

奇異積分方程

〔苏联〕H. И. 穆斯海里什維里 著

上海科学技术出版社

奇异积分方程

函数論边值問題及其在数学物理中的某些应用

〔苏联〕H. И. 穆斯海里什維里 著

朱季訥 譯

上海科学技术出版社

內容提要

本書系統地介紹了含有 Cauchy 積分主值的一維奇異積分方程(組)的理論以及函數論中某些邊值問題的理論,從 Cauchy 型積分的基本性質談起,討論了在光滑的封閉圍綫和連續系數情形下的奇異積分方程、聯結問題、邊值問題等,其次再用了相當大的篇幅來介紹了這些理論在流體力學、勢論、平面彈性理論以及在數學物理其他分枝中的某些應用。

本書系根據原書 1962 年第二版譯出。

本書的主要對象是數學、力學、物理各專業高年級學生、研究生、教師以及科學工作者。本書特別可供綜合大學數學系函數論專門化、偏微分方程專門化以及積分方程專門化作為教學用書。本書對技術科學工作者亦有一定參考價值。

2186.68

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Граничные Задачи Теории Функций и Некоторые Их
Приложения к Математической Физике

Н. И. Мусхелишвили

Физматгиз 第二版, 1962 年

奇異積分方程

函數論邊值問題及其在數學物理中的某些應用

朱季訥譯

上海科學技術出版社出版 (上海瑞金二路 450 號)

上海市書刊出版業營業許可證出 093 號

商務印書館上海廠印刷 新華書店上海發行所發行

開本 850×1156 1/32 印張 21 24/32 排版字數 536,000

1966 年 2 月第 1 版 1966 年 2 月第 1 次印刷

印數 1—2,000

統一書號 13119·678 定價(科六) 3.20 元

目 录

引 言	1
-----------	---

第一章 Cauchy 型积分的基本性质

I. 一些定义和輔助命题	4
§ 1. 光滑曲綫和逐段光滑曲綫	4
§ 2. 光滑曲綫的某些性质	9
§ 3. H 条件(Hölder 条件)	11
§ 4. 在光滑曲綫上的 H 类函数	13
§ 5. 判定給定在光滑曲綫上的函数是否属于 H 类的簡單准則	15
§ 6. 續	20
§ 7. 續	24
§ 8. 定义在逐段光滑曲綫上的 H 类函数、 H_0 类函数、 H^* 类函数 及 H_0^* 类函数	30
§ 9. 連續函数的边值	33
§ 10. 分区全純函数	38
II. Cauchy 型积分	41
§ 11. Cauchy 型积分的定义	41
§ 12. 和对数势的联系	43
§ 13. Cauchy 型积分在积分曲綫上的值	46
§ 14. 单层势的切微商	53
§ 15. Cauchy 型积分的边值	57
§ 16. Сохоцкий-Plemelj 公式	64
§ 17. 边值的差的公式之推广	66
§ 18. 边值的連續特性	69
§ 19. 展布在无穷长直綫上的 Cauchy 型积分	76
§ 20. Cauchy 型积分的导函数在积分曲綫附近的性质	84
§ 21. Cauchy 型积分在积分曲綫附近的性质	86

§ 22. Cauchy 型积分在积分曲线端点附近的性质	91
§ 23. 續. 某些輔助估計式	98
§ 24. 續. 命題 II 的證明	102
§ 25. 續. 命題 IV 和 VI 的證明	103
§ 26. Cauchy 型积分在逐段光滑的积分曲线之結点附近的性质	112
§ 27. 某些推广的簡介介紹	125
III. 某些直接应用	130
§ 28. Poincaré-Bertrand 置換公式	130
§ 29. 給定在封閉圍綫的全体上的函数能够进行解析拓展的条件	138
§ 30. 广义的 Harnack 定理	144
§ 31. 依据已知的跳跃来确定分区全純函数	145
§ 32. 在封閉圍綫情形下的 Cauchy 型积分的反演	149
§ 33. Hilbert 反演公式	152

第二章 在光滑的封閉圍綫和連續系数情形下 的联結問題及奇异积分方程

I. 在光滑的封閉圍綫和連續系数情形下的联結問題	158
§ 34. 齐次联結問題	158
§ 35. 齐次联結問題的求解	161
§ 36. 相联的齐次联結問題	174
§ 37. 非齐次联結問題	174
§ 38. 边界曲线为直綫情形的联結問題	178
II. Riemann-Hilbert 問題	183
§ 39. 將給定在圓域或半平面上的解析函数拓展到全平面上的問題	184
§ 40. Riemann-Hilbert 問題	190
§ 41. 圓域上的 Riemann-Hilbert 問題的求解	191
§ 42. 半平面上的 Riemann-Hilbert 問題	200
§ 43. 將一般情形归結为圓域上的情形	204
III. 在光滑的封閉圍綫和連續系数情形下的奇异积分方程	207
§ 44. 奇异积分算子与奇异积分方程	207
§ 45. 奇异积分算子的基本性质	212
§ 46. 相联的算子和相联的方程	218

§ 47. 特征方程的求解	220
§ 48. 特征方程的相联方程的求解	224
§ 49. 若干一般性的注释	228
§ 50. 奇异积分方程的正则化	232
§ 51. Fredholm 方程解的连续性特征	233
§ 52. Fredholm 方程的豫解式	237
§ 53. 基本定理	241
§ 54. 实方程的情形	248
§ 55. И. И. Бекья 的等价性定理和基本定理的新证明	251
§ 56. 奇异积分方程和 Fredholm 方程的对比. 拟 Fredholm 奇异积分方程. 化为标准型	255
§ 57. T. Carleman-И. И. Бекья 的正则化方法	259
§ 58. 参数 λ 的引进	262
§ 59. 对于某些其他结果的简单介绍	264

第三章 对一些边值问题的应用

I. Dirichlet 问题	269
§ 60. Dirichlet 问题和变态的 Dirichlet 问题的提法. 唯一性定理	269
§ 61. 利用双层势求解变态的 Dirichlet 问题	274
§ 62. 一些推论	279
§ 63. Dirichlet 问题的求解	280
§ 64. 利用变态的单层势求解变态的 Dirichlet 问题	283
§ 65. 利用单层势求解 Dirichlet 问题. 静电学的基本问题	288
II. 全纯函数利用 Cauchy 型积分或其他类似的积分的各种表示法	295
§ 66. 一般性的注释	295
§ 67. 具有实的或者纯虚的密度之 Cauchy 型积分的表示式	297
§ 68. 密度为 $(a+ib)\mu$ 的 Cauchy 型积分的表示式	300
§ 69. И. И. Бекья 的积分表示式	302
III. 广义的 Riemann-Hilbert-Poincaré 问题的求解	313
§ 70. 几点预先的注释	313
§ 71. 广义的 Riemann-Hilbert-Poincaré 问题(问题 V). 归结为积分方程	314

§ 72. 問題 V 的可解性問題之研究	319
§ 73. 問題 V 的可解性准則	325
§ 74. Poincaré 問題(問題 P)	329
§ 75. 例題	334
§ 76. 若干推广和应用	338

第四章 一般情形下的联結問題. 某些应用

I. 一般情形下的联結問題	344
§ 77. 一些术语和記号	344
§ 78. 一般情形下的齐次联結問題	345
§ 79. 相联的齐次联結問題. 相联的类	352
§ 80. 一般情形下的非齐次联結問題	353
§ 81. 和联結問題有关的一些工作	357
§ 82. 給定在 L 上的函数的 h 类的概念. 某些推广	362
§ 83. 重要的特殊情形. 边界是无穷长直綫的情形	363
§ 84. 便于构造典則函数的一个方法	373
II. 一般情形下的 Cauchy 型积分的反演問題	374
§ 85. 在断續的光滑边界曲綫情形下問題 $\Phi^+ + \Phi^- = g$ 的解	376
§ 86. 在光滑的断續的积分路徑情形下 Cauchy 型积分的反演公 式	380
§ 87. 在断續的光滑的积分路徑情形下反演問題的某些变形	383
§ 88. 續	388
§ 89. 在一般情形下問題 $\Phi^+ + \Phi^- = g$ 的求解	392
§ 90. 在一般情形下 Cauchy 型积分的反演公式	397
III. 調和函数論中对于某些区域的一些基本边值問題的有效解法	400
§ 91. 在沿着一条直綫而断續地割开的面上的 Dirichlet 問題和 其他类似的問題	400
§ 92. 在沿着圓周而断續地割开的面上的 Dirichlet 問題及其他 类似的問題	413
§ 93. 具有間断系数的 Riemann-Hilbert 問題	413
§ 94. 特殊情形: 全純函数論中的混合問題	421
§ 95. 半平面上的混合問題. М. В. Келдыш 和 Л. И. Седов 公 式	426

第五章 在一般情形下的奇异积分方程. 某些应用

I. 一般情形下的奇异积分方程	430
§ 96. 定义、記号和术语	430
§ 97. 特征方程的求解	435
§ 98. 特征方程的相联方程的求解	440
§ 99. 奇异积分方程 $K\varphi=f$ 的正則化	445
§ 100. 奇异积分方程 $K'\psi=g$ 的正則化	447
§ 101. 經正則化后而得出的方程的研究	448
§ 102. 方程 $K\varphi=f$ 及 $K'\psi=g$ 的求解. 基本定理	457
§ 103. 重要的特殊情形	466
§ 104. 应用于第一类的特征方程	470
§ 105. 第一类方程的正則化和求解	472
§ 106. 研究奇异积分方程的其他方法	474
II. 应用于 Dirichlet 問題及其类似的問題	476
§ 107. 在沿着一条任意形状的弧而割开的面上的 Dirichlet 問題 及其类似的問題	477
§ 108. 化为 Fredholm 方程. 例	483
§ 109. 在沿着有限多条任意形状的弧而割开的面上的 Dirichlet 問題	488
III. 包含未知函数及其复值共轭函数的奇异积分方程	491
§ 110. Fredholm 方程組	492
§ 111. 一个 Fredholm 型积分方程	499
§ 112. 在特征部分之外包含未知函数和它的复值共轭函数的奇异 积分方程	511
IV. 在彈性理論的某些混合問題中的应用	521
§ 113. 平面彈性理論中的基本混合問題的求解	521
§ 114. 薄板弯曲的一个基本混合問題的求解	534
§ 115. 某些估計式	545
V. 关于另一些結果的簡單介紹	552
§ 116. 所允許的函数类的扩大問題	553
§ 117. 某些奇异积分-微分方程	557

第六章 奇异积分方程組和若干个未知函数的联結問題

I. 奇异积分方程組	562
§ 118. 某些記号和术语	562
§ 119. 基本定义和輔助命题	564
§ 120. 奇异积分方程組的正則化. 基本定理	569
II. 若干个未知函数的联結問題	571
§ 121. 輔助命题	571
§ 122. 齐次联結問題	573
§ 123. 归結为奇异积分方程組	575
§ 124. 齐次联結問題的解的某些性质	577
§ 125. 基本解組	579
§ 126. 正規解組和典則解組	582
§ 127. 齐次联結問題的指标	588
§ 128. 齐次联結問題的一般解	590
§ 129. 关于齐次联結問題的解的某些补充說明	592
§ 130. 典則解組之間的联系. 偏指标的不变性	596
§ 131. 相联的齐次联結問題	598
§ 132. 非齐次联結問題	603
§ 133. 用逐次逼近法求解联結問題	606
III. 应用于研究奇异积分方程組	612
§ 134. 用于特征奇异积分方程組的研究	612
§ 135. 特征方程組的相联方程組的研究	617
§ 136. 将联結問題的解应用于奇异积分方程組的正則化	620
§ 137. 关于某些推广和应用的簡單介紹	621
附录 一、光滑曲綫和逐段光滑曲綫	626
二、Cauchy 型积分在角点附近的性质	629
三、关于双正交函数組的一个基本命题	635
四、帶有位移的联結問題	638
五、关于参考文献的一些补充說明	649
六、有限翼展机翼理論中的积分-微分方程的解	650
参考文献	656
索引	680

引 言

1° 最近几年来, 奇异积分方程理論在实际問題中显示出越来越大的作用. 在这一本书中, 我們只討論含有 Cauchy 积分主值的一維^① 奇异积分方程^②.

差不多紧接着 Fredholm 积分方程經典理論的产生, 由 H. Poincaré 及 D. Hilbert 的工作便奠定了这种类型的方程之理論基础. 可是, 奇异积分方程的理論长期一直沒有受到数学家們应有的重視.

但是, 最近几年来, 一維的奇异积分方程理論大大地向前发展了, 并且它現在已經具有了非常完善的形式.

在研究这一理論时, 如果用到一个通常叫做 Riemann 問題或者 Hilbert 問題的, 而我們把它叫做联結問題的边值問題的解, 那么, 这一理論便会变得特別有效.

因此, 在讲解过程中, 我們把奇异积分方程理論与联結問題的边值問題紧密地联系起来.

主要考慮到在数学物理各种問題中的应用, 我們才对出現在所研究的积分方程中的, 或者出現在所討論的問題之边界条件中的已知函数和未知函数, 加以某些限制, 而加这些限制一方面可以大大簡化叙述, 另一方面亦并不会影响到理論的完善性.

Cauchy 型积分是我們研究和求解的基本工具, 在第一章中,

① 我們这里指的是: 积分区域是一維的(曲綫).

② 某些著者用詞“奇特(особый)”來代替詞“奇异(сингулярный)”. 我採用了在習慣上早已用过的詞“奇异(сингулярный)”來表示具有 Cauchy 型核的积分方程(在本书只研究这一类方程); 不过, 就我所知道, 在更一般的意义下, 才用詞“奇特(особый)”, 亦就是, 用它來表示不同于 Fredholm 型的其他任何类型的积分方程.

我們要敘述 Cauchy 型积分的基本理論,另外,我們還要給出某些简单的直接应用.

我让讀者特別注意第一章 §§ 22~26 中的結果,証明这些結果所化費的細致的劳动,使得我們能够相当简单地并且更直接地得出一系列从应用角度来看是重要的新結果.

我們主要在第四、第五章中要用到 §§ 22~26 中的結果. 而在第二、第三、第六章中,如果我們不去注意少数略去而不致于影响到对其余部分的理解的地方,那么我們便可以用不到这些結果. 我建議初学的讀者在第一次学习第二、第三、第六章(这些章本身是相当完整的)时,先可以放过上述这些地方,然后再回过来学习放过的地方.

2: 为了避免过分地增加这一本书的篇幅,我們不准备叙述一系列可以列在本书标题下的极重要的問題.

首先,在此处我們完全不涉及到多維的奇异积分方程理論,虽然,最近几年来,这一种理論已經大大地向前发展了^①^②. 其次,我們亦不談到非綫性方程以及复变函数論中的非綫性边值問題,最近几年来,已有不少重要論文是专题研究这种方程和这种边值問題的. 我們亦不討論具有差分核的积分方程,虽則,这一类方程具有較大的理論价值和实际价值^③.

最近几年来,与所謂广义解析函数有联系的边值問題显示出极重要的作用. 在本书中,我們亦不准备討論这些問題,我們只停留在解析函数的經典理論的範圍以內来討論边值問題. 我們建

① 可以从綜合性論文 В. Д. Купрадэ[1] 及 С. Г. Михлин[7] 中,找到对到 1947 年为止所发表的論文的介紹.

② 最近新出版的 С. Г. Михлин 編写的 Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Москва, 1962 (中譯本已由上海科学技术出版社出版),是专讲多維的奇异算子和奇异积分方程的,在那里可以找到对到 1961 年为止所发表的論文的介紹. ——譯者注

③ 对这一問題有兴趣的讀者可参考 М. Т. Крейн 的論文[1],在那里可以找到有关的文献的介紹;亦可以參看 В. И. Смирнов 的书[4] 卷四.

議，对广义解析函数理論及其應用有興趣的讀者，可以去閱讀 И. И. Векуна 最近寫成的專門著作[13]，在那里可以找到与此有關的十分豐富的文獻。

在書的末尾，單獨地給出了在本書中將要引証的文獻的編目（著者的次序按他們姓名的筆劃或字母排列）。在查閱時，可以根據著者姓名以及他的作品的編號（寫在方括號內）從參考文獻編目中找到有關的文獻。

在很多情況下，當講到在本書中所敘述到的結果的某種應用時，我們將不再引証這些著者的原來的論文，而引証同一位著者後來所寫成的專著或者經過充實後的論文。此外，某些值得注意的結果，如果已經在最常見的書中或者在經過充實後的論文中已敘述到了，則我們將不引証這些結果而只引証這些書和論文。

第一章

Cauchy 型积分的基本性质

I. 一些定义和輔助命題

在这一部分中，我們要給出某些概念的定义和証明一系列簡單的命題，这些概念和命題以后我們經常都要用到。

§ 1. 光滑曲綫和逐段光滑曲綫

以后我們总只討論分布在同一平面上的曲綫。我們將这个平面上的坐标系 Oxy 总是理解为直綫的直角坐标系，我們这样来規定坐标系的方向，使当一个人沿着 Ox 軸来看时， Oy 軸总在他的左边。

与此相应，我們規定平面上角度的正方向是循着反时針方向的，并且当讲到从指定方向来度量角度时，我們总指的是帶有对应的符号的角度。

今后当讲到光滑曲綫时，我們总把这样的曲綫理解为簡單曲綫，亦就是說，它自身并不相交^①。

1° 我們把用下述参数表示法表示的曲綫叫做敞開的光滑弧

① 今后会讲到这个术语的精确的含义。

或者敞開的光滑圍綫^①:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad s_a \leq s \leq s_b, \quad (1.1)$$

其中 s_a 与 s_b 都是有限常数, 而函数 $x(s)$, $y(s)$ 在区間 $[s_a, s_b]$ 上是連續的, 并且滿足下列条件:

I. 它們在区間 $[s_a, s_b]$ 上(包括端点在内)具有連續的一阶导函数 $x'(s)$ 及 $y'(s)$, 这些导函数不同时为零, 且把 $x'(s)$ 及 $y'(s)$ 在区間端点处的值分別理解为 $x'(s_a+0)$, $y'(s_a+0)$ 及 $x'(s_b-0)$, $y'(s_b-0)$.

II. 参数 s 在上述区間上的不同的值对应于不同的点 (x, y) .

第一个条件表明所考虑的弧(我們把它記作 L)是光滑的, 亦就是說, 它的切綫方向是連續变化的(參看后面); 第二个条件表明弧 L 是簡單的和敞開的.

与值 s_a 和 s_b 对应的点 a 和 b 都叫做弧的端点. 根据(1.1), 端点 a 和 b 是属于弧 L 的; 如果需要明确地指出这一点, 我們就說弧 L 是一条閉弧. 如果端点都不属于弧(这种情形常常需要特別加以指出), 我們就說弧 L 是一条开弧.

在每一条所討論的光滑弧上, 我們將选定一个确定的正方向, 亦就是, 和参数 s 增加所对应的方向. 我們通常用 ab 表示具有端点 a 和 b 的弧, 这里字母的次序表示了弧的正方向是从 a 到 b . 我們有时把点 a 与 b 分別叫做弧的起点和終点.

光滑弧 L 显然是可求长的; 因此, 从 L 上某一个定点量起的弧长 s (s 的符号与度量的方向有关) 可以当作参数. 今后我們总是这样做的. 与此对应, 我們可以有

$$[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = 1. \quad (1.2)$$

在这种情况下, 我們把参数 s 叫做弧 L 上的点所对应的弧坐标.

^① “弧(дуга)”及“圍綫(контур)”这两个术语在此处是同义詞; 但是, 我們通常把第一个术语和第二个术语分別应用于敞开曲綫和封閉曲綫的情形.

我們用 $t(s)$ 或者简单地用 t 表示与弧坐标 s 所对应的点, 而 $t(s_0)$, $t(s_1)$, $t(s_2)$ 等等則表示与弧坐标 s_0 , s_1 , s_2 等等所对应的点, 这些点亦可以简单地用 t_0 , t_1 , t_2 等等来表示.

我們总是把曲线 L 的切线理解为正切线, 亦就是, 指沿着 s 增加方向的切线. 如果 θ 表示点 t 处的切线和 Ox 轴之间的夹角, 并且它是从 Ox 轴量起的; 那么, 便有

$$\cos \theta = x'(s), \quad \sin \theta = y'(s). \quad (1.3)$$

这些公式说明, 切线和任一固定方向之间的夹角是随着 s 而连续变化的^①. 反过来, 显然, 如果 θ 是随着 s 而连续变化的, 那么, $x'(s)$ 和 $y'(s)$ 都是 s 的连续函数.

今后, 如果 x 和 y 是点 t 的坐标, 依据我們的写法 $t = x + iy$, 我們通常可以用同一个字母 t 来表示 t 的点附标. 如果点 $t = t(s)$ 的弧坐标是 s , 那么

$$t' = \frac{dt}{ds} = \frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds} = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}, \quad (1.4)$$

其中 θ 如上所示. 显然,

$$|t'| = \left| \frac{dt}{ds} \right| = 1. \quad (1.5)$$

2°. 一条曲线 L , 它如同敞开的光滑弧那样来定义, 所不同的仅在于: 除了值 $s = s_a$ 及 $s = s_b$ 外, 依据 (1.1) 由参数 s 不同的值所对应的点 (x, y) 亦是不同的, 而值 $s = s_a$ 及 $s = s_b$ 則对应于同一个点, 于是 $x(s_b) = x(s_a)$, $y(s_b) = y(s_a)$, 并且还要求 $x'(s_b - 0) = x'(s_a + 0)$, $y'(s_b - 0) = y'(s_a + 0)$, 我們便称 L 是一条封閉的光滑圍綫或者封閉的光滑弧. 在上述两对等式中, 第一对等式表示 L 是封閉的, 而第二对等式則表示, 当切点通过对应于弧坐标为 s_a 及 s_b 的点时, 它的切线方向亦是连续变化的. 我們把后一个点叫

① 角 θ 可以确定到差一个形式为 $2k\pi$ 的項, 其中 k 是一个整数. 但是, 当讲到这个角是连续变化的时, 我們所指的是什么是完全显然的.

做弧坐标的跳跃点；它和圍綫 L 上的其他点没有什么本质的区别，因为它只和选定的参数表示法有关，因此，它显然可以放在圍綫 L 上的任意一个点处。于是，例如，在考虑属于已給的封閉圍綫上的任一条弧 ab 时，我們总可以认为（通常不对这一点再作特别的声明），这一个点已經移到弧 ab 之外，或者已經移到它的一个端点处。

3° 我們把有限条沒有公共点（包括端点在内）的、封閉的或者敞開的光滑圍綫（弧）的全体，叫做光滑曲綫（指的是简单曲綫）。

这样一来，由定义，一条曲綫（甚至它是光滑的）可以由几个互不連接的部分构成，而一条弧或者一条圍綫則仅由一个連續部分构成。

4° 我們把由具有下述性质的、光滑的敞開弧 $a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_{n-1}a_n$ 的一个有限序列所构成的曲綫，叫做简单的逐段光滑弧（或者叫做简单的逐段光滑圍綫）：前一条弧的終点和后一条弧的起点是重合的，并且这些弧，除了上述的点以外，有可能第一条弧的起点 a_1 与最后一条弧的終点 a_n 是重合的，但是，它們不再有别的公共点。如果点 a_n 与点 a_1 不是重合的，那么，逐段光滑弧便是敞開的；在相反的情形下，它便是封閉的。

我們把有限条沒有公共点的、简单的逐段光滑弧（圍綫）的全体叫做简单的逐段光滑曲綫（图 1, a）。这一类曲綫和光滑曲綫的

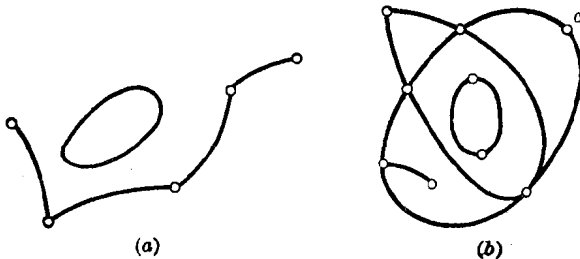


图 1

区别仅在于它可能有(有限个)角点.

最后, 我们把可能有有限个公共点的有限条逐段光滑弧(圍綫)的全体, 叫做逐段光滑曲綫(不再加“简单的”).

5°. 我們总可以认为, 已給的光滑曲綫或者逐段光滑曲綫 L (在剛才給出的定义的意义下), 仅由一些可能除了端点外, 沒有别的公共点的(简单的)、光滑的敞开弧所构成. 在必要时, 为了能做到这一点, 显然只要把构成 L 的一些封閉圍綫及敞开弧分成几个部分就够了(图 1, b).

在今后, 如果不作相反的声明, 我們总可以认为, 逐段光滑曲綫都是这个样子的. 我們通常仅把光滑曲綫的情形, 亦就是, 把由一些沒有公共点的简单的、光滑的封閉圍綫或者敞开弧所构成的曲綫的情形当作例外.

6°. 我們把这样的点叫做逐段光滑曲綫 L 的結点: 它是构成曲綫 L 的一条或者几条光滑弧的端点. 如果已知点只是一条弧的端点, 我們就把这样的点亦叫做曲綫 L 的端点; 这样一来, 根据我們的定义, 曲綫 L 的端点是結点的特殊情形. 角点也是結点的特殊情形, 在角点处有两条光滑弧相遇.

为了方便起见, 根据我們的考虑, 我們可以把曲綫 L 上分布在光滑部分的任何别的点列入結点之内, 因此, 曲綫在已知結点的邻域内可能是光滑的(图 1, b 中的 c 点). 引进这样的补充結点通常可以简化叙述.

我們把曲綫 L 上异于結点的点叫做普通点.

7°. 最后, 我們提醒一下, 依据前面 (1° 段) 所采用的条件, 总可以假定, 在每一条光滑弧(光滑圍綫)上, 都已經选定了确定的正方向. 由构成 L 的个别弧上所选定的这些正方向, 便可以規定出 L 上的正方向.

8°. 最后, 我們約定好, 曲綫 L 的一部分总是指由有限条弧所构成的部分, 而不是指曲綫 L 上任何别的点集.