

国家自然科学基金资助出版

混凝土的 损伤断裂

蔡四维 蔡 敏 著

人民交通出版社

国家自然科学基金资助出版

混凝土的损伤断裂

Hunningtu de Sunshang Duanlie

蔡四维 著
蔡 敏

人民交通出版社

内 容 提 要

本书主要介绍用近代断裂力学、损伤力学理论分析混凝土、钢筋混凝土材料与构件的变形和强度,并针对已有振动结构,介绍如何根据运行期振动系统响应的观测数据进行结构振动参数识别及损伤定位。

本书在理论叙述上深入浅出,所介绍的分析计算方法实用性强。

本书可供有关研究人员、高等院校教师、研究生学习参考。对结构设计工程师及管理工作人员在分析已有工程结构的损伤情况,评估其安全性和结构寿命等方面,本书也将有一定的学习、参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

混凝土的损伤断裂/蔡四维,蔡敏编著. - 北京:人民
交通出版社,1999
ISBN 7-114-03303-6

I.混… II.①蔡… ②蔡… III.混凝土-断裂 IV.TU5
28.07

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 08598 号

国家自然科学基金资助出版

混凝土的损伤断裂

蔡四维 蔡敏 著

张廷楷 审校

插图设计:佘文利 版式设计:刘晓方 责任校对:尹 静

责任印制:张 凯

人民交通出版社出版发行

(100013 北京和平里东街 10 号)

各地新华书店经销

北京凯通印刷厂印刷

开本:850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张:6.5 字数:168 千

1999 年 10 月 第 1 版

2000 年 5 月 第 1 版 第 2 次印刷

印数:3201~6200 册 定价:16.00 元

ISBN 7-114-03303-6

TU·00056

序

混凝土是一种常用的建筑材料，它在房屋、桥梁、隧道、水工建筑、机场、矿井以及军用工程诸多方面，应用极其广泛。可以认为，在近代物质文明的发展过程中，混凝土曾起着很大的作用，而在今后它仍将是一种前景看好的工程材料。

混凝土是以水泥砂浆为基体，以骨料为加劲材料的复合材料。长期以来，混凝土的力学性能一直是科学技术界极为关心的课题。人们为了避免陷入微观、细观结构的麻烦，而将混凝土视为宏观的均质各向同性材料。对混凝土变形、失效机理研究开展得比较早的工作，是将金属材料、泥土等的弹塑性、粘弹塑性等概念运用于混凝土力学性能研究之中，认为混凝土将会以剪切模式失效。因为一般晶态固体的塑性变形，表现为结晶面之间的相对滑移。而混凝土水泥砂浆体的主要成分 CSH 凝胶是一种结晶不完整的蜂窝形或错综复杂的网状结构，其次是 $\text{Ca}(\text{OH})_2$ 成分，结晶虽好但形状复杂，这些微观组成不利于在材料里形成晶体位错及由此而导致的滑移。此外在结构组织方面，混凝土在材料成型之时，常存在内部微孔隙、微裂纹，在外载及环境因素作用下，材料原有缺陷发展的同时，又出现新的微裂纹。新旧微裂纹扩展并集，使材料内出现宏观裂纹，宏观裂纹失稳扩展导致材料破坏；也可能在宏观裂纹并未形成之前，即出现材料失稳崩溃。因此，混凝土屡见先于位错、滑移而出现脆性破坏。

Kaplan 于 1963 年著文将金属断裂力学理论用于混凝土断裂分析，之后大量的研究揭示出混凝土和金属断裂之间的许多不同情况。如混凝土裂纹尖端有较大范围的破碎区，需要大尺寸的混凝土试件进行断裂试验；混凝土的断裂韧性 K_{IC} 有很大的尺寸效

应。1986年 Y.Jeng, S.P.Shah 指出, 混凝土在荷载逐渐增大的同时, 原裂纹将出现缓慢非线性扩展, 到荷载达到临界值时, 才出现失稳扩展。故应将原裂纹长度加上非线性扩展的长度, 连同临界荷载, 应用线弹性断裂力学的公式计算 K_{IC} , 这样得到的才是混凝土材料的断裂韧性并称之为 K_{IC}^S 。缓慢扩展的裂纹段长度要通过裂纹嘴或裂纹尖端的张开量 CMOD、CTOD 配合定出, 而判断实际裂纹是否会失稳破坏, 要依靠两个参数即 K_{IC}^S 和 CTOD 的临界值 $CTOD_c$ 。此外对于混凝土裂纹扩展或断裂分析的研究, 还有 A.Hillerborg 等 1976 年根据混凝土试件拉伸荷载下出现的应变软化现象而提出的粘合裂纹模型, 认为裂纹沿一个面拉开时, 随拉开量不同而有不同大小的抗拉开力作用于裂面上, 拉开量与抗拉开力大小间的关系取决于混凝土软化曲线。另有所谓裂纹带模型, 认为混凝土软化出自材料内部损伤, 假设损伤范围出现在材料一定宽度的带内。其中有设裂带内将出现一系列单向定向裂纹的, 称单向定向裂纹带模型 (Rots, 1988); 有设裂带内有几个定向裂纹的, 称多向定向裂纹模型 (De.Borst, R.Nauta, 1985; De Borst, R.Nauta 1987); 有认为带内出现若干微裂纹面的, 称微裂纹面模型 (Bazant, Rrat, 1988; Ozbolt, Bazant, 1992; M.Petrangeli, J.Ozbolt, 1996)。这些模型都根据混凝土软化曲线以拟定有限元分析时裂纹带内单元的应力增量与应变增量的关系。因经典断裂力学只适应于构件具有一个宏观裂纹, 或者虽有多个宏观裂纹, 但其中只有一个起主导作用的情况。如果构件没有这样一个宏观裂纹, 断裂力学就无法判断材料的破坏。而前述粘合裂纹模型、裂纹带模型, 则可用于无原有宏观裂纹的情况。只要材料内一点的拉应力强度超过极限值 f_t , 就认为这里出现开裂, 尔后荷载增加时, 裂纹逐渐扩展而至断裂。此外, 这些方法都不涉及裂纹尖端的奇异性, 从而给有限元计算带来方便。

连续损伤力学于 70 年代形成, 用以研究材料结构组织在外载、环境因素作用下, 出现如微裂纹形成、扩展、空洞萌生、晶

体位错等细观不可逆变化而造成的材料力学性能劣化。这时采用描述损伤状态的变量,根据材料损伤型本构方程和损伤演变律,用连续体力学方法按问题的初值和边界条件以求解答。前已述及混凝土受外载或环境因素作用时,将出现脆性损伤,特别在水泥砂浆基体与骨料之间接合部位,是材料的最薄弱环节。不论外载是拉、压、剪切,不大的能量,都很容易造成这个部位开裂。为此研究人员很自然地想到将损伤力学用于混凝土。损伤力学应用于混凝土的论文最早见如 K.E.Loland, 1980; J.Mazars, 1982; M.Lorrain, K.E.Loland, 1983; J.Mazars, J.Lemaitre, D.Francois, 1984 等。最初人们把微观裂纹形成扩展汇集成宏观裂纹之前这一阶段的分析作为损伤力学范围,宏观裂纹失稳断裂分析作为断裂力学范围。实用上不论材料内有无宏观裂纹都可以通过损伤力学来分析。例如用损伤力学分析裂纹尖端材料损伤状况,可以估计裂纹扩展。又如前述从混凝土材料的应变软化出发的粘合型裂纹模型、断裂带模型等,其原方法中都先作有某些假定,如假定混凝土沿一个面作裂纹扩展或材料在一个一定厚度的带内出现裂纹,并曾假定这个裂面或裂纹带之外没有能量耗散。此外裂纹带本构关系的建立也有假定。实际上如果用损伤力学分析来代替这类方法,则可以放弃这些假定。因为损伤力学的理论依据是只要材料内部某点应变超过门槛值,这里就会出现损伤。这种不能愈合的损伤变形,就会带来能量的耗散。

尽管工程师们可能仍偏爱断裂力学方法,因为只要求出应力强度因子后与材料断裂韧性作对比,即刻就能解答问题。但用损伤力学理论去建立可供实际应用的简单判据并非不可能,例如:纤维复合材料力学中就有主张摒弃断裂力学方法而采用损伤能量释放率来作材料破坏判据的成功研究。当然,用损伤能量释放率来作为混凝土破坏判据还要进行更多更细致的试验和分析。

本书主要分三个部分。第一、第二章为第一部分,即断裂力学部分,涉及经典断裂力学主要内容及混凝土断裂分析。第二部分从第三章到第六章,为损伤力学部分,包括损伤力学基本理论

及其在混凝土、钢筋混凝土中的应用。其中除各向同性损伤外，也涉及各向异性损伤。因为混凝土损伤后可能为宏观各向异性，钢筋混凝土、有钢板夹层的混凝土板等可视为宏观各向异性并出现各向异性损伤。第七章为第三部分，介绍实际振动结构，如何通过其运行期收集的结构响应数据，分析了解结构的损伤部位和损伤程度。针对已有大部分混凝土结构物都出现有不同程度的损伤，工程师们要查明其损伤的情况，分析结构物安全、寿命等问题，对这部分内容他们可能会欢迎的。本书第一部分由蔡敏执笔完成，第三部分由蔡敏、蔡键合作完成，第二部分则是蔡敏、蔡键协助我完成。

全书试图介绍混凝土损伤理论和断裂分析方面的近代研究状况，以及便于工程师及科研人员参考的主要成就，但很可能有许多应该介绍而书中并未提及的内容。这些疏漏完全应该由我个人负责。在这里我谨向为这些内容作出贡献的各位学者表示歉意，请求他们对本书的疏漏给予原谅。至于书中涉及的观点和我们的研究工作或建议中的错误之处希望读者不吝指正。

此书出版得到国家自然科学基金资助。

王健军同志对本书原稿提出了很多宝贵意见，在此表示感谢。

蔡四维

1998年7月于合肥

目 录

第一章 断裂力学的简单回顾.....	(1)
第一节 断裂力学起源.....	(1)
第二节 应力强度因子、材料的断裂韧性.....	(9)
第三节 能量释放率	(21)
第四节 弹塑性断裂力学	(25)
第二章 混凝土裂纹形成、扩展与断裂	(35)
第一节 混凝土断裂特性	(35)
第二节 粘合裂纹模型	(44)
第三节 Hillerborg 断裂模型的峰值荷载	(50)
第四节 裂纹带断裂模型	(55)
第五节 两参数模型	(66)
第三章 损伤力学基础	(73)
第一节 材料的损伤度	(73)
第二节 材料的损伤型本构方程	(76)
第三节 热力学势与耗散势函数形式示例	(83)
第四节 损伤力学与断裂力学	(89)
第四章 混凝土的损伤	(94)
第一节 连续损伤理论在混凝土中的应用	(94)
第二节 Resende 关于混凝土损伤机制的研究	(102)
第三节 损伤理论应用示例.....	(110)
第四节 混凝土的各向异性损伤.....	(122)
第五章 钢筋混凝土的损伤.....	(130)
第一节 连续损伤理论应用于钢筋混凝土.....	(130)
第二节 钢筋混凝土平板损伤与开裂.....	(135)

第三节	钢筋与混凝土粘着、滑移的有限元分析·····	(144)
第四节	钢筋混凝土板与各向异性损伤·····	(148)
第六章	混凝土循环荷载、疲劳损伤、粘弹性损伤·····	(158)
第一节	循环荷载下混凝土材料性质·····	(158)
第二节	混凝土疲劳损伤·····	(163)
第三节	混凝土的粘弹性损伤·····	(171)
第七章	工程结构损伤定位·····	(176)
第一节	振动系统参数识别、损伤定位概念·····	(176)
第二节	振动系统参数识别方法·····	(177)
第三节	结构损伤定位·····	(187)
参考文献	·····	(195)

第一章 断裂力学的简单回顾

第一节 断裂力学起源

弹性力学中介绍过孔口应力集中理论。例如无限平板中心有圆孔的情况，孔远处受单向均匀拉应力 σ 作用，那么孔边的最大拉应力将是 3σ ，离孔边渐远后逐渐减小到 σ 。上一世纪初 Inglis 研究过椭圆形孔口的问题，指出孔边应力集中随椭圆形孔口越扁平而越严重。如果椭圆孔变成一条穿透裂纹，在裂纹端点有尖锐的交角，这时在裂纹尖端的应力将是无限大。从材料的抗拉能力来考虑，则说明一个带穿透裂纹的构件，根本就不能承受外荷载。然而事实却并非如此。1920 年 Griffith 清楚地论述了弹性理论分析裂纹问题时出现的上述似是而非的结论。他应用能量原理建立裂纹尺寸、断裂应力以及材料性能之间的关系。Griffith 的分析方法和主要结论如下。

如图 1-1-1，为一个相对于裂纹尺寸甚大的三维体，材料杨

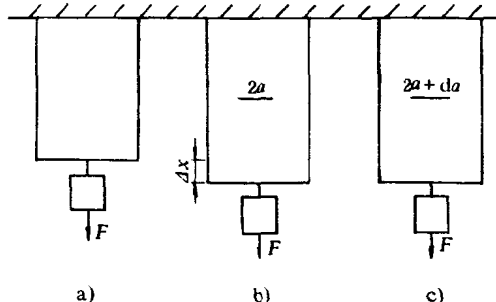


图 1-1-1 裂纹体受拉图

氏模量 E 、泊松比 ν ，物体一端固定，另一端受拉力 F 作用。

a) 图为无裂纹体受 F 作用后，拉应力使物体出现一定量的伸长变形。b) 图为加载前物体有一半半径长度为 $2a$ 的钱币形裂纹，因裂纹使物体的柔度增大，它受力后要比 a) 图无裂纹时的伸长量增大 Δx 。现比较 a)、b) 两个物体能量的变化。

令 a) 图无裂纹体的总能量为 U_A ，b) 图因物体引进了裂纹表面，应当增加表面能 U_S 。表面能来自将物体质点逐渐拉开至破坏时为克服物体质点间变化的作用力与质点逐渐分开的位移所做的功。同时因裂纹削弱了物体，使较少的原子键承受与 a) 图同样的荷载，因此物体内的应变能增加 U_{SE} 。另由于物体的伸长量增大了 Δx ，使荷载势能减小 U_F 。可见 b) 图物体的能量应为：

$$U_B = U_A + U_S + U_{SE} - U_F \quad (1-1-1)$$

现在考虑第三种状态，即图 1-1-1 中的 c) 图。这是设 b) 图物体的裂纹长度由 $2a$ 增至 $2a + da$ ，其能量为：

$$U_C = U_B + \frac{\delta U_B}{\delta a} da \quad (1-1-2)$$

Griffith 认为裂纹扩展过程中，总能量不会增大，那么

$$\frac{\delta U_B}{\delta a} da \leq 0 \quad (1-1-3)$$

按 Sack 于 1946 年得出的 U_{SE} 为：

$$U_{SE} = \frac{8\sigma^2 a^3 (1 - \nu^2)}{3E} \quad (1-1-4)$$

表面能 U_S 可以写作单位面积表面能 γ 与裂纹表面积的乘积，即

$$U_S = 2\pi a^2 \gamma \quad (1-1-5)$$

荷载势能的减少等于应变能增加的两倍：

$$U_F = 2U_{SE} = \frac{16\sigma^2 a^3 (1 - \nu^2)}{3E} \quad (1-1-6)$$

这些结果代入式 (1-1-1) 后对裂纹长度作微分运算，则式 (1-1-3) 化作：

$$\frac{\delta U_B}{\delta a} da = \left[4\pi a \gamma - \frac{8\sigma^2 a^2 (1-\nu^2)}{E} \right] da \leq 0 \quad (1-1-7)$$

考虑到 $da \geq 0$, 便可得出断裂方程

$$\sigma_C \geq \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \left[\frac{\gamma E}{a(1-\nu^2)} \right]^{1/2} \quad (1-1-8)$$

σ_C 是无限大物体内部钱币形裂纹变为不稳定时所需要施加的临界应力。这说明裂纹体还是能承受一定的作用力, 只是裂纹削弱了材料的强度。这时材料的实际强度除了取决于弹性系数 E 和 ν 之外, 还有单位面积表面能 γ 以及裂纹的尺寸 a 。

式 (1-1-8) 推广于其他类型裂纹和加载条件的一般表达式为:

$$\sigma_C = A \left[\frac{\gamma E}{a(1-\nu^2)} \right]^{1/2} \quad (1-1-9)$$

式中 A 是一常数, 它与裂纹的几何形状、裂纹所处的位置、物体的尺寸以及加载方式有关。

Griffith 的观点是:

$$\frac{\delta U_B}{\delta a} \leq 0 \text{ 或 } \frac{\delta(-U_{SE} + U_F)}{\delta a} \geq \frac{\delta U_S}{\delta a}$$

时, 断裂就会发生。下面来分析一下这个断裂条件。

在式 (1-1-1) 中略去恒定项 U_A 并不影响所做的分析。取 $U_B = U_S + U_{SE} - U_F$ 。将式 (1-1-5)、式 (1-1-6) 代入得:

$$U_B = 2\pi a^2 \gamma - \frac{8\sigma^2 a^3 (1-\nu^2)}{3E} \quad (1-1-10)$$

兹对 $\sigma > 0$ 时来研究 U_B 随 a 的变化。取临界条件 $\frac{\partial U_B}{\partial a} = 0$, 从式

(1-1-10) 可见 $\frac{\partial^2 U_B}{\partial a^2} < 0$ 。绘出 $U_B \sim a$ 曲线, 见图 1-1-2 所示。

对一给定的 σ 值有一条相应的曲线, 线上有个峰值 $(U_B)_{\max}$,

它对应于 $\frac{\partial U_B}{\partial a} = 0$ 。令这个峰值对应的裂纹值为 $a_{\max}$, 从曲线上

看出, 如裂纹 $a_{\max}$ 扩展, 则 U_B 就下降。

由图 1-1-2 可以看到：当 σ 值增大时，相应的曲线向原点移动，而 $(U_B)_{\max}$ 下降，曲线与 a 轴交点向左移。当 $\sigma = \sigma_c$ 为临界应力时，与之对应的有 $(a_{\max})_c$ 和 $(U_B)_{\max})_c$ 。当 $\sigma < \sigma_c$ 时，裂纹 $(a_{\max})_c$ 就不可能扩展。因为从小于 σ_c 的任何 σ 值对应的曲线可见到各曲线上与坐标 $(a_{\max})_c$ 对应的点 $\frac{\partial U_B}{\partial a} > 0$ ，而裂纹扩展的条件是 $\frac{\delta U_B}{\delta a} \leq 0$ 。

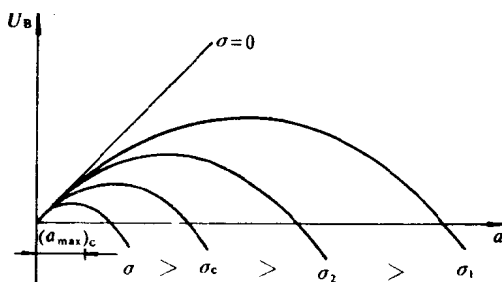


图 1-1-2 式 (1-1-10) 的 U_B 、 a 、 σ 关系图

Griffith 理论是根据弹脆性断裂给出的。在物体内部 $\frac{\delta (-U_{SE} + U_F)}{\delta a}$ 等于或大于形成裂纹新表面的 $\frac{\delta U_S}{\delta a}$ 时，裂纹扩展。此时，如有更多余的能量，它会以其他形式，如动能、热能耗散掉。

Griffith 指出结晶固体的理论强度，按晶格性质估计应有 $\sigma_{th} = \left[\frac{E\gamma}{b} \right]^{1/2}$ ， γ 即表面能、 b 是原子等效间距， E 是二原子间作用力与拉伸位移关系曲线的斜率。许多材料都有 $\gamma \doteq \frac{Eb}{40}$ ，则 $\sigma_{th} = \frac{E}{6}$ 。但实际材料由于缺陷的存在，其强度远低于此值。

图 1-1-3 是 Griffith 对玻璃平板试验的结果。当板厚度减薄时，玻璃的开裂应力却在增加；当厚度增大到极限时，便得到整体玻璃的强度。而当玻璃厚度趋近于 0 时，强度接近于 σ_{th} 。这也解释了近代复合材料中玻璃纤维的强度特高而使得玻璃钢材料

具有很高的抗拉能力^[8]。

Griffith的工作是开展材料断裂研究很重要的第一步。但之后的 20 余年对材料断裂学科的研究一直处于沉闷状态，人们对断裂研究仅停留在科学好奇之上而没有使它进入到工程实际中去。其中有一个原因是 Griffith 理论不适用于常用的具有一定塑性的金属材料。第二次世界大战期间及之后的几年，在焊接商船上发生了多次灾难性的断裂事

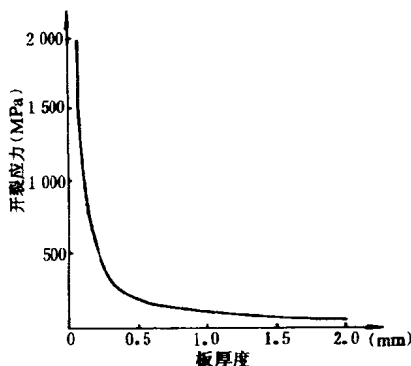


图 1-1-3 Griffith 对玻璃平板的试验结果

故。大约 5 000 艘在大战时期建造的焊接商船中有 1 000 多艘出现结构破坏，其中 150 艘严重破坏，10 艘断为两截。此外还有导弹壳体、飞机以及其他一些结构的断裂事故出现，这些情况的出现才促使人们进行更细致的材料断裂研究。在此期间，美国海军研究实验室的 Irwin 及其同事将 Griffith 理论推广应用于金属和其他工程材料，并将 Griffith 的能量平衡与一更容易计算的裂纹尖端弹性参数——应力强度因子联系起来，这两方面的贡献对断裂力学的发展起着决定性的作用。以后在此基础上发展、形成了今天的“线弹性断裂力学”，也有人称之为 Griffith-Irwin 断裂力学。

1958 年 Irwin 提出的断裂分析方法涉及到裂纹尖端附近的应力场。将极坐标的原点定在裂纹尖端时，裂纹尖端附近的应力场

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{r^{1/2}} f_{ij}(\theta) \quad (1-1-11)$$

$r \ll$ 裂纹尺寸 a 。式中的 K 称作应力强度因子，它与裂纹的形状、尺寸、位置以及加载的方式有关，其量纲为力 / (长度)^{3/2}。

应力强度因子是表示裂纹尖端附近弹性场强度的物理量，它

不依赖于坐标 r 、 θ ，即不涉及应力、位移在裂纹端部的分布情况。同一种物质的材料，尽管几何形式、裂纹尺寸、受力状态不同，但只要在裂纹尖端出现了相同的 K 值，则裂纹尖端附近的物理状态就相同。为此可通过一定材料的裂纹构件断裂试验，求出其失稳断裂时相应的 K 的临界值 K_C ，则同种材料其他裂纹构件，只要 K 值大于等于 K_C ，构件就失稳断裂。

从式 (1-1-11) 求出无限大平板裂纹尖端附近各点的应力和位移，Irwin 根据应力和位移求出裂纹尖端单位长度裂纹愈合时所需的功为：

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} K^2 \quad (\text{平面应变状态}) \quad (1-1-12)$$

由于使裂纹扩展单位长度时应释放出同样数量的能量，故称 G 为裂纹扩展的能量释放率。能量释放率随荷载增大达到临界值 G_C 时，则裂纹失稳扩展，按式 (1-1-12) 应有

$$G_C = \frac{1-\nu^2}{E} K_C^2 \quad (\text{平面应变状态})$$

和 Griffith 理论比较， G 即是裂纹扩展单位长度时 $U_F - U_{SE}$ 的变化

$$G = \frac{-\delta(U_{SE} - U_F)}{\delta a} \quad (1-1-13)$$

Irwin 用 G 来表示能量释放率，也是纪念 Griffith 之意。不过 Griffith 考虑了整体物体的应力、位移；而 Irwin 只考虑裂纹尖端附近的应力、位移。此外，Griffith 认为只要能量释放率大于等于形成新裂纹表面所需的能量耗散，裂纹就失稳扩展；而 Irwin 不再规定材料的表面能量是唯一的能量耗散方式。Irwin 认为裂纹前缘出现塑性变形的材料，如果塑性变形局限在裂纹尖端附近的小范围之内，则裂纹扩展时应在 Griffith 表面能一项中加上塑性变形功。这样 Irwin 就将 Griffith 理论推广到工程实用材料之中。在线弹性断裂力学发展过程中，还应提到的是 Sih、Paris、Erdogan 于 1962 年为工程实用提供了最早的应力强度因

子手册。Winne、Wundt 于 1958 年介绍的线弹性断裂力学解决发电机转子断裂问题的报告为断裂力学应用于工程实践起到了极为重要的作用。本章第二节将介绍应力强度因子计算的有关细节。

以上是研究断裂时构件只出现小范围塑性变形的情况。在实用上如中低强度、高韧度钢材断裂前裂纹尖端会出现相当大的塑性变形区，韧性足够大的材料，伴随着裂纹扩展的塑性屈服范围，塑性变形已达到可以与裂纹尺寸相比较的程度。由此而开展了断裂的非线性弹塑性理论研究。

首先是 Irwin、Kies、Smith 于 1958 年开始考虑裂纹尖端塑性区的效应。他们认为塑性变形区域内不可能维持没有塑性介入时的应力水平，裂纹体实际上要比用完全弹性分析得出的结果弱一些。他们在线弹性力学的框架上考虑塑性问题，提出将这个效应视为与将裂纹长度稍许增加一点的情况相同，也即是认为应该略为放大原裂纹的长度，用它来求应力强度因子作为实际的裂纹尖端弹性场参数。

与 Irwin 等人提出扩大线弹性断裂力学应用范围的方法同时，Wells 则提出了一个用于小范围屈服并且希望也能用于大范围屈服情况的方法，即用裂纹尖端张开位移（称 COD）作为鉴别裂纹扩展的参数。在小范围屈服情况下，根据上述扩大裂纹长度的概念，可以计算裂纹尖端的张开量 δ ，这个张开量可通过应力强度因子来表示。Wells 给出的计算结果是：

$$\delta = \frac{K_I^2}{E\sigma_S} \quad (1-1-14)$$

σ_S 为材料的屈服强度。既然材料在 K 达到 K_C 时失稳断裂，那么在 δ 等于 δ_C ，即

$$\delta_C = \frac{K_C^2}{E\sigma_S} \quad (1-1-15)$$

时也就发生失稳断裂。这就是说，COD 方法与线弹性断裂理论的适用范围是完全等价的。此外 Wells 还认为可以将 COD 法扩

展用于大范围屈服情况。1960年 Dugdal 利用弹性理论的莫斯海里什维里算法, 导出无限平板穿透裂纹尖端大范围屈服区的长度算式, 称为 D—M 模型。之后 Durdekin, Stone 按 D—M 模型计算出裂纹尖端张开量

$$\delta = \frac{K^2}{E\sigma_s} \left(1 + \frac{\pi^2 \sigma^2}{24 \sigma_s} + \dots \right) \quad (1-1-16)$$

当 $\sigma < \sigma_s$ 时, 此式与线弹性断裂 Wells 提出的结果相容。

但用 COD 法准确地实测材料的 δ_c 值则较为困难, 同时一般情况下裂纹尖端大范围屈服的范围、张开位移 δ 与荷载、裂纹尺寸等关系公式也不易求出。

考虑失稳扩展前, 裂纹尖端会有相当大的塑性区存在的这类情况, 除上述 COD 法外, 另有由 Rice (1968)、Hutchinson (1968)、Rosengren (1968)、Sanders (1960)、Eshelby (1969)、Cherepanov (1969) 等人提出并由 Rice 总结出的一个与路径无关的回路积分法—— J 积分法, 按

$$J = \int_{\Gamma} W dy - \vec{T} \frac{\partial \vec{U}}{\partial a} dS \quad (1-1-17)$$

Γ 为包围裂纹尖端的回路, $\vec{T}$ 为 Γ 上的张力矢量, $\vec{U}$ 为 Γ 上的位移矢量, W 为回路内的应变能密度, 坐标轴 y 取为垂直裂纹面的方向。Rice 证明了 J 是与 Γ 路径选择无关的常量, 对非线性弹性问题只要通过弹性理论平衡方程、小变形条件, 就可以得出证明。因为弹塑性问题, 只要简单加载, 即无卸载、也没有中性变载时, 就属于非线性问题, J 积分也就与路径无关。证明 J 积分与路径无关时, 并不涉及裂纹前缘应力、位移的具体算式, 也即是 J 积分避免了求裂纹前缘塑性应力场的麻烦。

曾经证明对线弹性断裂问题, J 就等于能量释放率 G 。对弹塑性问题, 只要在小应变和无卸载情况下, 即认为 J 积分能是两个相同材料、相同物体而裂纹尺寸有差异 Δa 时两物体势能差 $\Delta \Pi$ 与 Δa 比值的极限。这个结论有助于通过试件柔度法求材料