

实分析习题及解答

〔美〕 B. Gelbaum

陕西人民教育出版社

实分析习题及解答

[美] B. Gelbaum 著

常心怡 李元中 编译
鲁石 冯汉桥

陕西人民教育出版社

期 限 表 87.2

请于下列日期前将书还回

实分析习题及解答

[美] B. Gelbaum 著

常心怡 李元中 编译
鲁 石 冯汉桥

陕西人民教育出版社出版发行

(西安长安南路吴家坟)

新华书店经销 渭南市印刷厂印刷

开本850×1168毫米 1/32 10.5印张 字数230千

1988年8月第1版 1988年8月第1次印刷

印数: 1—5,479

ISBN7-5419-0727-8/G·648

定价: 2.80元

0172-44
4

1329919

内 容 简 介

本书内容包括数学分析、初等拓扑、Lebesgue 测度及一般测度理论、Lebesgue 积分以及 L^p 空间理论等方面的习题五百余道，每题均附精炼的解答。本书选题类型全面，难度适中，构思新颖，解法精巧。本书可供大学数学系学生、研究生、教师及其他数学工作者学习和参考。

编译前言

B. Gelbaum 的《Problems in Analysis》涉及实分析的许多方面,但都属于现代专业数学工作者应该懂得的基础知识.该书选题新颖,解答精炼,对于学习和掌握实分析的基本理论和技巧很有好处,我国还很缺少这类习题集.因此我们将它译出,以期有助于我国数学专业广大师生的教学和学习.为了更加突出原书主要与《实变函数》课相适应的特点,并考虑到我国的实际情况,编译时我们删去了原书在标题《拓扑向量空间》之下的全部题目和《杂题》中的部分题目,同时补充了一些只涉及 Lebesgue 测度与积分以及初等拓扑的题目.为了避免混淆,补充题一律另行编号.对于原书印刷上和其它的错误,译校过程中已尽力予以改正,并对部分实质性改动加了译注.

本书的翻译工作,第 1、2 部分和第 5~8 部分由冯汉桥完成;第 3、4 部分由鲁石完成;第 9~14 部分由常心怡完成;《索引》由冯汉桥和常心怡合译.补充题的选题及解答主要由李元中完成.全部内容并经编译者互相审校.由于我们的水平有限,可能还有许多不当之处,敬希读者批评指正.

本书插图承武建劳同志根据原书重新绘制,在此致谢.

编译者

一九八六年五月

前 言

这些问题和解答是提供给学过实分析、测度论、初等拓扑以及一些拓扑向量空间理论的数学系学生的。现在流行的这些学科的教科书是理解这些问题并求得其解答的基础，书末所附文献目录中开列了一些书名，读者可以从这些书中获得本书所需之专业词汇及技巧。

假定读者已经熟悉诸如拓扑空间、 σ -环、度量、可测、同胚等术语以及符号 $A \cap B$, $x \in X$, $f: \mathbb{R} \ni x \rightarrow x^2 - 1$ 等等。我们直接使用它们，而不再给出定义或说明。然而，索引中列出了某些容易引起混淆的记号和术语。

本书所特有的术语和记号多数已在各章以“约定”为题的段落中阐明，偶而也有一些定义和记号在叙述题目或解答时加以解释。

一部分题目的解答是完全的，其它的只是概要，以便为读者提供锻炼技巧和想像能力的机会。

方括号中的黑体数字均指文献代号。

作者衷心感谢 P. R. Halmos 教授，作者有幸与他共同讨论了与本书写作有关的各种技术上、风格上以及数学上的问题。

Buffalo NY

1982 年 8 月

B. R. G

目 录

1. 集合代数 1—7(补充 13 题).....	(1-3/82-90)
2. 拓扑 8—37(补充 32 题).....	(4-10/91-110)
3. 极限 38—49	(11-12/110-114)
4. 连续函数 50—94	(13-20/114-127)
5. 从 R^n 到 R^m 的函数 95—133	(21-27/128-145)
6. 测度和拓扑 134—151	(28-31/145-157)
7. 一般测度论 152—187	(32-38/158-173)
8. R^n 中的测度 188—216	(39-43/173-185)
9. R^n 中的 Lebesgue 测度 217—248(补充 22 题)	(44-50/185-200)
10. Lebesgue 可测函数 249—274(补充 17 题)	(51-56/201-216)
11. $L^1(X, \mu)$ 275—321(补充 30 题)	(57-66/216-245)
12. $L^2(X, \mu)$ 或 H (Hilbert 空间) 322—361	(67-72/245-262)
13. $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$ 362—373	(73-74/262-269)
14. 杂题 374—417	(75-81/269-285)
参考文献	(286)
符号注释	(287)
索引及注释	(293)

1. 集合代数

约 定

$\mathbf{N}$ 表示正整数集合, $\mathbf{R}$ 表示实数集合, 2^X 表示集合 X 的所有子集之集. 设 $E \subset 2^X$, 则 $R(E)$ 表示由 E 所生成的环, 即一切包含 E 并且包含于 2^X 中的环的交. 类似地, $\sigma R(E)$, $A(E)$, $\sigma A(E)$ 分别表示由 E 所生成的 σ -环, 代数, σ -代数. $\{x: \dots\}$ 是 X 中满足条件 $\dots$ 的 x 构成的集合. 设 $A \subset X$, 则 $A' = \{x: x \notin A\}$. 设 $B \subset X$, 则 $A \setminus B = A \cap B'$. $\text{card}(X)$ 表示 X 的基数. 设 X 是拓扑空间, 则 $O(X)$ ($F(X)$, $K(X)$) 是 X 的开 (闭, 紧) 子集之集. 2^X 的子集 M 称为是单调的, 如果它关于 M 中的单调列的可数并及交封闭时, 即若 $\{A_n: n=1, 2, \dots\}$ 是 M 中的一个列并且 $A_n \subset A_{n+1}$ ($A_n \supset A_{n+1}$), $n \in \mathbf{N}$, 则 $\bigcup_n A_n$ ($\bigcap_n A_n$) 在 M 中. $M(E)$ 是由 E 生成的 2^X 的单调子集.

1. 证明. 若 M 是单调的并且关于有限并及交关闭, 则它关于可数并及交关闭.

2. 证明. 若 M 是单调的, R 是环并且 $M \supset R$, 则 $M \supset \sigma R(R)$.

3. 证明. 若 $2^R \supset M \supset O(R)$ 并且 M 是单调的, 则 $M \supset F(R)$. 再用距离空间 X 代替上述 R , 并证明同样的结论.

4. 证明. 若 $2^R \supset M \supset O(R)$ 并且 M 是单调的, 则 $M \supset \sigma R(O(R))$ 并且 $\sigma R(O(R)) = \sigma R(F(R)) = \sigma R(K(R))$.

5. 证明. 若 S 是 σ -环, 则 $\text{card}(S) \neq \text{card}(\mathbf{N})$.

6. 证明. 若 $A \in \sigma R(E)$, 则存在 E 的一个有限或可数子集 E_0 , 使得 $A \in \sigma R(E_0)$.

7. 设对于每个正整数列 $\{p, q, r, \dots\}$, 存在包含在 2^X 中的一个列 $\{A_p, B_{pq}, A_{pqr}, \dots\}$, 满足如下条件: i) $A_p = \bigcap_q B_{pq}$, $B_{pq} = \bigcup_r A_{pqr}$, ...; ii) 对于每个集列 $S = \{A_p, B_{pq}, A_{pqr}, \dots\}$, 存在一个自然数 $m(S)$, 使得 S 中的其下标大于 $m(S)$ 的每个元素都在 E 中. 又设 A 是由 A_p 型的集合的所有可数并构成的集合. 证明 A 关于它的元素的可数并及交封闭. 若再设: iii) 如果 $F \in E$, 则 $F' \in E$, 证明 $A = \sigma A(E)$.

集合代数补充题

1. 设 A 是函数 $f(x)$ 的定义域的任意一个集, B 是 $f(x)$ 的值域的任意一个集, 是否一定有 $f^{-1}(f(A)) = A$ 及 $f(f^{-1}(B)) = B$.

2. 设 $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ 均是函数 $f(x)$ 的定义域的子集, 等式 $f(\bigcup_k A_k) = \bigcup_k f(A_k)$ 及 $f(\bigcap_k A_k) = \bigcap_k f(A_k)$ 正确吗?

3. 设 $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ 均是函数 $f(x)$ 的值域的子集; 等式 $f^{-1}(\bigcup_k A_k) = \bigcup_k f^{-1}(A_k)$ 及 $f^{-1}(\bigcap_k A_k) = \bigcap_k f^{-1}(A_k)$ 正确吗?

4. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) (x \in E)$, 则对任意实数 c 有 $E\{x: f(x) \geq c\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} E\{x: f_n(x) > c - \frac{1}{k}\}$.

5. 证明: 对任意集列 $\{A_n\}$ 都有

$$i) \lim_n \chi_{A_n}(x) = \chi_{\lim_n A_n}(x);$$

$$ii) \lim_n \chi_{A_n}(x) = \chi_{\lim_n A_n}(x);$$

iii) 集列 $\{A_n\}$ 收敛的充要条件是它的特征函数列 $\{\chi_{A_n}(x)\}$ 收敛. 并且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}(x) = \chi_{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}(x)$.

注: 集列 $\{A_n\}$ 的上、下极限及极限定义如下:

$$\lim_n A_n = \{x: x \text{ 属于无穷个 } A_n\}.$$

$$\lim_n A_n = \{x : x \text{ 属于从某标号起向后的一切 } A_n\}.$$

当 $\lim_n A_n = \lim_n A_n$ 时称集列 $\{A_n\}$ 收敛, 并称其上(下)极限为集列 $\{A_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_n A_n$.

6. 证明集列极限的下述性质:

$$\text{i)} \quad (\lim_n A_n)' = \lim_n A_n';$$

$$\text{ii)} \quad (\lim_n A_n)' = \lim_n A_n';$$

$$\text{iii)} \quad \lim_n (E \setminus A_n) = E \setminus \lim_n A_n;$$

$$\text{iv)} \quad \lim_n (E \setminus A_n) = E \setminus \lim_n A_n$$

$$\text{v)} \quad \lim_n (A_n \cup B_n) = \lim_n A_n \cup \lim_n B_n;$$

$$\text{vi)} \quad \lim_n (A_n \cap B_n) = \lim_n A_n \cap \lim_n B_n;$$

$$\text{vii)} \quad \lim_n (A_n \setminus B_n) = \lim_n A_n \setminus \lim_n B_n.$$

(v, vi, vii 中均设所述集列极限存在).

7. 建立实数集与无理数集之间的一一对应.

8. 建立半径为 1 的开圆与闭圆之间的一一对应.

9. 建立 $[0, 1]$ 与 $[0, 1; 0, 1]$ 之间的一一对应.

10. 是否可以把 $[0, 1]$ 连续地映象为开区间? 是否可以把 $[0, 1]$ 连续地映象为两个不交的闭区间?

11. 若 $A = B \cup C$, $\overline{A} = \mathcal{P}$, 则或 $\overline{B} = \mathcal{P}$ 或 $\overline{C} = \mathcal{P}$. ($\overline{A}$ 即 $\text{card}(A)$).

12. 证明: 单调函数的不连续点之集的基数或为有限或为可数.

13. 证明: 一切有理系数的多项式之集是可数集. 从而全体代数数之集可数, 超越数存在.

2. 拓 扑

约 定

$\mathbf{Q}$ 表示有理数集合. 若 A 与 B 是 $\mathbf{R}$ 的子集, 则 $A+B=\{x: x=a+b, a\in A, b\in B\}$. 类似的约定适用于 AB 、 $A-B$, 也适用于一般的代数结构的子集的“乘积”. $\mathbf{C}$ 表示复数集合, $T=\{z: z\in\mathbf{C}, |z|=1\}$; 后者在通常的乘法之下是一个群. $\sigma R(O(\mathbf{R}))$ 是 $\mathbf{R}$ 的 Borel 集之集(见问题 4).

若 Γ 及 X 是两个集合, 则 X^Γ 是 Γ 到 X 的所有映射之集. 等价地, 若 $\Gamma=\{\gamma\}$ 并且对所有的 γ , $X_\gamma=X$, 则 X^Γ 是笛卡尔乘积 $\prod_\gamma X_\gamma$. (为了使这些记号与前面集合代数中定义的记号 2^X 相一致, 约定 $2=\{0,1\}$). 特别地, X^2 , 更一般地, $X^n, n\in\mathbf{N}$, 在某种意义上同构于 X 与它自身的 n -元笛卡尔乘积.

若 X 是拓扑空间, $A\subset X$, 则 A° 是 A 的内部(包含于 A 的所有开集的并), $\bar{A}$ 是 A 的闭包(包含 A 的所有闭集的交). 集合 A 在 X 内是稠密的, 当且仅当 $\bar{A}=X$. 若 X 和 Y 是拓扑空间, 则 $C(X, Y)$ 表示连续映射 $f: X\rightarrow Y$ 之集. 一个映射 $f: X^\Gamma\rightarrow Y$ 是有限(可数)确定的, 当且仅当在 Γ 内存在一个有限(可数)集 $\{\gamma_k\}$, 使得若 $x=\{x_\gamma\}$, $y=\{y_\gamma\}$, 并且 $x_{\gamma_k}=y_{\gamma_k}, k=1,2,\dots$, 则 $f(x)=f(y)$. $x_n\uparrow x(x_n\downarrow x)$ 表示集合 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是单调上升(下降)地收敛到 x 的实数列. 对于用 d 度量化的拓扑空间 X 来说, 若 $E\subset X$, 则 $\text{diam}(E)=\sup\{d(x, y): x, y\in E\}$. $B(y, r)$ 是球 $\{x: d(x, y)\leq r\}$, 对于正数 $r, B(y, r)^\circ$ 是开球(中心在 y).

若 $x\in\mathbf{R}^n$ 并且 $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 则 $\|x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$. 这

个范数给 $\mathbb{R}^n$ 赋予标准的 Euclid 距离: $d: (x, y) \rightarrow \|x - y\|$. 若 $T: X \rightarrow X$ 是映射并且 $n \in \mathbb{N}$, 则 T^n 是 T 的第 n 次重复, 即 $T^n(x) = T(T^{n-1}(x))$, $n = 2, 3, \dots$.

若 $\{X_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ 是拓扑空间之集, 而 $X = \prod_\gamma X_\gamma$, 则有限个开集 U_{γ_i} 决定一个基本邻域 $U_{\gamma_1} \times U_{\gamma_2} \times \dots \times U_{\gamma_n} \times \prod_{\gamma \notin \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}} X_\gamma$.

8. 证明或否定: 存在 $[0, 1)$ 到 $\mathbb{R}$ 上的连续映射.

9. 在 $[0, 1]$ 内找一个不可数子集 E , 使得 $E - E$ 的内部是空集.

10. 把 $[0, 1]$ 度量化, 使得它是完备的并且使它与通常拓扑下的 $[0, 1]$ 同胚.

11. 证明. 若 f 把 $[0, 1]$ 同胚地映到 $A \times B$ 上 (笛卡尔乘积), 则 A 或 B 正好是单点集.

12. 设 Cantor 集 $C = \{a: a = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k 3^{-k}, \alpha_k = 0 \text{ 或 } 2, k = 1, 2, \dots\}$. 又设 D_n 是离散拓扑下的 $\{0, 1\}$, $n = 1, 2, \dots$. 证明: C 同胚于 $\prod_{n=1}^{\infty} D_n$, 因而 $f_k: C \ni a \rightarrow (-1)^{\alpha_k/2}$ 是连续的, $k = 1, 2, \dots$.

13. 设 $F(\mathbb{R}) \ni E \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma]$. 证明: 在 Γ 内存在一可数子集 $\{\gamma_n\}$, 使得 $E \subset \bigcup_n (a_{\gamma_n}, b_{\gamma_n}]$.

14. 用 $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \rightarrow |\arctg x - \arctg y|$ 把 $\mathbb{R}$ 度量化. 证明或否定 $\mathbb{R}$ 在这个度量下是完备的.

15. 设 $S \subset [0, \infty)$, $u = \sup S$, $u < 1$ 并且若 $x, y \in S$, $x < y$, 则 $x/y \in S'$, 证 $u \in S$.

16. 证明或否定: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 与 $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ 是同胚的.

17. 设 E 是 $\mathbb{R}^2$ 的非空可数紧子集, 证明: 在 E 内有孤立点.

18. 证明: 若 $\mathbb{R}^2$ 是可数个闭集 F_n 的并, 则它们的内部的并

在 $\mathbb{R}^2$ 内稠密。

19. 证明: 若 A 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个不可数子集, 则在 A 内存在一个 x , 使得对于任何邻域 $U(x)$, $U(x) \cap A$ 是不可数的。

20. 构造一个紧的可度量化空间 X , 以及 X 到 X 上的自同胚 T , 使得不存在与 X 的拓扑相容的距离 d , 问是否对 X 中的所有 x 与 y 有 $d(Tx, Ty) = d(x, y)$ 。

21. 设 X 是紧距离空间, 并且设 $\{T_\gamma\}_{\gamma \in I}$ 是 $C(X, X)$ 的一个等度连续子集, 证明: 对于在 $C(X, X)$ 内的任何 f , 集合 $\{f \circ T_\gamma\}_{\gamma \in I}$ 是紧的。

22. 证明: 若 X 与 Y 是紧距离空间并且 $f \in Y^X$, 则 f 连续的充要条件是 f 的图象 $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ 在 $X \times Y$ 内是闭的。

23. 设 X 是紧度量空间, 其度量为 d , 并设 $f \in C(X, X)$ 以及对于所有在 X 中的 a, b , 有 $d(f(a), f(b)) \geq d(a, b)$, 证明: 对于在 X 中的所有的 a, b , 有 $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$ 。

24. 证明: 若 X 是可分的度量空间, 则 $\text{card}(F(X)) \leq \text{card}(\mathbb{R})$ 。

25. 设 $A = C([0, 1], [0, 1])$, 按 $d : A \times A \ni (f, g) \rightarrow \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$ 把 A 度量化。令 A_i 是内射之集, A_s 是 A 的满射元素之集, 并令 $A_{is} = A_i \cap A_s$, 证明或者否定: i) A_i 是闭的; ii) A_s 是闭的; iii) A_{is} 是闭的; iv) A 是连通的; v) A 是紧的。

26. 设 X 是没有孤立点的完备度量空间, 证明: 若 U 是 X 的一个非空开集, 则 $\text{card}(U) \geq \text{card}(\mathbb{R})$ 。

27. 设 X 与 Y 是紧的 Hausdorff 空间, 并且 $f : X \rightarrow Y$ 是这样一个连续满射, 使得对于在 Y 内的所有 y , $f^{-1}(y)$ 是连通的。证明: 对于 Y 的任何一个连通子集 C , $f^{-1}(C)$ 是连通的。若去掉 Y 是 Hausdorff 的假设, 给出一个反例。

28. 设 $\{X_\gamma\}_{\gamma \in I}$ 是紧 Hausdorff 空间之集, 证明: 若 $X =$

$\prod_Y X_Y$, $f \in C(X, \mathbf{R})$, 并且 $\varepsilon > 0$, 则存在一个有限确定的 $g: X \rightarrow \mathbf{R}$, 使得 $\sup_x |f(x) - g(x)| < \varepsilon$. 再证明 f 是可数确定的.

29. 设 X 是紧空间并且 $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ 满足条件: 对所有的 x , $f^{-1}([x, \infty))$ 是闭的. 证明: 存在 $M \in \mathbf{R}$, 使得对于 X 内的所有 x , $f(x) \leq M$ 并且存在 $x_0 \in X$, 使得 $f(x_0) = \sup_x f(x)$.

30. 设 K 是紧的并且是 Hausdorff 空间 X 内的两个开集 U 与 V 的并的子集. 证明: 存在分别包含于 U 及 V 内的紧集 K_U 及 K_V , 使得 $K = K_U \cup K_V$.

31. 对于每个 $\gamma \in \Gamma$, 令 $I_\gamma = [0, 1]$ 并且令 $X = \prod_\gamma I_\gamma$, 证明: 若 $\text{card}(\Gamma) = \text{card}(\mathbf{R})$, 则在 X 内存在可数稠密子集.

32. 证明: $[0, 1]^{[0, 1]}$ 是不能度量化.

33. 证明: 若 $f \in C([0, 1], \mathbf{R})$ 并且 $[0, 1]$ 的子集 A 是闭集的可数并, 即 A 是一个 F_σ 集, 则 $f(A)$ 也是一个 F_σ 集.

34. 证明: 若 $f \in C(\mathbf{T}, \mathbf{R})$, 则在 $\mathbf{T}$ 内存在一个 z , 使得 $f(z) = f(ze^{i\pi})$. (对于 $\mathbf{R}$ 内的某个 x , $f^{-1}(x)$ 包含两个对映点).

35. 证明: 若 $f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 并且 V 是开集, 则 $f(V)$ 是 Borel 集.

36. 设 Y 是这样一个拓扑空间, 对于所有的 $n \in \mathbf{N}$, Y^n 及 Y 是同胚的, Y 与 $Y^{\mathbf{N}}$ 必然同胚吗?

37. 设 $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $F([0, 1])$ 的子集, 证明: 若所有的 F_n 非空并且两两不交, 则 $[0, 1] \neq \bigcup_n F_n$.

拓 扑 补 充 题

(以下题目均指欧氏空间)

1. 若 M 是一族闭区间, 其中任意两个都相交, 且至少有一个区间的右端点有限, 证明这一族闭区间的交集非空.

2. 若集 E 的每一点都是孤立点, 证明集 E 的基数不超过

可数基数.

3. 若集 E 的聚点之集 M 是非空有限集或可数集, 证明集 E 是可数集.

4. 若点 ξ 的任一邻域中都含有集 E 的不可数个点, 则称 ξ 是集 E 的凝点. 证明任何不可数无限集必有凝点.

5. 若集 A 中的每一点都是孤立点, 证明集 A 必可表为开集与闭集的交.

6. 证明: 集 E 为开集的充要条件是 $\partial E \subset E'$; 集 E 为闭集的充要条件是 $\partial E \subset E$, 其中 ∂E 是 E 的边界.

7. 证明: i) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A'}$; ii) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$; iii) $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$; iv) $\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$.

8. 证明: 直线上任一无穷闭集, 都是它的某个可数子集的闭包.

9. 证明: 集 E 为开集的充要条件是, 对任意集 A 都有 $E \cap \overline{A} \subset \overline{E \cap A}$.

10. 证明: $\mathbb{R}^1$ 中既开又闭的集只有 $\mathbb{R}^1$ 和 $\emptyset$.

11. 证明以下结论:

$$x \in \overline{E} \iff d(x, E) = 0;$$

$$x \in E^\circ \iff d(x, E') > 0;$$

$$x \text{ 是 } E \text{ 的聚点} \iff d(x, E - \{x\}) = 0;$$

$$x \in \partial E \iff d(x, E) = d(x, E') = 0;$$

$$x \in E^\circ \iff d(x, E) > 0.$$

(E° 是 E 的外域, 即 E 的外点之集)

12. 若 A, B 均是 $\mathbb{R}^1$ 中的有界闭集, 令 $C = \{(x, y): x \in A, y \in B\}$, 证明 $C \subset \mathbb{R}^2$ 是有界闭集.

13. 若 A, B 是二不交闭集, 证明: 存在开集 G_1, G_2 , 使得 $A \subset G_1, B \subset G_2, G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

14. 设 $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n \subset \dots$ 是开集列, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, 集 F

是有界闭集且 $F \subset G$, 证明: 存在自然数 N , 使当 $n \geq N$ 时 $F \subset G_n$.

15. 设 $f(x)$ 、 $f_n(x) (n=1, 2, \dots)$ 都是 $[a, b]$ 上的连续函数, 若 $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, 证明: 函数列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$. 若去掉连续的条件, 结论是否仍然成立?

16. 若开集族 $\{G_\lambda\}$ 是集 E 的任一开复盖, 如果总可由 $\{G_\lambda\}$ 中选出集 E 的有限子复盖, 证明: 集 E 是有界闭集.

17. 若开集族 $\{G_\lambda\}$ 复盖集 E , 对应的闭集族 $\{\overline{G_\lambda}\}$ 是否一定复盖 $\overline{E}$?

18. 证明: 平面不可能被半径有限的互不相交的开圆复盖.

19. 设 $D = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$,

$$C = \left\{ (x, y): x^2 + y^2 = \frac{1}{3^2} \right\},$$

$$F = \left\{ \text{圆心在 } C \text{ 上, 半径为 } \frac{2}{3} \text{ 的开圆} \right\},$$

$$F_1 = \left\{ \text{圆心在 } C \text{ 上, 半径为 } \frac{2}{3} \text{ 的闭圆} \right\},$$

试证: i) F 中不能选出 D 的有限子复盖;

ii) 能从 F 中选出 D 的可数复盖;

iii) 由 F_1 中能选出 $\overline{D}$ 的可数子复盖吗?

20. 证明: $[0, 1]$ 不能表为可数个无处稠密集的并.

21. 证明: $[0, 1]$ 中的全体无理点之集 S , 不能表为可数个闭集的并.

22. 证明: $[0, 1]$ 上任一实函数的不连续点之集是 F_σ 型集.

23. 证明: 在 $[0, 1]$ 上不能定义一个函数, 使它在每一有理点连续, 而在每一无理点不连续.

24. 若 $f(x)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数, 如果 $a = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ 及

$b = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ 均为有限数, 而 $A = \{f(r); r \in \mathbb{Q}\}$, 证明: 集 A 在 $[a, b]$ 上稠密.

25. 试把 $\mathbb{Q}$ 分为两个不相交处处稠密集.

26. 证明: 存在可数个开球, 使任一开集都可表为这可数个开球中某些开球的并.

27. 证明: 函数 $f(x) (x \in [a, b])$ 连续的充要条件是, 对任一实数 ξ , 集 $E = \{x; f(x) \geq \xi, x \in [a, b]\}$ 及集 $E_1 = \{x; f(x) \leq \xi, x \in [a, b]\}$ 都是闭集.

28. 证明: 函数 $f(x) (x \in (-\infty, \infty))$ 连续的充要条件是, 任一闭集 F 的原象 $f^{-1}(F)$ 是闭集.

29. 证明: 函数 $f(x) (x \in (-\infty, \infty))$ 连续的充要条件是, 任一开区间 (a, b) 的原象 $f^{-1}((a, b))$ 是开集.

30. 证明: 有界闭集的连续象是有界闭集. 无界闭集的连续象是否一定是闭集? 证明: 闭集、开集的连续象都是 F_σ 型集. 开集的连续象是否一定是开集?

31. $f(x)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的实函数, 如果对任意开集 $G \subset (-\infty, \infty)$, $f(G)$ 总是开集, 试问 $f(x)$ 是否一定是连续函数?

32. 证明: 在任一区间 $[a, b] \subset [0, 1]$ 中, 都可找到开区间 (a', b') , 其中不含 Cantor 集 P_0 的点, 但适合 $b' - a' \geq \frac{1}{5}(b - a)$.