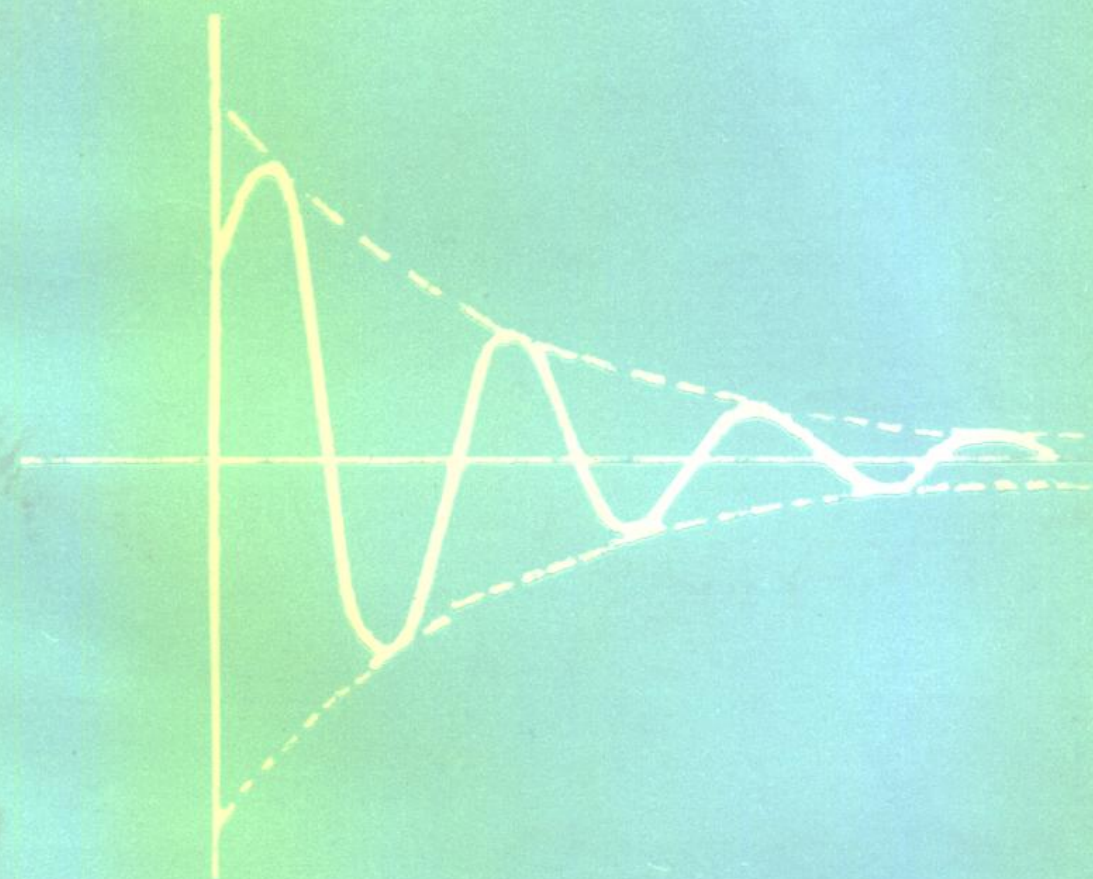


# 机械振动理论

黄永强 陈树勋 主编



机械工业出版社

# 机械振动理论

主编 黄永强 陈树勋  
编者 郑效忠 赵晓云



机械工业出版社

本书主要介绍机械振动学的基本理论,内容丰富,数学力学概念清晰,阐述详尽,系统性强。主要内容有:单自由度、两个自由度、多自由度的振动系统,机械阻抗法,冲击及响应谱,弹性体的振动,变截面梁的变分法,柔性转子动力学和非线性振动的定性解法和解析解法。

本书可作为高等院校有关专业的研究生以及高年级本科生选修课的教材或参考书,也可供工程技术人员参考。

#### 图书在版编目(CIP)数据

机械振动理论/黄永强,潘博编. —北京:机械工业出版社,1996.2

ISBN 7-111-04132-1

I. 机… II. 黄… 潘… III. 机械振动-动力学

IV. TH113.1

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第18744号

出版人 马九荣(北京市百万庄南街1号 邮政编码 100037)

责任编辑:李宜春 版式设计:李松山 责任校对:丁丽丽

封面设计:郭景云 责任印制:侯新民

北京昌平建华印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

1996年2月第1版·1996年2月第1次印刷

787mm×1092mm<sup>1/16</sup>·13<sup>1/2</sup>印张·330千字

0 001—1 300册

定价 21.00元

## 前 言

所谓机械振动是指物体在其平衡位置附近作往复运动,这种振动可通过位移、速度、加速度等物理量随时间的变化来表示。机械振动是机械工业基础学科之一。解决机械振动问题要用到数学、力学等基础理论,同时还要用到计算技术和实验技术。

随着生产的不断发展,现代机器设备正向重型、高速、轻载发展,生产中提出的振动问题越来越多。如大型发电设备因振动过大被迫停机,甚至整套设备遭到严重损坏;机床因刚度不足,在切削时产生较大的自激振动致使满足不了加工精度,汽车、拖拉机、农机和工程机械的随机振动影响产品的发展和定型;以及某些机械产品(凿岩机、风动工具和内燃机车等)的强烈振动和噪声对人体健康带来极大的危害等。诸如此类的机械振动问题在产品设计和新产品的开发上,也是不可忽视的很重要的一个方面。此外,在核技术、航天、航空、造船、运输等部门也存在许多振动问题有待解决。

力学系统的振动研究开始得比较早,而机械振动作为一门学科得到发展是在本世纪初。这是因为早期机械的运动速度低,振动问题不突出。随着工业的发展,机械结构逐渐庞大复杂,速度也越来越高,为了节省材料,提高经济效益,机械结构越来越轻巧。因而振动造成的事故逐渐增多。机械振动已开始引起人们的重视,成为必须解决的一个问题。

二次世界大战前,人们关心的主要问题是如何避免共振造成的事故,因此,机械结构固有频率和振型的确定是研究的焦点。由于计算技术比较落后,在处理振动问题时,不论实际机械系统如何,都用一个自由度系统或简单的弹性系统来代替。为了解决设计遇到的轴系扭振,1921年提出了霍尔兹(Holzer)法;对于轴系的横向振动,1924年提出了史托多拉(Stodla)法。在这个时期也把减振器作为两个自由度系统提出来研究。

在振动问题中,利用线性系统理论可解决不少问题。但仍有些问题得不到解决。第二次世界大战后,机械振动的研究发展到非线性系统,提出了如何判断系统的运动稳定性这一课题。对于包含有流体的系统,自激振动更为突出。空气透平压缩机的喘振也引起人们的注意。总之,各工业部门提出各种各样的振动问题需要解决。

劳斯(Routh)开始的稳定性理论在自动控制中是个重要问题。由于稳定性的研究,出现了将振动和自动控制结合在一起用同样方法加以解决的可能性。同时振动理论与自动控制理论相互影响促进了彼此的发展。如自动控制中的传递函数稳定性的频率判据(纳奎斯特图)等被引入到机械振动的研究中来,并成为有力的工具。根据机械系统与电气系统的相似性,发展了机械系统的电模拟研究,出现了模拟计算机,它是非线性系统定性研究的有力工具。

数字计算机的发展和普及使机械振动的研究工作有了飞跃,一些复杂系统的振动问题已能进行计算(如叶片、车辆、船舶等的振动问题),并在六七十年代提出许多有效的方法。如1971年提出的计算固有频率和振型的子空间迭代法,1972年提出的计算系统响应的威尔逊- $\theta$ (Wilson- $\theta$ )法等。

由于振动系统的载荷的复杂性,1965年提出了快速傅里叶变换(FFT算法)。使振动分析和响应计算向前迈出了一大步。像冲击这样的瞬态作用,地震这样的随机过程等都可用计算机

进行计算分析。

随着振动理论的发展,振动测试技术也有了发展,特别是近 20 年来,电子设备在振动测试中的广泛应用,使测试范围扩大了,测试的精度提高了。数据处理技术的引进,使振动测试结果的分析产生了飞跃。

为了掌握机械结构的动态特性和疲劳规律,需对其进行激振试验,早期的激振器多用偏心回转质量驱动。以后,电磁激振系统、电液激振系统迅速发展,激振力可达数十吨。当前已可以模拟环境的功率谱进行各种振动试验。

60 年代后期,跟踪滤波器研制成功,利用机械阻抗来研究动态特性已成为有力工具。目前已由单点激振发展到多点激振,使动态特性的研究又提高了一步。

目前,把机械振动的研究成果应用到各种机械的振动问题中去,提高设计水平,延长使用寿命,得到更大的经济收益,已成为各行各业的重要课题。

无论何种机械在工作过程中,总要受到各种干扰而引起振动,企图使它不产生振动是不可能的。为保证机械设备的正常工作,其振动值允许多大?如何根据许用振动值来对实际机械进行监测,这是当前还没有完全解决的问题。

长期处于剧烈的振动环境中,人体健康将受到影响,由振动产生的噪声是一种公害。因此,从环境保护来要求,振动也应有一个许用值。为此,迫切需要制定有关的振动标准。当前,国外已有了刚性转子平衡精度标准,旋转机械的振动标准和评定人体振动的标准等。有不少标准还在制订中。

过大的振动会造成破坏,应研究控制振动的措施。目前在隔振、消振方面已作了不少工作。另一方面,利用振动可以实现某种功能或提高功效,近 20 年来,振动利用也发展得很快,出现了一些大型的振动机械。

近年来,生产技术的发展,使得机械结构越来越复杂,且处于复杂环境中运行。因此对产品进行动态分析以便精确预示结构的振动情况已成为结构设计和产品革新中不可缺少的一环。当前机械振动研究的主要问题是我們常说的结构动力学问题。

一般地说,机械产品、工程结构或零部件都可理解为振动系统。外界对于系统的输入包括初始干扰、外部激振力等称为激励,系统在输入下产生的输出通常称为动态响应。在工程技术问题中最普通的振动问题是振动设计即在已知输入情况下,设计系统的振动特性。使它的动态响应能满足一定的要求;此外,还有通过已知的输入和输出来研究系统的特性的,称为系统识别;已知系统的特性和输出来研究输入的,称为环境预测,结构动力学的研究是为以上问题服务的。

结构动力学问题归纳起来有两类问题:结构动力响应和动力稳定性。研究的方法有分析计算和试验以及它们的结合。自数字计算机发展和普及后,逐渐提出的复杂弹性系统的振动问题的计算方法都可用来进行结构动力学问题的分析计算。如有限元法、子空间迭代法、威尔逊- $\theta$ 法、纽马克法和传递矩阵法等。近年来,为提高结构动力学的分析能力,在国外还研制了大量的、具有很全功能的软件系统。如 ASTRAN、ASKA 和 ADTNA 等。它们可以解决大量的结构静力学与动力学问题,并已深入到结构动力学的许多领域。

目前,各国都注意总结本国在机械振动研究方面的经验,国际上也经常召开各种学术交流会。近几年来还陆续出版了一些有代表性的著作。例如我国的“机械工程手册第 21 篇,机械振动;美国的振动冲击手册(Shock and Vibration Handbook);日本的“振动工程手册”(振動工学

ハンドブック 1976 等)。

尽管机械振动的研究已有很大的发展,但还有一些问题有待深入研究和解决。

1. 研究机械结构动力学的计算分析方法,编制大型多功能的计算程序。
2. 为满足机械设计的需要,应建立通用的振动计算程序库和数据库。
3. 非线性振动和随机振动的理论及分析方法已基本成熟,今后应进一步解决生产中的实际问题。
4. 热和流体的振动相当复杂,生产中已提出如蒸汽振荡,水力振荡和气柱振动等问题,应引起广泛的注意。
5. 应将现代控制理论中的一些系统识别技术,尤其是将线识别技术用于振动结构的参数识别中。
6. 加强机械振动噪声的研究,如机械噪声的发生及传播规律,噪声与机械振动的相互关系以及降噪措施(消声、隔声和低噪声设计)等。使产品在设计阶段就能预知其噪声声级。
7. 振动标准有待进一步制订和完善。
8. 进一步研究振动响应信号的采集与分析以及试验数据处理技术(相关分析和谱分析),以带动机器健康监测与诊断技术的发展。国内还应提高振动测试仪器和设备的质量,加强仪器设备的研制,满足机械振动研究的需要。

本书是在编者使用多年的《振动学讲义》的基础上改写的。主要介绍机械振动学的基本理论。此次改写力求内容丰富,数学力学概念清晰,阐述详尽,系统性强,难度亦有所提高。本书可作为高等院校有关专业的研究生以及高年级本科生的选修课的教材或参考书,也可供工程技术人员参考。

本书由河北理工学院黄永强和陈树勋主编。参加编写的还有山东工业大学郑效忠和河北理工学院赵晓云。执笔分工如下:黄永强——第二章、第八章;陈树勋——第六章、第七章;郑效忠——前言、第一章、第五章;赵晓云——第三章、第四章。

由于作者理论水平不高,实际工作经验不多,本书一定存在不少缺点和错误,敬希读者批评指正。

编者 1995 年 7 月

# 目 录

前 言	建立 .....	64
第一章 振动的运动学概念 .....	1	
第一节 振动的表示方法 .....	1	
第二节 振动的合成 .....	5	
第三节 谐波分析 .....	10	
第二章 单自由度系统的振动 .....	18	
第一节 自由振动 .....	18	
第二节 谐激振下的受迫振动 .....	20	
第三节 用复数求解正弦激励下系统的 稳态响应及传递函数 .....	22	
第四节 用机械阻抗法求解振动问题 .....	24	
第五节 周期激振力作用下的受迫 振动 .....	29	
第六节 任意激振力作用下的受迫 振动 .....	31	
第七节 频谱函数 .....	33	
第三章 冲击 .....	37	
第一节 引言 .....	37	
第二节 运动方程 .....	37	
第三节 拉普拉斯变换 .....	38	
第四节 用拉普拉斯变换解冲击问题 .....	39	
第五节 响应函数、响应谱 .....	42	
第六节 阻尼对冲击响应的影响 .....	47	
第四章 两个自由度系统的振动 .....	51	
第一节 两个自由度系统的自由振动 .....	51	
第二节 影响系数法及矩阵法 .....	52	
第三节 具有粘性阻尼的自由振动 .....	56	
第四节 具有粘性阻尼的受迫振动 .....	57	
第五节 机械阻抗法的应用 .....	59	
第五章 多自由度系统的振动 .....	64	
第一节 多自由度系统振动方程的 建立 .....	64	
第二节 多自由度系统的自由振动 .....	70	
第三节 固有频率的计算 .....	76	
第四节 多自由度系统的受迫振动 .....	100	
第六章 弹性体的振动 .....	105	
第一节 杆的纵向振动 .....	105	
第二节 圆轴的扭转振动 .....	113	
第三节 等截面直梁的横向振动 .....	119	
第七章 变截面直杆振动的近似解法、 柔性转子的动平衡原理 .....	129	
第一节 弹性体的哈密尔顿原理和拉格 朗日方程 .....	129	
第二节 变分问题的解法 .....	133	
第三节 用瑞利—里兹法求变截面直杆的 固有频率和主振型 .....	135	
第四节 伽辽金法 .....	142	
第五节 转子的动平衡问题概述 .....	146	
第六节 刚性转子的动平衡原理 .....	147	
第七节 柔性转子的动平衡原理 .....	150	
第八节 柔性转子的平衡条件 .....	152	
第九节 振型平衡法 .....	154	
第八章 非线性振动 .....	158	
第一节 非线性振动系统的分类及 实例 .....	158	
第二节 非线性振动的稳定性 .....	164	
第三节 相轨线的图解法 .....	172	
第四节 极限环、自激振动 .....	177	
第五节 非线性振动的解析法 .....	180	
习题 .....	197	
参考文献 .....	209	

# 第一章 振动的运动学概念

## 第一节 振动的表示方法

振动是工程中广泛存在的一种运动现象。人们最容易理解的是周期性振动,即经过一定的时间间隔  $T$  之后,就重复前一时间间隔的运动过程,这个时间间隔  $T$ ,叫做振动的周期。

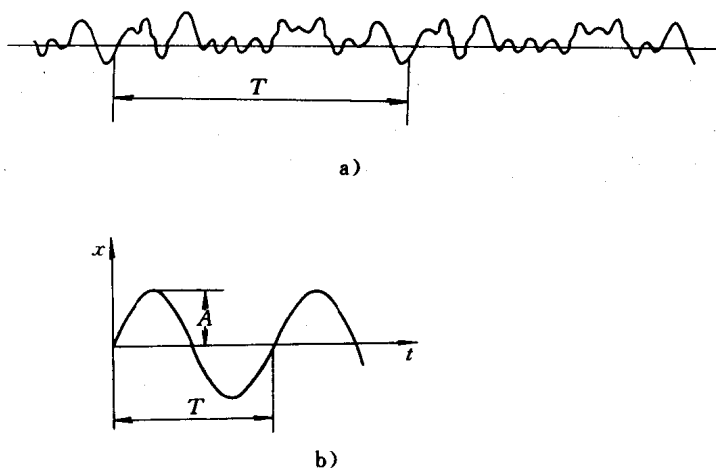


图 1-1

图 1-1a 是测得的柴油机曲轴扭转振动的曲线,周期振动中,最简单的一种是谐振动(图 1-1b),其位移  $x$  和时间  $t$  的关系可表示如下:

$$x = A \sin \omega t \quad (1-1)$$

位移的最大值  $A$ ,叫做振幅;周期  $T$  的倒数  $f = \frac{1}{T}$ ,叫做频率,其单位是  $s^{-1}$ ,即每秒振动的次数。式(1-1)中的  $\omega$  叫做角频率,其单位是  $rad/s$ ,即每秒的弧度数,三者的关系是

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}, f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1-2)$$

利用求导数的方法,可以得到谐振动的速度和加速度的表达式,分别为

$$\left. \begin{aligned} v = \dot{x} &= \omega A \cos \omega t = \omega A \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \\ a = \ddot{x} &= -\omega^2 A \sin \omega t = \omega^2 A \sin(\omega t + \pi) \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

由此可见,只要位移是时间的谐函数,速度和加速度也是时间的谐函数,而且和位移具有相同的频率。但是速度比位移超前  $\frac{\pi}{2}$ ,加速度比位移超前  $\pi$ ,如图 1-2 所示。

一个振动质点的运动可以用一个旋转矢量表示。设矢量  $p$ (图 1-3)以匀角速度  $\omega$  反时针旋转,其模为  $A$ 。若以水平位置作为起点来计算时间,那么该矢量在  $x$  和  $y$  轴上的投影为



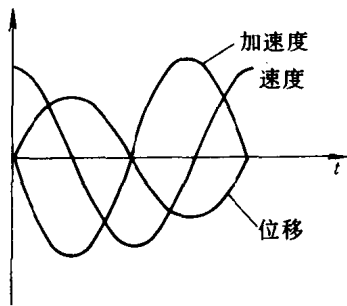


图 1-2

$$x = A\cos\omega t \quad y = A\sin\omega t$$

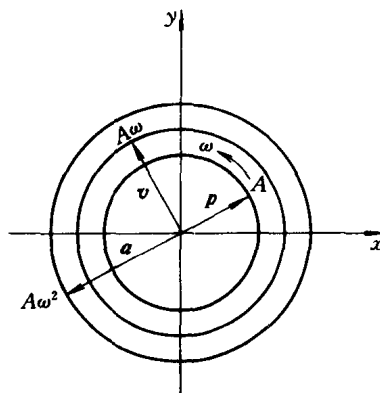


图 1-3

这两个投影的表达式都和谐振动的表达式一样。因此可以用旋转矢量来表示振动，只要使这个矢量的模等于谐振动的振幅，矢量的旋转角速度等于谐振动的角频率就行了。为了和振动的复数表示方法相一致，我们规定：选用旋转矢量的水平投影来表示谐振动。这时有

$$x = A\cos\omega t \quad (1-4)$$

运动速度是  $\dot{x} = -A\omega\sin\omega t = A\omega\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

即可以用长为  $A\omega$  的矢量(的水平投影)来表示，它与位移矢量以同样的角速度  $\omega$  转动，但比位移超前  $\frac{\pi}{2}$ 。同样加速度是以长为  $A\omega^2$  的矢量(的水平投影)来表示，它以同样的角速度  $\omega$  转动，且超前于位移矢量  $\pi$ (见图 1-3)。

这种用旋转矢量表示谐振动的方法，用于讨论角频率相等的二个振动的合成是十分方便的。例如，一个质点同时作  $A\cos\omega t$  和  $B\cos(\omega t - \varphi)$  的运动，如果用三角函数的加法是很麻烦的，利用矢量求和的方法是很方便的。令  $C = A + B$ ，则旋转矢量  $C$  在  $x$  轴上的投影即为质点的合成振动。如图 1-4 所示。

值得注意的是，利用旋转矢量进行振动合成的方法，只适用于二个相同频率的情况，若频率不相同，两矢量间的相对位置时刻发生变化，上述方法就不适用了。

**例 1** 一质点的运动规律是  $x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ ，试用矢量来表示它。

**解**  $a\cos\omega t + b\sin\omega t = a\cos\omega t + b\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

上式两项可以分别用矢量  $a$  和  $b$  的水平投影来表示。据合矢量投影定理， $a$  和  $b$  的合矢量  $c$  在水平轴上的投影，便是  $a$  和  $b$  在同一轴上投影的和。因此该质点的运动可用合矢量  $c$  在水平轴上的投影来表示。见图 1-5。根据图可求得

$$|c| = |a+b| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \alpha = \text{tg}^{-1} \frac{b}{a}$$

合运动为  $x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\omega t - \alpha)$

一个质点的谐振动，也可以用复数表示。这种表示法，用于数值计算是很方便的。大家知道，一个复数，可以写成  $z = a + ib$  的形式，其中  $i = \sqrt{-1}$ ， $a$  叫做复数  $z$  的实部，记作  $\text{Re}z = a$ ， $b$  叫做复数  $z$  的虚部，记作  $\text{Im}z = b$ ，取一个平面，令其水平轴  $x$  代表实部，竖直轴  $y$  代表虚部，则得一复平面。一个复数可以用复平面上的一个点来表示，例如  $z = a + ib$ ，可以用图 1-6 中的  $z$

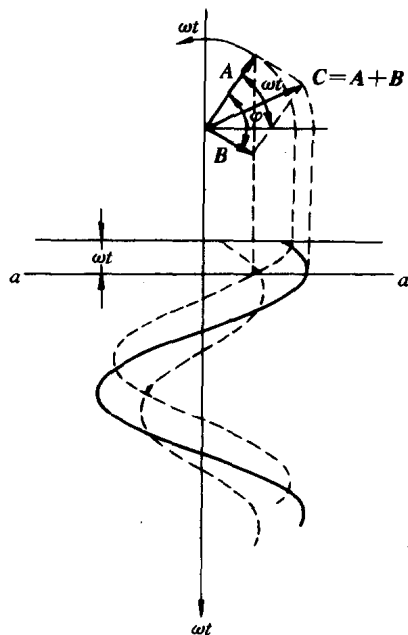


图 1-4

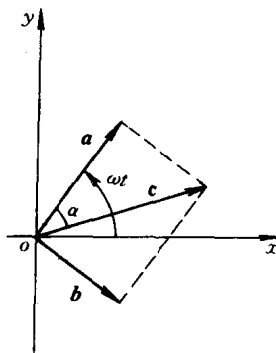


图 1-5

点表示。如果把  $z$  点和原点  $o$  联一直线, 设其长度为  $A$ , 则有  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$

如果把直线  $oz$  和实轴的夹角用  $\theta$  表示, 复数  $z$  可以写为

$$z = A \cos \theta + i A \sin \theta \quad (1-5)$$

根据欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1-6)$$

则式(1-5)可写为

$$z = A e^{i\theta} \quad (1-7)$$

式中  $A$  称为复数  $z$  的模,  $\theta$  称为复数  $z$  的辐角, 分别记作

$$A = |z| \quad \theta = \arg z \quad (1-8)$$

由图 1-6 看出, 复平面上的一个复数  $z$ , 可以看作为复平面上的一个矢量, 为了区别于一般矢量, 我们称它为复矢量。这个矢量的模就是复数  $z$  的模, 它的方向由辐角  $\theta$  决定。

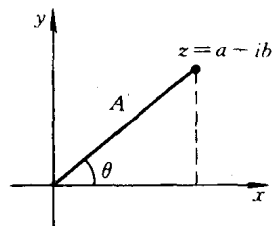


图 1-6

若用  $\omega t$  代替(1-5)中的  $\theta$ , 则得

$$z = A \cos \omega t + i A \sin \omega t = A e^{i\omega t} \quad (1-9)$$

式(1-9)在复平面上就是一个旋转复矢量(图 1-7)。这个旋转复矢量在实轴和虚轴上的投影都是谐振动。为了和矢量表示方法一致, 我们规定, 选用它在实轴上的投影来表示研究的谐振动, 这就是说

$$A \cos \omega t = \operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(A e^{i\omega t}) \quad (1-10)$$

**例 2** 设一质点的运动函数是  $x = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ , 试用复数来表示它

**解**  $\because \sin \omega t = \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad \therefore x = a \cos \omega t + b \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$

在复数平面上(图 1-8), 分别画出代表  $a \cos \omega t$  和  $b \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$  的复矢量  $a e^{i\omega t}$  和  $b e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$ , 这两个矢量相加得合矢量  $\sqrt{a^2 + b^2} e^{i(\omega t - \alpha)}$ 。因此合成振动用复数表示时为

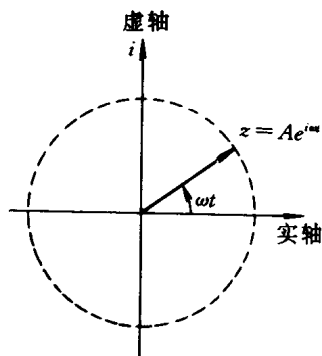


图 1-7

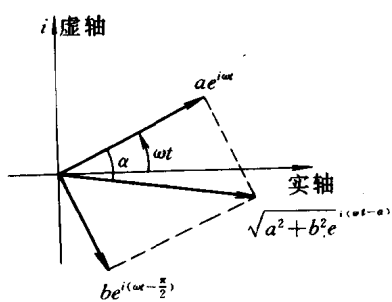


图 1-8

$$x = \operatorname{Re}[\sqrt{a^2 + b^2} e^{i(\omega t - \alpha)}] \quad (1-11)$$

用复数表示振动,进行运算时,常用到共轭复数运算的几个基本公式,这里不加证明,仅引用其结果。若  $\bar{z}$  为  $z$  的共轭复数,则有

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}z \quad (1-12)$$

$$z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}z \quad (1-13)$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \quad (1-14)$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad (1-15)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \quad (1-16)$$

据欧拉公式  $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ , 则有  $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$  (1-17)

即复数  $e^{i\varphi}$  的共轭复数是  $e^{-i\varphi}$ 。

**例 3** 用复数表示正弦波  $S = A\sin(\omega t + \varphi)$

**解** 在  $S = A\sin(\omega t + \varphi)$  中,可以认为  $A > 0, \omega > 0$

$$\begin{aligned} \text{则 } S &= A\sin(\omega t + \varphi) = A\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t - \varphi\right) \\ &= \operatorname{Re}Ae^{i(\frac{\pi}{2} - \omega t - \varphi)} = \operatorname{Re}Ae^{i(\frac{\pi}{2} - \varphi)}e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

引入记号  $C = \frac{1}{2}Ae^{i(\frac{\pi}{2} - \varphi)}$  (1-18)

则有  $S = 2\operatorname{Re}Ce^{-i\omega t}$

由式(1-12)和(1-18),可得到表达式

$$S = Ce^{-i\omega t} + \bar{C}e^{i\omega t} \quad (1-19)$$

**例 4** 用复数表示  $S = \sum_{n=0}^N A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)$

(假定  $\omega_0 = 0 \quad \omega_n > 0 \quad n = 1, 2, \dots, N$ )

**解**

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^N A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \\ &= A_0 \sin\varphi_0 + \sum_{n=1}^N A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \\ &= C_0 e^{-i\omega_0 t} + \sum_{n=1}^N (C_n e^{-i\omega_n t} + \bar{C}_n e^{i\omega_n t}) \end{aligned} \quad (1-20)$$

式中  $C_0 = A_0 \sin \varphi_0, C_n = \frac{1}{2} A_n e^{i(\frac{\pi}{2} - \varphi_n)}$

若令  $\omega_{-n} = -\omega_n, C_{-n} = \bar{C}_n$

则式(1-20)可写为 
$$S = \sum_{n=-N}^N C_n e^{-i\omega_n t} \quad (1-21)$$

根据指数函数求导数的运算规则,对谐振动的位移表达式  $x = Ae^{i\omega t}$ ,进行求导数,可以得到其速度和加速度的表达式如下

$$v = \dot{x} = i\omega x = i\omega A e^{i\omega t} \quad (1-22)$$

$$a = \ddot{x} = (i\omega)^2 x = -\omega^2 A e^{i\omega t} \quad (1-23)$$

由于  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ,因此式(1-22)和(1-23)可写为

$$v = \dot{x} = \omega A e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \quad (1-24)$$

$$a = \ddot{x} = \omega^2 A e^{i(\omega t + \pi)} \quad (1-25)$$

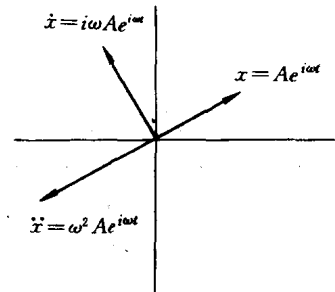


图 1-9

将位移、速度、加速度复矢量画在同一复平面上则得图 1-9。通过以上分析可以得出:对复数求导一次,就等于原复数乘上一个  $i\omega$ ,复数每乘一个  $i$ ,就相当于复平面上的这个复矢量逆时针转  $\frac{\pi}{2}$  弧度。

## 第二节 振动的合成

沿同一方向以同一频率进行振动的二个谐振动  $x_1$  和  $x_2$  可以合成,得到的是以同一频率进行的谐振动。设有  $x_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1), x_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$

则

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) \\ = (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2) \sin \omega t + (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2) \cos \omega t$$

令

$$\left. \begin{aligned} A \cos \alpha &= A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 \\ A \sin \alpha &= A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-26)$$

式(1-26)两端平方相加,可求得

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)} \quad (1-27)$$

式(1-26)两端相除可求得  $\text{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} \quad (1-28)$

利用式(1-26)、(1-27)和(1-28),合成振动可表示为  $x = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (1-29)$

在特殊情况下,如果  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,由式(1-27)和(1-28)得  $A = A_1 + A_2, \alpha = \alpha_1$

如果  $\alpha_1 = \alpha_2 + \pi$ ,则  $A = A_2 - A_1, \alpha = \alpha_2$

上述关系可用图 1-10 表示,图中虚线表示  $x_1$  和  $x_2$ ,实线表示合成振动。

二个以上相同频率的谐振动也可用上述方法进行合成,设有  $k$  个谐振动

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) \\ x_2 &= A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) \\ &\dots\dots\dots \\ x_k &= A_k \sin(\omega t + \alpha_k) \end{aligned} \right\} \quad (1-30)$$

其合成振动可表示为

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (1-31)$$

$$\text{式中 } A = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^k A_n \cos \alpha_n\right)^2 + \left(\sum_{n=1}^k A_n \sin \alpha_n\right)^2}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sum_{n=1}^k A_n \sin \alpha_n}{\sum_{n=1}^k A_n \cos \alpha_n} \quad (1-32)$$

由以上的讨论可以看出,沿同一方向以同一频率进行谐振时,其合成振动仍为一谐振动。那么,沿同一方向以不同频率进行谐振时,其合成运动是什么情况呢?

设沿同一方向的两个谐振为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ x_2 &= A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{aligned} \right\} \quad (1-33)$$

其合成运动为

$$\begin{aligned} x &= A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \\ &= A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin[(\omega_1 t + \alpha_1) \\ &\quad + (\omega_2 - \omega_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1)] \\ &= A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1)] \\ &\quad + A_2 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \sin[(\omega_2 - \omega_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1)] \\ &= \{A_1 + A_2 \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1)]\} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ &\quad + A_2 \sin[(\omega_2 - \omega_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1)] \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \\ &= \{A_1 + A_2 \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1)]\} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ &\quad + A_2 \sin[(\omega_2 - \omega_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1)] \sin\left(\omega_1 t + \alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

由上式看出:两个不同频率的振动合成,可以看作

$$\begin{aligned} \text{振幅为} & \quad A_1 + A_2 \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1)] \\ \text{和} & \quad A_2 \sin[(\omega_2 - \omega_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1)] \end{aligned}$$

位相为  $\alpha_1$  和  $\alpha_1 + \frac{\pi}{2}$  的两个相同频率的振动的合成,其合成结果为

$$x = A(t) \sin[\omega_1 t + \alpha_1 + \alpha(t)] \quad (1-34)$$

$$\text{式中 } A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1)]}$$

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{A_2 \sin[(\omega_2 - \omega_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1)]}{A_1 + A_2 \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1)]} \quad (1-35)$$

由式(1-34)和(1-35)看出,其合成振动的振幅和位相都随时间而变化。这里可以分为三种情况。

(1)两个谐振动的频率都是不大的整数,其合成振动是周期性运动,周期为两分振动周期的最小公倍数。图 1-11 和图 1-12 分别示出频率比为 2:1 和 3:1 两种情况下的合成振动。

(2)两个分振动中,其中一个振动频率远大于另一个时,其合成振动如图 1-13 和图 1-14 所示。图 1-13 表示高频振动振幅较大而低频振动振幅较小的情况,图 1-14 表示低频振动振幅

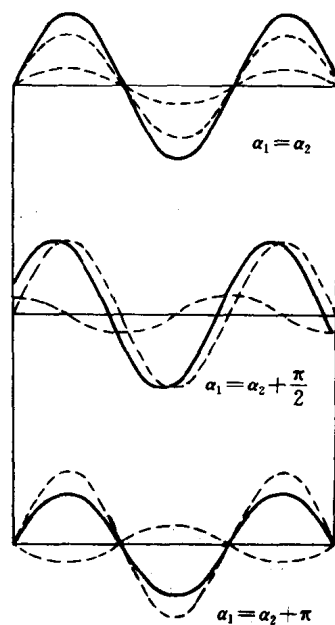


图 1-10

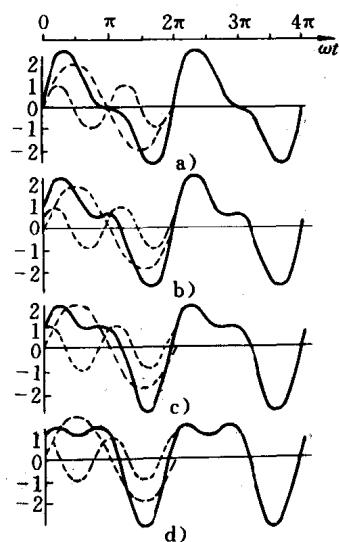


图 1-11

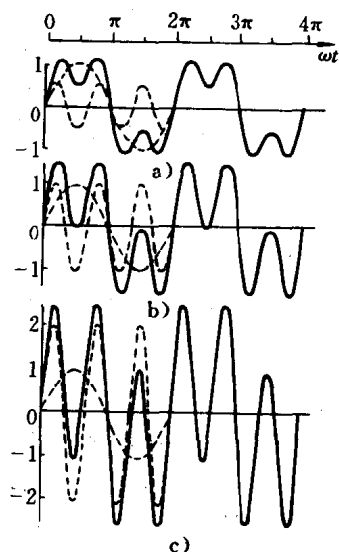


图 1-12

较大而高频振动振幅较小的情况。

(3) 两个振动的频率比较接近时, 出现拍振, 下面对拍振作进一步的讨论。

令用式(1-33)表示的两个振动, 其频率之差  $\epsilon = \omega_2 - \omega_1$ , 当  $\epsilon$  远远小于  $\omega_1$  和  $\omega_2$ ,  $x_2$  可写为

$$x_2 = A_2 \sin[\omega_1 t + (\epsilon t + a_2)]$$

即把  $x_2$  看作和  $x_1$  具有相同频率, 位相  $(\epsilon t + a_2)$  随时间进行缓慢变化, 此时合成振动为

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + a_1) + A_2 \sin[\omega_1 t + (\epsilon t + a_2)]$$

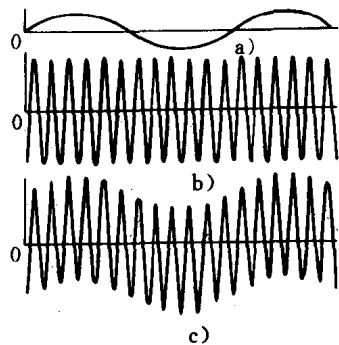


图 1-13

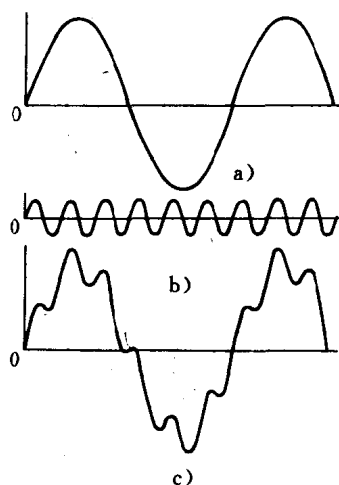


图 1-14

令

$$x = A(t) \sin[\omega_1 t + a(t)] \quad (1-36)$$

利用同频率二个谐振动合成的公式(1-27)和(1-28)可求得

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\epsilon t + \alpha_2 - \alpha_1)} \quad (1-37)$$

$$\operatorname{tg}\alpha(t) = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin(\epsilon t + \alpha_2)}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos(\epsilon t + \alpha_2)}$$

由上式看出,这种合成振动近似于正弦振动,但其振幅随时间在变化。由(1-37)之第一式,当  $\cos(\epsilon t + \alpha_2 - \alpha_1) = 1$

即  $t = [2n\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)]/\epsilon \quad (n=0,1,2,\dots)$

时,振幅达到最大值,其值为:  $A_{\max} = A_1 + A_2$ 。

当  $\cos(\epsilon t + \alpha_2 - \alpha_1) = -1$ , 即  $t = [(2n+1)\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)]/\epsilon \quad (n=0,1,2,\dots)$

时,振幅达最小值,其值为:  $A_{\min} = A_1 - A_2$

这种振幅在最大值  $(A_1 + A_2)$  和最小值  $(A_1 - A_2)$  之间作周期性变化的现象叫做拍振。图 1-15a 示出振幅不相等的两余弦振动合成的拍振,图 1-15b 示出振幅不相等的两正弦振动合成的拍振,图 1-15c 示出一般性情况下出现的拍振。最大振幅处称为拍峰,最小振幅处称为拍谷。

若两个谐振动的振幅相等,即  $A_1 = A_2 = A$  时,则有

$$x = A\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A\sin(\omega_1 t + \epsilon t + \alpha_2)$$

$$= 2A\cos\frac{1}{2}(\epsilon t + \alpha_2 - \alpha_1)\sin\left(\omega t + \frac{\epsilon t + \alpha_2 + \alpha_1}{2}\right) \quad (1-38)$$

此时,合成振动如图 1-16 所示。

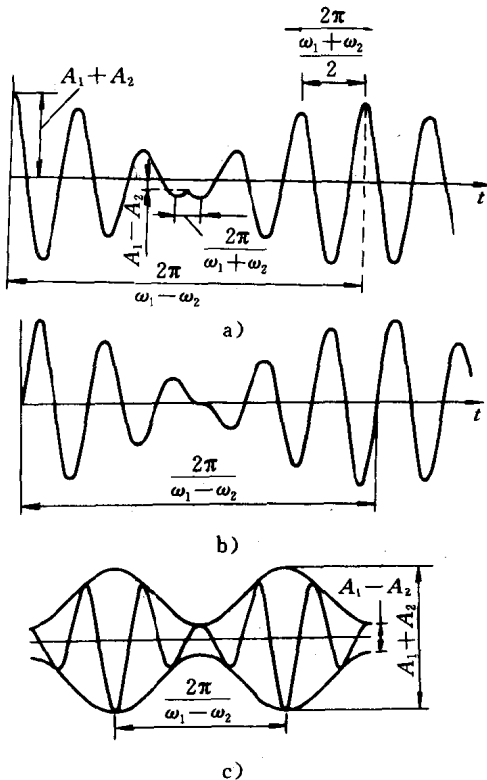


图 1-15

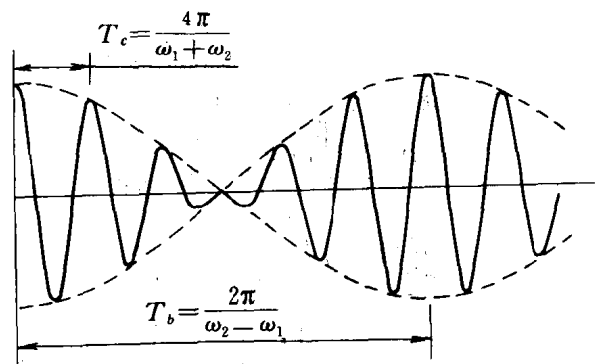


图 1-16

拍振时,振幅变化的频率称为拍频,记以  $\omega_b$ 。合成振动的频率,称为平均频率,记以  $\omega_c$ ,则有

$$\omega_b = \omega_2 - \omega_1 \quad T_b = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \quad (1-39)$$

$$\omega_c = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \quad T_c = \frac{4\pi}{\omega_2 + \omega_1} \quad (1-40)$$

同方向的两个振动的合成,在工程上,经常遇到。图 1-17 示出了测量四冲程柴油机曲轴扭转时得到的几种波形及其分析结果。图中之  $K$ ,称为简谐次数,是指每一转内振动的次数。

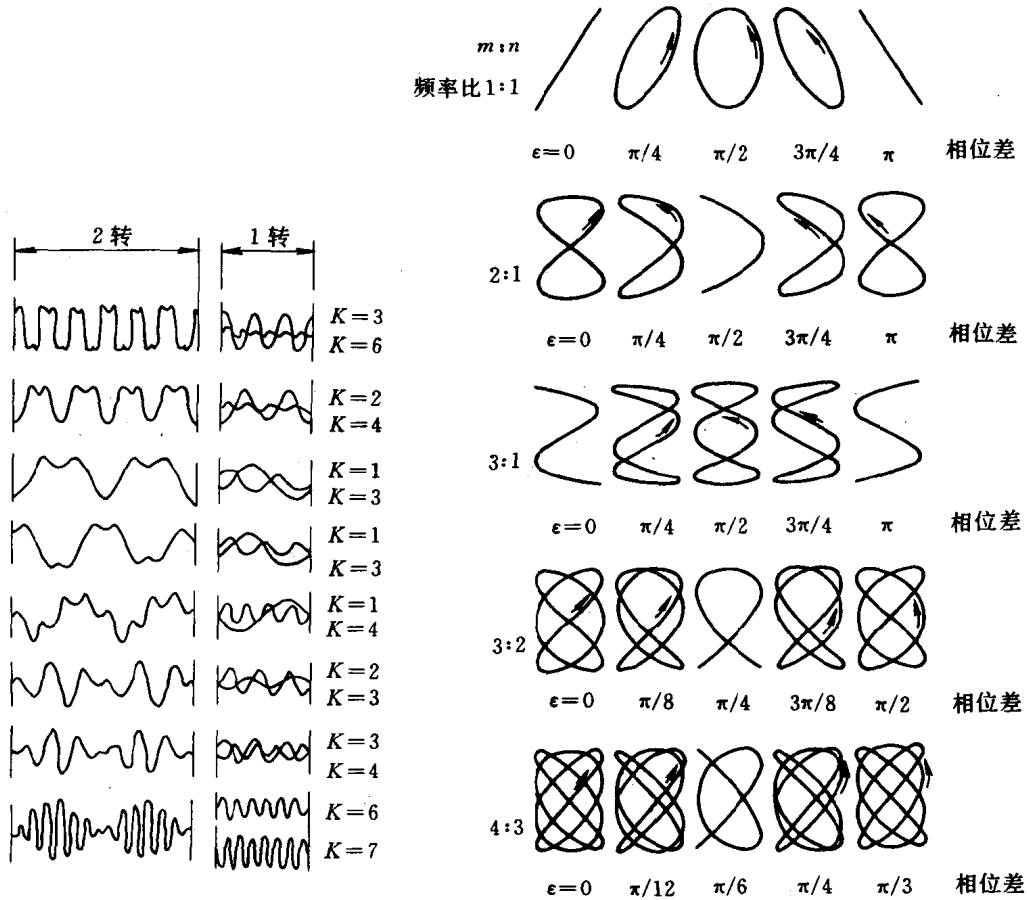


图 1-17

图 1-18

互相垂直的二个方向的振动,也可以合成。设有二个谐振动

$$\left. \begin{aligned} x &= A \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ y &= B \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{aligned} \right\} \quad (1-41)$$

其合成结果与频率  $\omega_1, \omega_2$  和位相  $\alpha_1, \alpha_2$  有关。合成得到的图形,称为李萨如图形。我们讨论  $\omega_1 = \omega_2$  的情况,此时,式(1-41)可定为

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{A} &= \cos \alpha_1 \sin \omega t + \sin \alpha_1 \cos \omega t \\ \frac{y}{B} &= \cos \alpha_2 \sin \omega t + \sin \alpha_2 \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (1-42)$$

消去式(1-42)中的时间  $t$ , 得到

$$\left( \frac{x}{A} \right)^2 + \left( \frac{y}{B} \right)^2 - 2 \frac{xy}{AB} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (1-43)$$

一般讲,上述方程是一椭圆。因为质点的位移  $x$  和  $y$  在有限范围内变动,所以椭圆不会超出以



2A 和 2B 为边的矩形。此外,椭圆长短轴的大小和方位由相位差 $(\alpha_2 - \alpha_1)$ 决定。例如,当 $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$ 时,式(1-43)为

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \quad \therefore \frac{y}{x} = \frac{B}{A} \quad (1-44)$$

因此,运动轨迹是一条斜率为 $\frac{B}{A}$ 、过原点的直线。

当 $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ 时,式(1-43)为 
$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1 \quad (1-45)$$

因此,运动轨迹为一椭圆,若 $A=B$ ,则为一圆。

图 1-18 示出频率比为 $m:n$ ,位相差为 $\epsilon$ 时,合成运动的运动轨迹——李萨如图,利用李萨如图可以进行频率测量。

### 第三节 谐波分析

工程实际中遇到的振动,往往不是一个单一的谐振动,而是由多个频率和振幅各不相同的谐振动的叠加。这时得到的波形是比较复杂的。图 1-19 是我们测得的柴油机曲轴系统的扭转振动波形。由图可看出,它也是有周期的。那么能不能将这种周期性的非谐振动分解成若干个谐振动呢? 数学告诉我们,在满足一定的条件时,是可以做到的。

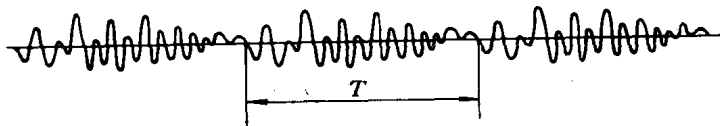


图 1-19

若 $x(t)$ 是一个以 $T$ 为周期的周期函数,它可以展成傅里叶级数

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots$$

或 
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (1-46)$$

式中 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,称为基频, $n\omega (n=1, 2, \dots)$ 称为倍频。系数 $a_n, b_n$ 由下列式子确定

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^T x(t) \cos n\omega t dt \\ b_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^T x(t) \sin n\omega t dt \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (1-47)$$

也可将式(1-46)写为 
$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \phi_n) \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \phi_n &= \arctg \frac{b_n}{a_n} \end{aligned} \right\} \quad (1-48)$$

通过以上分析,可以看出,确定了 $A_n, \phi_n$ (或 $a_n$ 和 $b_n$ ),就完全确定了 $x(t)$ 这一周期函数的各阶谐分量。这种利用傅里叶级数,将一个周期函数分解为一系列谐函数的过程,称为谐波分