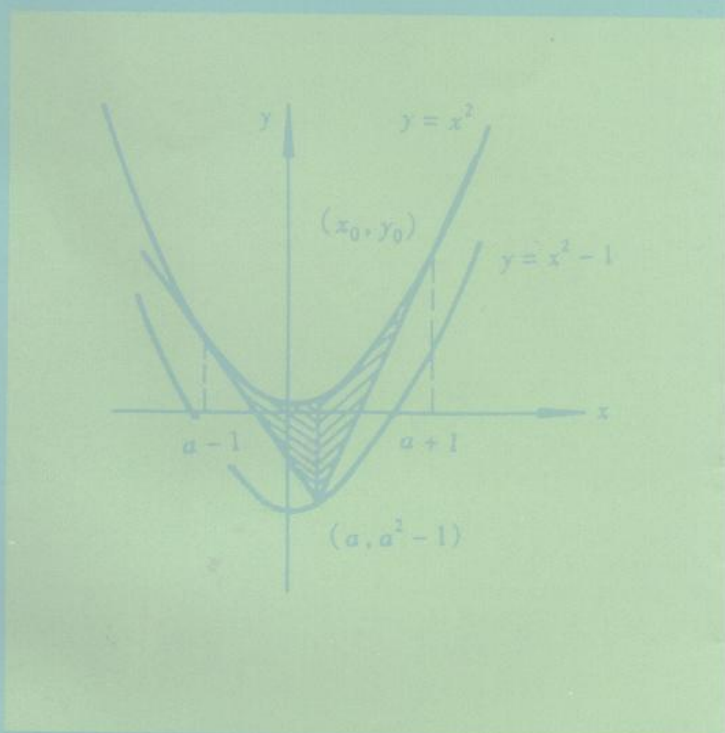


高等数学

自学及解题指导(第二版)



同济大学函授
数学教研室编

同济大学出版社

高等数学自学及解题指导

(第二版)

同济大学函授数学教研室 编

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学自学及解题指导/同济大学函授数学教研室编.

2版. —上海: 同济大学出版社, 1999.7

ISBN 7-5608-0555-8

I. 高…

II. 同…

III. 高等数学-高等学校-自学参考资料

IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 26082 号

高等数学自学及解题指导

(第二版)

同济大学函授数学教研室 编

同济大学出版社出版

(上海四平路 1239 号 邮编:200092)

新华书店上海发行所发行

常熟市印刷八厂印刷

开本: 850 × 1168 1/32 印张: 23.5 字数: 680 千字

1990 年 8 月第 1 版

1999 年 8 月第 2 版 1999 年 8 月第 1 次印刷

印数: 1—6000 定价: 30.00 元

ISBN 7-5608-0555-8/O·63

如遇印装质量问题, 可直接向承印厂调换

地址: 常熟市梅李镇通江路 21 号 邮编: 215511

第二版前言

本书是在 1990 年 8 月第 1 版的基础上,为配合使用我校函授数学教研室编写的《高等数学》(第 2 版)教材而重新修订的.这次修订对原书内容作了适当的调整、充实和删改,使章节编目及内容安排基本上都与新版教材一致.

本书保留了原版的特色:既有各章节内容的归纳总结,又有解题思路的分析引导和不同解法的比较;例题丰富而又典型,除给出解答外,还尽量指出应注意的问题及易犯的错误;为适应广大读者学习《高等数学》不同深度要求的需要,还特地保留或增补了一些超出教学基本要求的打 * 号的内容.它不仅适合于广大工科类函授生使用,也可作为各类工科专业的大学生及广大自学者学习“高等数学”课程的辅导书.

参加本书第二版修订工作的有:郭景德、徐鑑青、黄临文、刘浩荣等,全书由郭景德负责汇总定稿.本书第二版的出版,曾得到同济大学出版社李炳钊副编审及同济大学函授学院和应用数学系有关领导的大力支持.在此,我们一并表示感谢.

由于编者水平所限,书中必有不少缺点或错误,恳请诸位读者批评指正.

编 者

1999 年 2 月于同济

前 言

许多函授生及广大的自学者在自学《高等数学》的过程中,由于缺乏老师的直接指导和较好的自学参考书,往往会遇到不少的困难,如学了理论不会用于解题,或者发现解题有错误,但又不知错误的原因何在,等等.为此,我们根据《高等工科院校成人教育,“高等数学”教学基本要求》的要求,在我校多年来积累的函授教学辅导资料的基础上,经过提炼、加工和充实后而编成此书,奉献给广大函授生及立志自学成才的自学者.

本书的核心是解题方法,侧重于帮助读者找到解题的钥匙.

为使本书成为广大自学者的良师益友,使读者掌握高等数学中的基本内容、基本概念、基本解题技巧,我们在编写时,除了对各章、节的重要内容作必要的总结归纳,对例题尽量作详细解答外,还着重指出应该如何分析问题及解题中容易出现的错误.考虑到不同层次的读者的需要,书中也适当地选入了一些较难的例题,介绍了一些超出教学基本要求的内容和方法,这些都加上了“ $\triangle$ ”记号.

本书分析说理比较透彻,解题思路比较广阔,例题类型比较齐全,综合应用方面也有所兼顾,可作为使用我校出版的函授《高等数学》教材的自学参考书,也可作为各类成人教育及全日制大学的工科专业学生,或其他自学者,学习“高等数学”课程的参考书.

本书由我校函授数学教研室部分教师合作编写.其中第一、二、三、十章由郭景德执笔;第四、五、六章由徐鑑青执笔;第七、八章由刘浩荣执笔;第九章由周葆一执笔;第十一、十二章由周忆行执笔.

谈祝多副教授详细审阅了本书的全稿,并提出了许多指导性

的意见.函授数学教研室的全体老师对本书的编写工作也都给以热情的支持和帮助.我们在此一并表示衷心的感谢.由于我们的水平所限,书中难免有许多不足或错误之处,恳请读者批评指正.

编 者

1988 年 10 月于同济

目 录

第二版前言

前 言

第一章 函数

- 1.1 函数的概念 (1)
 - 一、函数的定义(1) 二、反函数、复合函数、初等函数(3)
- 1.2 函数的几种特性 (9)

第二章 极限与连续

- 2.1 极限的概念 (14)
 - 一、极限定义的使用(14) 二、有关极限的几个重要定理(21)
- 2.2 极限的计算 (23)
 - 一、极限的运算法则(23) 二、两个重要极限(27) 三、无穷小的性质(28) 四、两个极限存在的准则(31) 五、幂指函数的极限(33) 六、已知极限值求极限中的某些常数(35)
- 2.3 连续 (36)
 - 一、连续的定义和充要条件,间断点的分类(36) 二、闭区间上连续函数的性质(40)
- 2.4 证题方法综述 (42)

第三章 导数和微分

- 3.1 导数的概念 (46)
 - 一、利用导数的定义求极限(47) 二、利用定义和充要条件研究函数的可导性(48) 三、综合举例(54)
- 3.2 求导方法 (56)

一、导数的四则运算(56) 二、复合函数的导数(57) 三、高阶导数(60) 四、隐函数的导数(63) 五、由参数方程所确定的函数的导数(65) 六、幂指函数的导数和对数求导法(67) 七、导数的几何、物理意义及其应用(71)

3.3 微分 (75)

一、微分的定义和计算(75) 二、微分的应用(76)

第四章 中值定理与罗必塔法则

4.1 罗尔、拉格朗日、柯西中值定理 (80)

一、定理条件的验证(80) 二、定理的基本应用(82) 三、综合举例(92)

4.2 罗必塔法则 (98)

一、罗必塔法则(98) 二、其他未定式(107)

4.3 泰勒公式 (110)

一、求函数的泰勒公式(110) 二、利用泰勒公式作近似计算(112) 三、用泰勒公式证明不等式(114) 四、用泰勒公式求极限(115)

第五章 导数的应用

5.1 利用导数研究函数的性态 (117)

一、函数的单调性(117) 二、函数的极值与最值(119) 三、函数的凹性和拐点(122) 四、函数图形的描绘(124) 五、曲线的曲率(126)

5.2 综合例题 (127)

第六章 不定积分

6.1 最简单的不定积分 (139)

一、不定积分的概念和基本性质(139) 二、最简单的不定积分的计算(142)

6.2 换元积分法和分部积分法	(145)
一、换元积分法(145) 二、分部积分法(153) 三、换元积分法与分部积分法的综合应用(165)	
6.3 有理函数的积分	(172)
6.4 三角函数有理式的积分	(180)
6.5 简单的无理函数的积分	(195)
6.6 综合举例	(203)

第七章 定积分

7.1 定积分的概念和性质	(217)
一、定义和它的应用(217) 二、性质(220)	
7.2 定积分的计算方法	(225)
一、基本计算方法(225) 二、分段函数的积分(231) 三、特殊类型的积分(233)	
7.3 积分上限(下限)的函数及其导数	(239)
7.4 广义积分	(247)
一、函数在无穷区间上的积分(247) 二、积分区间内或区间端点被积函数有无穷间断点的积分(253) 三、积分区间为无穷与积分区间上被积函数有无穷间断点的混合情况(258)	
7.5 综合举例	(260)

第八章 定积分的应用

8.1 元素法	(269)
8.2 定积分在几何上的应用	(272)
一、求平面图形的面积(272) 二、体积(281) 三、平面曲线的弧长(288)	
8.3 定积分在物理、力学上的应用	(293)
一、变力沿直线所作的功(293) 二、水压力(296) 三、其	

他应用(299) 四、平均值和均方根(303)

第九章 向量代数

- 9.1 向量的概念及其几何运算 (306)
 - 一、向量的概念(306) 二、向量的几何运算及其运算规律(306)
- 9.2 向量的坐标表示式 (310)
 - 一、向量的投影(310) 二、向量的坐标表示式(310) 三、向量的线性运算的坐标表示(312)
- 9.3 两向量的数量积与向量积 (314)
 - 一、两向量的数量积(314) 二、两向量的向量积(315)
 - 三、两向量的夹角、垂直与平行条件(315)

第十章 空间解析几何

- 10.1 空间平面及其方程 (327)
 - 一、平面方程(327) 二、两平面之间的相互关系(328)
 - 三、点到平面的距离(328)
- 10.2 空间直线及其方程 (333)
 - 一、空间的直线方程(333) 二、两直线间的关系(333)
 - 三、直线与平面的夹角(334)
- 10.3 空间的曲面与曲线 (351)
 - 一、空间的曲面及其方程(351) 二、空间的曲线及其方程(353) 三、空间曲线在坐标面上的投影曲线的方程(353)

第十一章 多元函数微分法及其应用

- 11.1 多元函数的基本概念 (364)
 - 一、二元函数的定义(364) 二、二元函数的极限(367)
 - 三、二元函数的连续性(373)
- 11.2 偏导数 (374)

一、偏导数的定义(374) 二、偏导数的求法(375) 三、偏导数的几何意义(376) 四、偏导数存在与函数连续性的关系(377) 五、方向导数与梯度(379) 六、高阶偏导数(383)	
11.3 全微分及其应用	(386)
一、全微分(386) 二、全微分的应用(389)	
11.4 多元复合函数的导数	(392)
一、多元复合函数的求导法则(链式法则)(392) 二、几种推广的情形(393) 三、利用多元复合函数求导法则求高阶偏导数(396)	
11.5 隐函数求导法	(404)
11.6 偏导数的几何应用	(414)
一、空间曲线的切线与法平面(414) 二、空间曲面的切平面与法线(414)	
11.7 多元函数极值问题的解法	(421)
一、二元函数无条件极值的求法(421) 二、最大值与最小值的求法(426) 三、二元函数条件极值的求法(428)	

第十二章 重积分

12.1 二重积分的概念与性质	(434)
一、二重积分的概念(434) 二、二重积分的性质(435)	
12.2 利用直角坐标计算二重积分	(437)
12.3 利用极坐标计算二重积分	(448)
* 12.4 二重积分换元法	(456)
12.5 三重积分的概念及其在直角坐标系中的计算方法	(459)
一、三重积分的概念(459) 二、三重积分在直角坐标系中的计算方法(459)	
12.6 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分	(466)

一、利用柱面坐标计算三重积分(466)	二、利用球面坐标 计算三重积分(467)
12.7	重积分的应用 (477)
一、曲面的面积(477)	二、质量(478)
三、静力矩和重心 (478)	四、转动惯量(479)
* 12.8	含参变量的积分 (492)

第十三章 曲线积分与曲面积分

13.1	对弧长的曲线积分 (496)
一、对弧长的曲线积分的定义和性质(496)	二、对弧长的 曲线积分的计算方法(497)
13.2	对坐标的曲线积分 (509)
一、对坐标的曲线积分的定义和性质(509)	二、对坐标的 曲线积分的计算方法(510)
三、两类曲线积分之间的联 系(515)	
13.3	格林公式及其应用 (516)
一、格林公式(516)	二、与路径无关的曲线积分(523)
13.4	对面积的曲面积分 (531)
一、对面积的曲面积分的定义和性质(531)	二、对面积的 曲面积分的计算方法(532)
13.5	对坐标的曲面积分 (538)
一、对坐标的曲面积分的定义和性质(538)	二、对坐标的 曲面积分的计算方法(540)
三、两类曲面积分之间的联 系(545)	
13.6	高斯公式和*斯托克斯公式 (547)
一、高斯公式和*斯托克斯公式(547)	* 二、与曲面无 关的曲面积分和与曲线无关的曲线积分(554)
* 三、场论 初步(557)	
13.7	曲线积分和曲面积分的应用 (560)

- 一、对弧长的曲线积分和对面积的曲面积分的应用(560)
- 二、对坐标的曲线和曲面积分的应用(567)

第十四章 常数项级数与幂级数

- 14.1 常数项级数的概念和性质 (572)
 - 一、常数项级数的概念(572) 二、级数的基本性质(573)
 - 三、级数收敛的必要条件(573)
- 14.2 正项级数的审敛法 (577)
 - 一、比较审敛法(577) 二、比值审敛法[达朗贝尔(D'Alembert)判别法](578) 三、根值审敛法[柯西(Cauchy)判别法](579)
- 14.3 任意项级数的审敛法 (590)
 - 一、交错级数审敛法[莱布尼茨(Leibniz)准则](590) 二、任意项级数的收敛性——绝对收敛与条件收敛(591)
- 14.4 函数项级数的概念与幂级数 (602)
 - 一、函数项级数的概念(602) 二、幂级数及其收敛性(602) 三、幂级数的运算(604)
- 14.5 把函数展开成幂级数 (620)
 - 一、泰勒级数(620) 二、把函数展开成幂级数(620)
- 14.6 函数的幂级数展开式的应用 (630)

第十五章 傅立叶级数

- 15.1 周期为 2π 的函数的傅立叶级数 (636)
 - 一、三角级数及三角函数系的正交性(636) 二、周期为 2π 的函数的傅立叶级数及其收敛性(637) 三、周期为 2π 的函数展开为傅立叶级数(637) 四、定义在 $[-\pi, \pi]$ 上的函数展开为傅立叶级数(637)
- 15.2 正弦级数和余弦级数 (649)
 - 一、正弦级数和余弦级数(649) 二、定义在 $[0, \pi]$ 上的函

数展开为正弦(余弦)级数(649)

15.3 周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数 (660)

第十六章 微分方程

16.1 微分方程的基本概念 (670)

16.2 一阶微分方程 (672)

一、可分离变量方程和齐次方程(672) 二、线性微分方程
与贝努里方程(673) 三、全微分方程(674)

16.3 可降价的高阶微分方程 (692)

16.4 二阶线性微分方程 (698)

一、二阶线性微分方程及其解的结构(698) 二、二阶常系
数线性微分方程(702) 三、可化为常系数线性方程的方
程——欧拉方程(710) * 四、幂级数解法与常数变易法
(711)

16.5 微分方程应用举例 (715)

一、物理问题应用(715) 二、几何问题应用(724) 三、微
小量分析法应用(729)

第一章 函 数

1.1 函数的概念

一、函数的定义

定义 设 D 是某一实数集,若当变量 x 在 D 中每取一个数值时,另一个变量 y 按照一定的法则 f ,总有唯一确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x)$. 这时, x 称为自变量,实数集 D 称为函数的定义域.

1. 函数的确定

由定义知,要确定一个函数必须具备两个要素:对应法则和定义域,与自变量及函数选择的字母无关. 要判断两个函数是否相同,只要比较它们的定义域和对应法则.

例 1 下列每一组的两个函数是否相同? 为什么?

$$(1) f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg|x|;$$

$$(2) f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = (\sqrt{x})^2;$$

$$(3) f(x) = \sqrt{(x-1)^2}, g(x) = x-1;$$

$$(4) f(u) = \sqrt[3]{u^3}, g(x) = x.$$

解 (1) $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,
且 $g(x) = 2\lg|x| = \lg|x^2| = \lg x^2$,

故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应法则也相同. 所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相同.

(2) $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, $g(x)$ 的定义域是 $[0, +\infty)$, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同,故 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不相同.

(3) $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$, 但

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$$

与 $g(x) = x-1$ 的对应法则不, 所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不相同.

(4) $f(u)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$, 且

$$f(u) = \sqrt[3]{u^3} = u,$$

与 $g(x) = x$ 的对应法则也相同, 只是自变量选择的字母不同, 所以 $f(u)$ 和 $g(x)$ 相同.

2. 函数定义域的确定

确定函数的定义域, 意味着在实数范围内找出使函数有意义的自变量的取值范围. 正确解题的关键在于:

(1) 搞清五类基本初等函数的定义域, 例如偶次方根被开方数应非负数; 对数函数的真数要大于零; 反三角正弦、余弦的定义域是区间 $[-1, 1]$ 等等;

(2) 明确分式函数的分母不能等于零;

(3) 熟练掌握解不等式(组)的方法(要认真复习中学阶段的有关知识);

(4) 对实际问题, 应考虑到问题本身是否有意义.

例 2 求函数 $f(x) = \lg(x^2 - x - 2) + \frac{x}{\sqrt{x+2}}$ 的定义域.

解 在函数解析中, 有对数函数和無理分式函数, 因此要使函数 $f(x)$ 有意义, x 必须满足不等式组:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ x + 2 > 0. \end{cases}$$

我们先解不等式 $x^2 - x - 2 > 0$, 即 $(x+1)(x-2) > 0$. 它的左边是一个多项式, 可用图 1-1 的方法确定它的符号. 于是, 不等式的解为

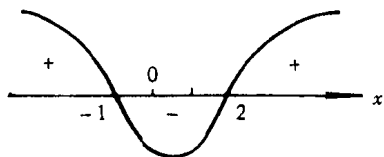


图 1-1

$$x < -1 \quad \text{或} \quad x > 2.$$

现在问题转化为解不等式组:

$$\begin{cases} x < -1 \text{ 或 } x > 2, \\ x + 2 > 0. \end{cases}$$

它也可以借助图形求解,图 1-2 中的阴影部分所对应的区间就是它的解(空心小圆圈表示 x 不能在这点取值). 所以 $f(x)$ 的定义域是

$$-2 < x < -1 \text{ 或 } x > 2.$$

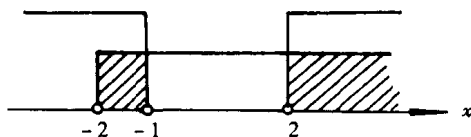


图 1-2

注意 易犯的错误是:

- (1) 忽略了分母不能为零这个因素,从而得到 $x + 2 \geq 0$.
- (2) 误认为分母必须大于零,从而得到 $\sqrt{x + 2} > 0$.

二、反函数、复合函数、初等函数

反函数的定义 设函数 $y = f(x)$ 的定义域是实数集 D , 值域是实数集 W . 若对于任一 $y \in W$, 通过关系式 $y = f(x)$, 都有唯一确定的 $x \in D$ 与之对应, 则称这样确定的函数 $x = \varphi(y)$ 为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 原来的函数 $y = f(x)$ 称为直接函数.

对于反函数 $x = \varphi(y)$, 习惯上仍写作 $y = \varphi(x)$.

复合函数 如果给定两个函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$, 且 $u = \varphi(x)$ 的值域全部或部分地包含在 $y = f(u)$ 的定义域内, 那么通过 u 的联系, y 也是 x 的函数, 这个函数就称作是由函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数, 记作 $y = f[\varphi(x)]$, 其中 u 称为中间变量.

初等函数 由基本初等函数及常数, 经过有限次四则运算或有限次复合步骤所构成的, 且用一个数学式子表示的函数称为初