

B

普通高等教育机电类规划教材

# 现代控制理论基础

合肥工业大学 王孝武 主编



机械工业出版社

普通高等教育机电类规划教材

# 现代控制理论基础

合肥工业大学 王孝武 主编

机械工业出版社

本书系统地介绍了状态空间法和多变量频域法的基本理论与基本方法，并介绍了这两种方法在线性定常系统中的应用，包括系统分析的方法以及为了获得希望的系统瞬态性能和稳态性能的设计方法。除此之外，本书还介绍了系统最优控制中最基本的理论和方法。

本书的内容阐述循序渐进，富有启发性；论证与实例配合紧密；注意全书各章节之间内容的衔接，注意与经典控制理论中有关内容的联系，可读性好，便于自学。

本书是高等工业学校工业自动化专业教学指导委员会规划的工业自动化专业本科生教材，同时可作为自动控制、电机电器及其控制、计算机应用、应用电子、通信等专业本科生教材，也可供从事这些领域的工程技术人员参考。

## 现代控制理论基础

合肥工业大学 王孝武 主编

\*

责任编辑：韩雪清 刘 辉 版式设计：冉晓华  
封面设计：姚 毅 责任校对：罗凤书  
责任印制：路 琳

\*

机械工业出版社出版（北京市百万庄大街 22 号）  
邮政编码：100037  
（北京市书刊出版业营业许可证出字第 117 号）  
北京市密云县印刷厂印刷  
新华书店北京发行所发行·新华书店经售

JS433/28

\*

开本  $787 \times 1092^{1/16}$ ·印张 17.75·字数 434 千字  
1998 年 10 月第 1 版第 1 次印刷  
印数 0 001—3 000 定价：24.50 元

\*

ISBN 7-111-06228-0/TP·725 (课)

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

# 前 言

本书是高等工业学校工业电气自动化专业教学指导委员会会议（汕头会议）决定新编的《现代控制理论基础》教材。

本书在取材上，主要介绍状态空间法。在已知数学模型的情况下，研究系统的运动规律和能控性、能观测性、稳定性等系统的基本结构特性（即系统分析）以及改变系统运动规律的可能性与方法（即系统设计）。一般地说，实际工程中，不仅关心系统能够稳定运行，而且尽可能使系统具有希望的瞬态性能和稳态性能。因此，本书除了介绍状态反馈系统极点配置的内容外，还介绍了内模原理和鲁棒性等概念，以及实现渐近跟踪与干扰抑制的设计方法。本书第六章中，通过两个贴近工程实际的最优控制问题，介绍了最优控制的基本理论与方法。几乎在状态空间发展的同时，多变量频域法产生并得到较快地发展，考虑到生产过程自动控制的需要，以及广大工程技术人员对频率法熟悉的实际情况，本书介绍了多变量频域法。它的特点是在一定条件下，将多输入-多输出系统化为多个单输入-单输出系统来处理。将经典控制理论中的频率法推广到多输入-多输出系统中去，并可由计算机辅助设计。为了便于学习，书中介绍了多变量频域法的数学基础以及多变量系统的零点、极点及其性质。

在编写方法上，从实例出发，引出问题，进而分析问题，解决问题。书中内容的阐述循序渐进，富有启发性。论证与实例配合紧密，注意各章节之间内容的呼应，注意与经典控制理论中一些内容的联系，可读性好，便于自学。书中还介绍了一些用计算机分析和设计控制系统的算法。

本书可以作为工业自动化、自动控制、电机电器及其控制、应用电子、计算机应用、通信等专业本科生教材，也可供从事这些领域的工程技术人员参考。

本书由合肥工业大学王孝武教授主编，其中第一、三、五、六、七章由王孝武编写，第二、四章由中国科技大学王友宁编写。

本书由太原工业大学赵庆生教授主审，华中理工大学胡亚光教授、安徽工学院王经纬教授也对本书作了严谨、认真的审阅，提出了许多宝贵的意见，在此谨向他们表示衷心感谢；在本书编写过程中得到合肥工业大学顾绳谷教授、上海大学陈伯时教授、北京轻工业学院夏德铃教授、安徽大学李仁教授、中国科技大学李嗣福教授、合肥工业大学教材科郑象鹤科长、合肥工业大学电气工程系的关心、帮助和支持，在此一并致谢。

限于编者的水平有限，书中的不妥或错误之处在所难免，恳请指正。

编 者

1998年4月于合肥

# 目 录

<b>前 言</b>	
<b>绪 论</b> .....	1
<b>第一章 控制系统的数学模型</b> .....	4
第一节 状态空间表达式 .....	4
第二节 由微分方程求状态空间表 达式 .....	10
第三节 传递函数矩阵 .....	15
第四节 离散系统的数学描述 .....	19
第五节 线性变换 .....	24
第六节 组合系统的数学描述 .....	32
小结 .....	36
习题 .....	36
<b>第二章 线性控制系统的运动分析</b> .....	39
第一节 线性定常系统齐次状态方程的 解 .....	39
第二节 状态转移矩阵 .....	41
第三节 线性定常系统非齐次状态方程 的解 .....	49
第四节 线性时变系统的运动分析 .....	51
第五节 线性系统的脉冲响应矩阵 .....	55
第六节 线性连续系统方程的离散化 .....	58
第七节 线性离散系统的运动分析 .....	61
第八节 用计算机求解系统方程 .....	65
小结 .....	67
习题 .....	68
<b>第三章 控制系统的能控性和能观测     性</b> .....	71
第一节 引言 .....	71
第二节 能控性及其判据 .....	73
第三节 能观测性及其判据 .....	80
第四节 离散系统的能控性和能观 测性 .....	85
第五节 对偶原理 .....	89
第六节 用计算机分析系统能控性和能观 测性 .....	92
第七节 能控标准形和能观测标准形 .....	95
第八节 能控性、能观测性与传递函数 关系 .....	99
第九节 系统的结构分解 .....	101
第十节 实现问题 .....	106
小结 .....	113
习题 .....	114
<b>第四章 控制系统的稳定性</b> .....	117
第一节 引言 .....	117
第二节 李亚甫诺夫意义下稳定性的 定义 .....	119
第三节 李亚甫诺夫第二法 .....	121
第四节 线性连续系统的稳定性 .....	124
第五节 线性定常离散系统的稳定性 .....	126
第六节 有界输入和有界输出稳定 .....	127
第七节 非线性系统的稳定性分析 .....	130
小结 .....	136
习题 .....	137
<b>第五章 线性定常系统的综合</b> .....	139
第一节 引言 .....	139
第二节 状态反馈和输出反馈 .....	139
第三节 状态反馈系统的能控性和能观 测性 .....	141
第四节 极点配置 .....	142
第五节 镇定问题 .....	147
第六节 状态重构和状态观测器 .....	149
第七节 降阶观测器 .....	154
第八节 带状态观测器的状态反馈 系统 .....	157
第九节 渐近跟踪与干扰抑制问题 .....	158
第十节 解耦问题 .....	165
第十一节 计算机辅助设计 .....	174
小结 .....	179
习题 .....	179
<b>第六章 最优控制</b> .....	181
第一节 引言 .....	181
第二节 用变分法求解最优控制问题 .....	183
第三节 极小值原理及其在快速控制中的 应用 .....	190

第四节	用动态规划法求解最优控制		第二节	数学基础	215
问题	196		第三节	控制系统的系统矩阵	226
第五节	线性状态调节器	200	第四节	零点、极点及其性质	228
第六节	线性伺服机问题	209	第五节	逆乃奎斯特阵列设计法	233
小结	213		第六节	特征轨迹设计法	258
习题	213		小结	274	
第七章	线性多变量系统的频域法	215	习题	274	
第一节	引言	215	参考文献	278	

# 绪 论

## 一、控制理论发展简况

理论来源于实践,又反过来指导实践。控制理论的发展过程也证明了这个真理。在控制理论未形成之前,人们对控制理论中的一个最为重要的概念——反馈就有了认识,并利用它创造一些装置或机器,最有代表性的是1765年瓦特(J. Watt)发明了蒸汽机离心调速器。在使用过程中,发现在某些条件下,蒸汽机的速度有可能自发地产生剧烈的振荡。1868年,物理学家麦克斯韦(J. C. Maxwell)解释了这种不稳定现象,并提出避免这种现象的调速器设计规则。通过线性常系数微分方程的系数和根的关系,推导出一个简单的代数判据。1877年和1895年两位数学家罗斯(Routh)和赫尔维茨(Hurwitz)各自独立地提出了对于高阶微分方程描述的、较为复杂系统的稳定性代数判据,至今沿用。1892年俄国数学家李亚甫诺夫(A. M. Ляпунов)发表了《论运动稳定性的一般问题》论著。他用严格的数学分析方法全面地论述了稳定性理论及方法,为控制理论奠定了坚实的基础。总之,这一时期的控制工程出现的问题多是稳定性问题,所用的数学工具是常系数微分方程。

20世纪30年代,美国贝尔实验室建设一个长距离电话网,需要配置高质量的高增益放大器。1927年布莱克(H. S. Black)发明了负反馈放大器。在使用中,放大器在某些条件下,会不稳定而变成振荡器。1932年布莱克的放大器稳定性判据由乃奎斯特(H. Nyquist)提出。这是一个频率判据。它不仅可以判别系统稳定与否,而且给出稳定裕量。1940年伯德(H. W. Bode)引入对数坐标系,使频率法更适合工程应用。1942年哈里斯(H. Harris)引入了传递函数概念。1945年伯德发表了《网络分析和反馈放大器设计》,奠定了自动控制理论的基础。1948年依万斯(W. R. Evans)提出了根轨迹法。该法指出如何靠改变系统中的某些参数去改善反馈系统动态特性的方法。这是对乃奎斯特频率法的补充。在这个期间,尼科尔(N. Nishol)和菲利浦(R. Philips)介绍了随机噪声对系统性能的影响,其理论基础是建立在维纳(Wiener)滤波理论之上的;雷加基尼(Ragazzini)和查德(Zadeh)领导40多人研究了线性采样系统。至此,对于单输入-单输出(单变量)线性定常系统为主要研究对象,以传递函数作为系统基本的描述,以频率法和根轨迹法作为系统分析和设计方法的自动控制理论建立起来了。通常称为经典控制理论。由于这个理论采用复(频)域法研究,主要优点是:(1)与时域法相比,计算量小,而且有的工作可用作图法完成;(2)物理概念清晰;(3)可以用实验方法建立系统数学模型,因此受到工程技术人员的欢迎。有了理论指导,这时期的工业生产得到很快的发展。尤其是二次世界大战期间,军事上如飞机的自动导航,反情报雷达的研制,炮位跟踪系统等等均应用了反馈控制理论。

到了20世纪50年代,世界进入了一个和平发展时期。核反应堆的控制、航空和航天的控制,尤其是后者,它的特点是飞行高度高;一次性飞行;精度要求高;控制参数多等。经典控制理论就显出它的局限性,难以用来解决复杂的控制问题。而此期间,计算机发展很快,高速、高精度的数字计算机相继推出,为控制理论的发展提供了强有力的工具。这时期,最优控制(Optimal Control)方法提出来了。其理论就是1956年苏联数学家庞德里亚金

(Л.С. понтрагин)的极大值原理和1957年美国学者别尔曼(Bellman)的动态规划法。到了1959年在美国达拉斯(Dallas)召开的第一次自动控制年会上,卡尔曼(Kalman)及伯策姆(Bertram)严谨地介绍了非线性系统稳定性。在他们的论文中,用基于状态变量的系统方程来描述系统。他们讨论了自适应控制系统(Adaptive Control System)的问题,并首次提出了现代控制理论。随后,卡尔曼又发表了《控制系统的一般理论》、《线性估计和辨识问题的新结果》,奠定了现代控制理论的基础。现代控制理论以状态空间模型为基础,研究系统内部结构的关系,提出了能控性、能观测性等重要概念,提出了不少设计方法。首先获得实际应用的是60年代出现的各种空间技术,这在相当大的程度上依赖最优控制问题的解决,例如空间运载火箭用最少燃料消耗、最少时间送入轨道等等。然而把它用到一般工业控制中,却遇到了一些困难。原因是:(1)大多数工业对象和宇航问题不一样,其数学模型很难精确得到;系统的性能指标,常给出一定范围,不便写成明确的数学表达式;(2)直接采用最优控制方法设计的控制器往往过于复杂,不便于实际应用;(3)工业上的应用,希望投资少,控制效果好。因此,20世纪70年代,在状态空间法蓬勃发展的同时,不少学者对复(频)域法研究感兴趣,特别值得提出的是英国学者罗森布劳克(N.H.Rosenbrock),他系统地、开创性地研究了如何将单变量系统的频率法推广到多变量系统的设计中。他的著名论文“采用逆乃奎斯特阵列法设计多变量系统”,利用矩阵对角优势(diagonal dominant)概念,把一个多变量系统的设计转化为人们熟知的多个单变量系统的设计问题。这个方法的成功带来了频域法的复兴。70年代,相继又出现了梅奈(Mayne)的序列回差法,麦克法兰(Macfarlane)的特征轨迹法和欧文斯(Owens)的并矢展开法等等,使频域法日趋完善,这些方法被称为现代频域法。它们的一个共同特点是把一个相关联的多输入-多输出系统的设计转化为多个单输入-单输出系统的设计问题,进而可以用任何一种经典控制理论中的方法完成系统的设计。显然对于广大熟悉单输入-单输出系统设计方法的人来说,具有很大的吸引力。

现在基于状态空间描述的现代控制理论和现代频域法都已取得了许多成就,而且还在发展。

## 二、现代控制理论的基本内容

现代控制理论的基本内容,主要包括四个方面:

(1)线性多变量系统理论。这是现代控制理论中最基础、最成熟的部分。它揭示系统的内在规律,从能控性、能观测性两个基本概念出发,研究系统的极点配置、状态观测器设计和抗干扰问题的一般理论。

(2)最优控制理论。在被控对象数学模型已知的情况下,寻求一个最优控制规律(或最优控制函数),使系统从某一个初始状态到达最终状态并使控制系统的性能在某种意义上是最优的。

(3)最优估计理论。在对象数学模型已知的情况下,最优估计理论研究的问题是如何从被噪声污染的观测数据中,确定系统的状态,并使这种估计在某种意义上是最优的。由于噪声是随机的,而且是非平稳随机过程(随机序列),这种情况下的状态估计是卡尔曼提出和解决的,故又称卡尔曼滤波。这种滤波方法是保证状态估计为线性无偏最小估计误差方差的估计。

(4)系统辨识与参数估计。这是基于对象的输入、输出数据、在希望的估计准则下,建立与对象等价的动态系统(即建立对象的数学模型),由于数学模型一般地说,是由阶数和参数决定的。因此,要决定系统的阶数和参数(即参数估计)。

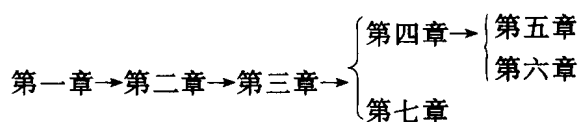


### 三、本课程的基本任务

《现代控制理论基础》是工业自动化专业(本科)的一门重要的专业基础课。学习这门课程的目的在于掌握现代控制理论的基本理论和基本方法,以便进行系统分析和设计,同时为进一步学习现代控制理论打下较扎实的基础。所谓系统分析,就是指在规定的条件下,对数学模型已知的系统的性能进行分析。系统分析包括定量分析和定性分析。定量分析是通过系统对某一个输入信号的实际响应来进行的;定性分析则研究系统能控性、能观测性、稳定性和关联性的一般特性。各种设计方法往往来源于系统分析。因此,系统分析是十分重要的。所谓系统设计,就是构造一个能完成给定任务的系统,这个系统具有所希望的瞬态、稳态性能以及抗干扰性能。一般地说,设计过程不是一个简单的一次能完成的过程,而是一个逐步完善的过程。在这个过程中,有可能引入补偿器或调整某些参数。

因此,本书力图达到两个目的:第一,用有效和简单可行的方法导出主要结果,得到各种设计方法。第二,使读者能够应用本书导出的结果。

考虑到不同读者的学习需要,可以按如下顺序进行学习:



# 第一章 控制系统的数学模型

进行系统的分析和设计,首先要建立数学模型。根据系统分析、设计所用方法的不同,或所要解决的问题的不同,描述同一系统的数学模型亦有所不同。本章介绍描述系统内部特性和端部特性的状态空间表达式以及只描述系统端部特性的传递函数(矩阵)。

## 第一节 状态空间表达式

### 一、状态、状态变量和状态空间

我们以图 1-1 所示的电路为例,引出状态、状态变量和状态空间表达式。电压  $u(t)$  为电路的输入量,电容上的电压  $u_C(t)$  为电路的输出量。 $R$ 、 $L$ 、 $C$  分别为电路的电阻、电感和电容。由电路理论可知,回路中的电流  $i(t)$  和电容上电压  $u_C(t)$  的变化规律满足如下方程

$$\left. \begin{aligned} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_C(t) &= u(t) \\ \frac{1}{C} \int i(t) dt &= u_C(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

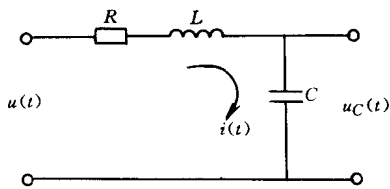


图 1-1

求解这个微分方程组,出现两个积分常数。它们由初始条件

$$\left. \begin{aligned} i(t) |_{t=t_0} &= i(t_0) \\ u_C(t) |_{t=t_0} &= u_C(t_0) \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

来确定。也就是说,欲知道  $i(t)$  和  $u_C(t)$  的变化规律,必须在知道初始值  $i(t_0)$ 、 $u_C(t_0)$  以及电路在  $t \geq t_0$  时的输入量  $u(t)$  的情况下,求解微分方程组(1-1)。因此,  $i(t)$  和  $u_C(t)$  就可以表征这个电路的行为。若将  $i(t)$  和  $u_C(t)$  视为一组信息量,则这样一组信息量就称为状态。这组信息量中的每一个变量均是该电路的状态变量。

**状态变量** 系统的状态变量就是确定系统状态的最小一组变量。如果知道这些变量在任意初始时刻  $t_0$  的值以及  $t \geq t_0$  的系统输入,便能完整地确定系统在时刻  $t$  的状态。这样一组最小的变量称为系统的状态变量。这里所说的“完整”是指系统所有可能的运动情况都能表示出来;所谓“最小”即是变量的个数最少,对于这个电路来说,选择  $i(t)$ 、 $u_C(t)$  这两个变量作为状态变量就够了。再增加一个变量,例如电流  $i(t)$  的变化量  $di/dt$ ,对完整地确定电路的运动情况来说不必要;若去掉一个变量例如  $i(t)$ ,只选  $u_C(t)$  一个变量作为状态变量,又不能完整地确定系统的全部运动情况。

**状态空间** 以选择的一组状态变量为坐标轴而构成的正交空间,称为状态空间。对于上面的电路,选择了  $i(t)$ 、 $u_C(t)$  为状态变量,由  $i(t)$ 、 $u_C(t)$  为坐标轴构成的正交空间如图 1-2 所示(实际上是一个状态平面)。

系统在任意时刻的状态可以用状态空间中的一个点来表示。例如  $t_1$  时刻的状态,在状态

空间中的表示为  $M(i(t_1), u_C(t_1))$  点。状态空间中状态转移的轨线称为状态轨线。它表征系统运动的行为或形态。

## 二、状态空间表达式

描述系统输入、输出和状态变量之间关系的方程组称为系统的状态空间表达式。针对图 1-1 的电路, 方程组 1-1 可改写成

$$\begin{aligned} \frac{di(t)}{dt} &= -\frac{R}{L}i(t) - \frac{u_C(t)}{L} + \frac{u(t)}{L} \\ \frac{du_C(t)}{dt} &= \frac{1}{C}i(t) \end{aligned}$$

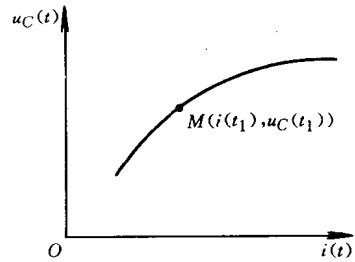


图 1-2

这个方程组描述了系统状态变量和输入量之间的关系, 称为电路的状态方程。换句话说, 状态方程就是由状态变量、输入量和电路参数构成的一阶微分方程组。为了书写简便, 统一处理, 采用向量、矩阵形式表示较为方便。即

$$\begin{bmatrix} \frac{di(t)}{dt} \\ \frac{du_C(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (1-3a)$$

这是一个矩阵微分方程。

若将电容上电压  $u_C$  作为电路的输出量, 则

$$u_C(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} \quad (1-3b)$$

这是联系状态变量和输出量之间关系的方程, 称为电路的输出方程或观测方程。这是一个矩阵代数方程。

如果令  $x = \begin{bmatrix} i(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix}$ ,  $u = u(t)$ ,  $y = u_C(t)$ ,  $A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $C = [0 \quad 1]$ , 则

方程(1-3)可改写成

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1-4)$$

其中  $x$  为 2 维的状态向量;  $u$  为标量输入;  $y$  为标量输出。  $A$  为  $2 \times 2$  型系数矩阵。  $b$  为  $2 \times 1$  型输入矩阵,  $C$  为  $1 \times 2$  型输出矩阵。如果将电路视为一个系统, 则状态方程是描述系统状态变量和输入量之间动力学特性的方程, 是矩阵微分方程; 而输出方程是描述系统输出量和状态变量之间的变换关系, 是矩阵代数方程。系统的状态方程和输出方程合称状态空间表达式或系统动态方程或系统方程, 式(1-3)或式(1-4)就是图 1-1 所示系统的状态空间表达式。

现在将这个例子的分析结果推广到一般情况。如图 1-3 所示。

$x$  为  $n$  维状态向量  $u$  为  $r$  维输入向量,  $y$  为  $m$  维输出向量, 即

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{ 简记成 } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \text{ 简记成 } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

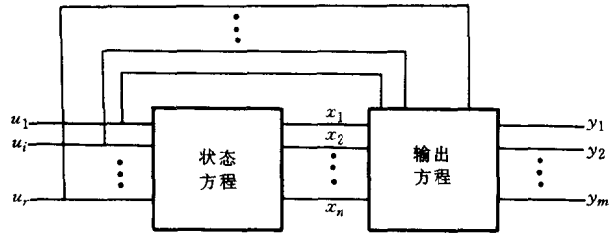


图 1-3

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \text{ 简记成 } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

则系统方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1-5)$$

其中,  $A$  为  $n \times n$  型系数矩阵;  $B$  为  $n \times r$  型输入矩阵;  $C$  为  $m \times n$  型输出矩阵;  $D$  为  $m \times r$  型直接传输矩阵, 即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}_{n \times r}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix}_{m \times r}$$

由于方程(1-5)是多输入-多输出(MIMO)系统, 故为多变量系统; 如果是单输入-单输出(SISO)系统, 则称为单变量系统。此时系统方程表示成

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + bu \\ y = CX + du \end{cases} \quad (1-6)$$

若方程(1-5)或方程(1-6)中的矩阵  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  的诸元素是实常数时, 则称这样的系统为线性定常系统或线性时不变系统。如果这些元素是时间  $t$  的函数, 即

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x + D(t)u \end{cases} \quad (1-7)$$

则称系统为线性时变系统。其中  $x$ 、 $u$ 、 $y$  分别为  $n$ 、 $r$ 、 $m$  维的状态向量、输入向量和输出向量。 $A(t)$ 、 $B(t)$ 、 $C(t)$  和  $D(t)$  为满足矩阵加(减)法、乘法运算的矩阵, 即  $A(t)$  为  $n \times n$  型,  $B(t)$  为  $n \times r$  型,  $C(t)$  为  $m \times n$  型,  $D(t)$  为  $m \times r$  型矩阵。

控制系统方程可用图形表示, 称为系统的状态图。对于式(1-7)描述的线性时变系统其状

态图如图 1-4a 所示。线性定常系统的状态图如图(1-4b)所示。图中符号  $\int$  为积分运算。很显然,状态图是描述系统输入量、状态变量和输出量之间函数关系的图。它含有系统动态性能的全部信息。除用图 1-4 所示的状态图表示以外,还常用信号流图,如图 1-5 所示。比较两种状态图的表示法可知,我们可以毫无困难地从一种图形表示转换成另一种图形表示。因为用状态图来表示系统的结构,信号的传递与变换关系,形象而直观,便于应用,所以系统分析和设计常采用这种图示法。

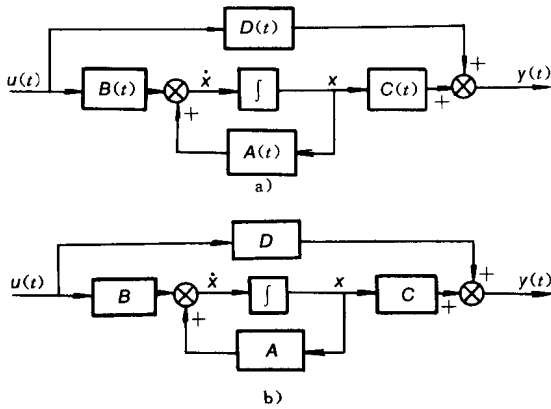


图 1-4

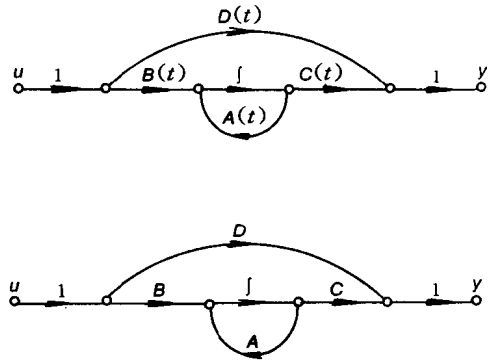


图 1-5

严格地说,一切物理系统,都是非线性系统。描述非线性系统输入量、状态变量和输出量之间关系的状态方程和输出方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, t) \\ y &= g(x, u, t)\end{aligned}\quad (1-8)$$

其中  $f$  为  $n$  维向量函数,  $g$  为  $m$  维向量函数。这种系统的状态变量和输入量之间的关系,由非线性矩阵微分方程描述,输出量和状态变量之间的关系由非线性矩阵代数方程描述。式(1-8)所描述的系统称为非线性时变系统;如果非线性系统方程不显含时间  $t$ ,则称为非线性定常系统,其状态方程和输出方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u)\end{aligned}\quad (1-9)$$

### 三、状态变量的选取

1) 状态变量的选取可以视所研究的问题性质和输入特性而定。从便于检测和控制角度考虑可以选择能测量到的物理量为状态变量;也可以选择那些为了分析、研究需要但却不能测量到的量为状态变量。当无特殊要求时,对于一个物理系统而言,通常可选择系统中反映独立储能元件状态的特征量作为状态变量。例如电路中电容两端的电压、流过电感的电流,机械系统中的速度和位置(转角)均可作为系统的状态变量。

2) 状态变量选取的非唯一性。同一个系统可以选取不同变量作为状态变量。例如图 1-1 所示的电路,经过简单的推导,得到电路的微分方程为

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{1}{LC} u \quad (1-10)$$

如果选取电容上的电压  $u_c$  和  $u_c$  随时间变化率  $du_c/dt$  作为状态变量。则有

$$\begin{aligned}x_1 &= u_C \\ \dot{x}_1 &= \dot{u}_C = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{u}_C = -\frac{R}{L}x_2 - \frac{1}{LC}x_1 + \frac{1}{LC}u\end{aligned}$$

记成向量、矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u \quad (1-11a)$$

选取  $u_C$  作为电路的输出量  $y$ , 则有

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1-11b)$$

这也是我们所研究过的电路的系统方程。显然它与式(1-3)形式不同。也就是说, 状态变量选取是非唯一的。状态变量选取的不同, 系统方程亦异。不过我们总可以利用“矩阵代数”中换基底(本书称为线性变换, 详见本章第五节)的方法, 互相转换。

3) 系统状态变量的数目是唯一的。它等于系统微分方程的阶数(延迟元件除外)。

#### 四、状态空间表达式建立的举例

**例 1-1** 建立如图1-6所示的机械系统的状态空间表达式。系统由弹簧、质量块和阻尼器组成。阻尼器是一种产生粘性摩擦或阻尼的装置, 它由活塞和充满油液的缸体组成。活塞杆和缸体之间的任何相对运动, 都将受到油液的阻滞, 因为这时油液必须从活塞的一端, 经过活塞周围的间隙(或通过活塞上的专用小孔)流到活塞的另一端。阻尼器主要用来吸收系统的能量, 被阻尼器吸收的能量转变为热量散失掉, 而阻尼器本身不贮藏任何动能或位能。在质量块  $m$  上作用一个外力  $F$ , 质量块  $m$  的位移为  $y=0$ 。为了建立这个机械系统的状态空间表达式, 设阻尼器的摩擦力与  $\dot{y}$  成正比, 并设弹簧为线性弹簧, 即弹力与  $y$  成正比。

牛顿定律是机械系统的基本定律。对于图 1-6 所示的机械系统, 根据牛顿定律有

$$\Sigma F = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (1-12)$$

若  $f$  为粘性摩擦系数,  $k$  表示弹簧刚度。则

$$\Sigma F = F - ky - f \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

或表示成

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = F$$

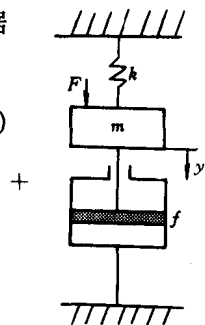


图 1-6

如果选择位移  $y$  和速度  $dy/dt$  为状态变量, 而位移为系统的输出, 力  $F$  为输入量, 则有

$$\begin{aligned}x_1 &= y \\ \dot{x}_1 &= x_2 = \dot{y} \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}y - \frac{f}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{m}F = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{f}{m}x_2 + \frac{1}{m}F\end{aligned}$$

于是该机械系统的系统方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F \quad (1-13a)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1-13b)$$

该机械系统的状态图如图 1-7 所示。注意,如果将式(1-13)和式(1-11)比较一下可见,虽然一个是电路,一个是机械系统,但是它们具有相似的状态空间表达式。这与经典控制理论中的力-电压相似系统的结果是一致的。

**例 1-2** 建立图 1-8 的电枢控制直流他励电动机的状态空间表达式。

电动机电枢在供电电压  $U_D$  作用下,产生电流  $I_D$ ,转矩  $T_D$ ,使电动机轴以角速度  $\omega$  带动粘性摩擦负载转动。

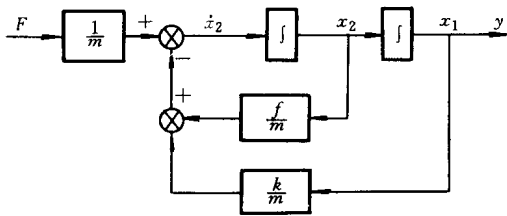


图 1-7

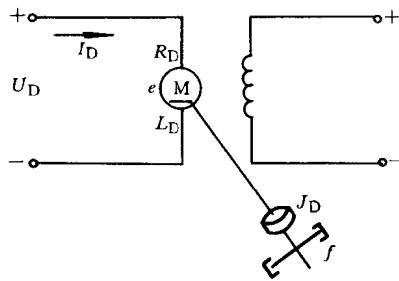


图 1-8

电枢回路的电压方程为

$$L_D \frac{dI_D}{dt} + R_D I_D + e = u_D$$

其中,  $R_D$ 、 $L_D$  分别为电动机电枢回路的电阻和电感。因为励磁电流保持不变,励磁磁通不变,所以电动机反电动势  $e = K_e \omega$ ,  $K_e$  为电动势常数

$$L_D \frac{dI_D}{dt} + R_D I_D + K_e \omega = u_D$$

系统运动方程式为

$$T_D - f\omega = J_D \frac{d\omega}{dt} \quad (1-14)$$

考虑电动机的电磁转矩  $T_D = K_m I_D$ 。  $K_m$  为转矩常数。于是有

$$K_m I_D - f\omega = J_D \frac{d\omega}{dt} \quad (1-15)$$

其中,  $J_D$  为电动机及负载折合到电动机轴上的转动惯量;  $f$  为电动机及负载折合到电动机轴上的粘性摩擦系数。如果选取电流  $I_D$  和角速度  $\omega$  为状态变量,角速度为电动机的输出,电枢电压  $u_D$  为输入量,来建立状态空间表达式。则有

$$\begin{aligned} \frac{dI_D}{dt} &= -\frac{R_D}{L_D} I_D - \frac{K_e}{L_D} \omega + \frac{1}{L_D} u_D \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{K_m}{J_D} I_D - \frac{f}{J_D} \omega \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dI_D}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_D}{L_D} & -\frac{K_e}{L_D} \\ \frac{K_m}{J_D} & -\frac{f}{J_D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_D \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_D} \\ 0 \end{bmatrix} u_D \quad (1-16a)$$

$$y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} I_D \\ \omega \end{bmatrix} \quad (1-16b)$$

状态图如图 1-9 所示。

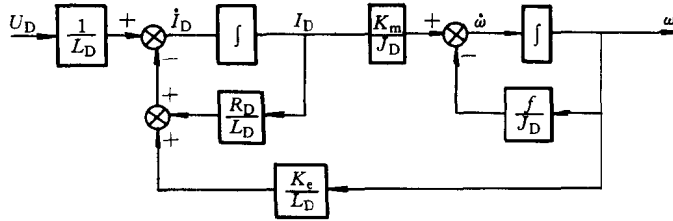


图 1-9

## 第二节 由微分方程求状态空间表达式

一个动力学系统,常用微分方程描述其输入和输出的关系。通过选取合适的状态变量,可以得到状态空间表达式。

### 一、微分方程中不含有输入信号导数项

若系统的微分方程为

$$\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1y + a_0y = b_0u \quad (1-17)$$

如果选取输出变量  $y$  及其导数  $\dot{y}$ 、 $\ddot{y}$  为一组状态变量,即

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ \dot{x}_1 &= x_2 = \dot{y} \\ \dot{x}_2 &= x_3 = \ddot{y} \\ \dot{x}_3 &= \ddot{y} = -a_2\dot{y} - a_1y - a_0y + b_0u = \\ &= -a_2x_3 - a_1x_2 - a_0x_1 + b_0u \end{aligned}$$

于是方程(1-17)可以写成三个一阶微分方程,系统的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -a_2x_3 - a_1x_2 - a_0x_1 + b_0u \end{aligned}$$

或记成向量、矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$



$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

这就是系统的状态空间表达式。其状态图如图 1-10 所示。

一般情况下,系统的输入和输出关系由  $n$  阶微分方程描述,即

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u \quad (1-19)$$

如果选取系统输出变量  $y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)}$  为状态变量,

$$x_1 = y$$

$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{y}$$

$$\dot{x}_2 = x_3 = \ddot{y}$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n = y^{(n-1)}$$

$$\dot{x}_n = y^{(n)} = -a_{n-1}y^{(n-1)} - a_{n-2}y^{(n-2)} - \dots - a_2\ddot{y} - a_1\dot{y} - a_0y + b_0u = -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \dots - a_2x_3 - a_1x_2 - a_0x_1 + b_0u$$

则方程(1-19)可以写成  $n$  个一阶微分方程

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \dots - a_2x_3 - a_1x_2 - a_0x_1 + b_0u$$

记成向量、矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \quad (1-20)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

系统的状态图如图 1-11 所示。

## 二、微分方程中含有输入信号的导数项

若系统微分方程为

$$\ddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = b_3\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_1\dot{u} + b_0u \quad (1-21)$$

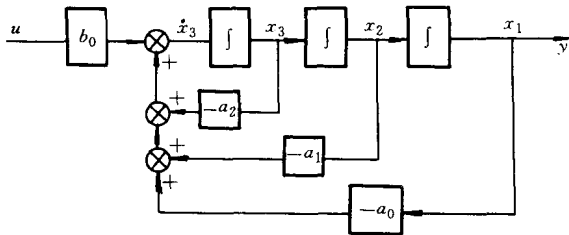


图 1-10