奇異积分方程

〔苏联〕Н. И. 穆斯海里什維里 著

上海科学技术出版社

奇 异 积 分 方 程

函数論边值問題及其在数学物理中的某些应用

〔苏联〕H. И. 穆斯海里什維里 著
朱 季 訥 譯

上 海 科 学 技 术 出 版 社

內 容 提 要

本书系統地介紹了含有 Cauchy 积分主値的一維奇异积分方程(組)的理論以及函数論中某些边値問題的理論,从 Cauchy 型积分的基本性质談起,討論了在光滑的封閉圍綫和連續系数情形下的奇异积分方程、联結問題、边値問題等,其次再用了相当大的篇幅来介紹了这些理論在流体力学、势論、平面彈性理論以及在数学物理其他分枝中的某些应用.

本书系根据原书 1962 年第二版譯出.

本书的主要对象是数学、力学、物理各专业高年級学生、研究生、教师以及科学工作者. 本书特别可供綜合大学数学系函数論专門化、偏微分方程专門化以及积分方程专門化作为教学用书. 本书对技术科学工作者亦有一定参考价値.

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Граничные Задачи Теории Функций и Некоторые Их Приложения к Математической Физике

Н. И. Мусхелишвили

Физматгиз 第二版, 1962 年

奇 异 积 分 方 程

函数論边値問題及其在数学物理中的某些应用

朱 季 訥 譯

上海科学技术出版社出版 (上海瑞金二路 450 号)

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

商务印书館上海厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32　印張 21 24/32　排版字数 536,000

1966 年 2 月第 1 版　1966 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—2,000

統一书号 13119·678　定价(科六) 3.20 元

目　　录

第二章 在光滑的封閉圍綫和連續系数情形下的联結問題及奇异积分方程

第三章　对一些边值問題的应用

第四章 一般情形下的联結問題．某些应用

第五章　在一般情形下的奇异积分方程．某些应用

第六章 奇异积分方程組和若干个未知函数的联結問題

引　言

1°. 最近几年来,奇异积分方程理論在实际問題中显示出越来越大的作用. 在这一本书中, 我們只討論含有 Cauchy 积分主值的一維① 奇异积分方程②.

差不多紧接着 Fredholm 积分方程經典理論的产生, 由 H. Poincaré 及 D. Hilbert 的工作便奠定了这种类型的方程之理論基础. 可是, 奇异积分方程的理論长期一直沒有受到数学家們应有的重視.

但是,最近几年来,一維的奇异积分方程理論大大地向前发展了,并且它現在已經具有了非常完善的形式.

在研究这一理論时,如果用到一个通常叫做 Riemann 問題或者 Hilbert 問題的,而我們把它叫做联結問題的边值問題的解,那么,这一理論便会变得特別有效.

因此,在讲解过程中,我們把奇异积分方程理論与联結問題的边值問題紧密地联系起来.

主要考虑到在数学物理各种問題中的应用, 我們才对出現在所研究的积分方程中的, 或者出現在所討論的問題之边界条件中的已知函数和未知函数,加以某些限制,而加这些限制一方面可以大大簡化叙述,另一方面亦并不会影响到理論的完善性.

Cauchy 型积分是我們研究和求解的基本工具, 在第一章中,

---

① 我們这里指的是: 积分区域是一維的(曲綫).

② 某些著者用詞"奇特(особый)"来代替詞"奇异 (сингулярный)". 我采用了在习惯上早已用过的詞"奇异 (сингулярный)"来表示具有 Cauchy 型核的积分方程(在本书只研究这一类方程); 不过, 就我所知道, 在更一般的意义下, 才用詞"奇特(особый)", 亦就是, 用它来表示不同于 Fredholm 型的其他任何类型的积分方程.

我們要叙述 Cauchy 型积分的基本理論,另外,我們还要給出某些簡单的直接应用.

我让讀者特別注意第一章§§22~26中的結果,証明这些結果所化費的細致的劳动,使得我們能够相当簡单地并且更直接地得出一系列从应用角度来看是重要的新結果.

我們主要在第四、第五章中要用到§§22~26中的結果.而在第二、第三、第六章中,如果我們不去注意少数略去而不致于影响到对其余部分的理解的地方,那么我們便可以用不到这些結果.我建議初学的讀者在第一次学习第二、第三、第六章(这些章本身是相当完整的)时,先可以放过上述这些地方,然后再回过来学习放过的地方.

2° 为了避免过分地增加这一本书的篇幅,我們不准备叙述一系列可以列在本书标題下的极重要的問題.

首先,在此处我們完全不涉及到多維的奇异积分方程理論,虽然,最近几年来,这一种理論已經大大地向前发展了①②.其次,我們亦不談到非綫性方程以及复变函数論中的非綫性边值問題,最近几年来,已有不少重要論文是专題研究这种方程和这种边值問題的.我們亦不討論具有差分核的积分方程,虽則,这一类方程具有較大的理論价值和实际价值③.

最近几年来,与所謂广义解析函数有联系的边值問題显示出极重要的作用.在本书中,我們亦不准备討論这些問題,我們只停留在解析函数的經典理論的范圍以內来討論边值問題.我們建

① 可以从綜合性論文 В. Д. Купрадзе[1] 及 С. Г. Михлин[7] 中,找到对到1947年为止所发表的論文的介紹.

② 最近新出版的 С. Г. Михлин 編写的 Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Москва, 1962 (中譯本已由上海科学技术出版社出版),是专讲多維的奇异算子和奇异积分方程的,从那里可以找到对到1961年为止所发表的論文的介紹.——譯者注

③ 对这一問題有兴趣的讀者可参考 М. Т. Крейн 的論文[1],在那里可以找到有关的文献的介紹;亦可以参看 В. И. Смирнов 的书[4]卷四.

議，对广义解析函数理論及其应用有兴趣的讀者，可以去閱讀 И. Н. Векуа 最近写成的专門著作[13]，在那里可以找到与此有关的十分丰富的文献．

在书的末尾，单独地給出了在本书中将要引証的文献的編目(著者的次序按他們姓名的笔划或字母排列)．在查閱时，可以根据著者姓名以及他的作品的編号(写在方括号內)从参考文献編目中找到有关的文献．

在很多情况下，当讲到在本书中所叙述到的結果的某种应用时，我們将不再引証这些著者的原来的論文，而引証同一位著者后来所写成的专著或者經过充实后的論文．此外，某些值得注意的結果，如果已經在最常見的书中或者在經过充实后的論文中已叙述到了，則我們将不引証这些結果而只引証这些书和論文．

第一章

Cauchy 型积分的基本性质

I. 一些定义和輔助命題

在这一部分中，我們要給出某些概念的定义和証明一系列簡单的命題，这些概念和命題以后我們經常都要用到.

§1. 光滑曲綫和逐段光滑曲綫

以后我們总只討論分布在同一平面上的曲綫. 我們将这个平面上的坐标系 Oxy 总是理解为直綫的直角坐标系，我們这样来規定坐标系的方向，使当一个人沿着 Ox 軸来看时，Oy 軸总在他的左边.

与此相应，我們規定平面上角度的正方向是循着反时針方向的，并且当讲到从指定方向来度量角度时，我們总指的是带有对应的符号的角度.

今后当讲到光滑曲綫时，我們总把这样的曲綫理解为簡单曲綫，亦就是說，它自身并不相交①.

1°. 我們把用下述参数表示法表示的曲綫叫做敞开的光滑弧

① 今后会讲到这个术語的精确的含义.

或者敞开的光滑圍綫[①]：

$$x=x(s),\quad y=y(s),\quad s_a\leqslant s\leqslant s_b, \tag{1.1}$$

其中 s_a 与 s_b 都是有限常数，而函数 $x(s)$，$y(s)$ 在区間 $[s_a, s_b]$ 上是連續的，并且滿足下列条件：

I. 它們在区間 $[s_a, s_b]$ 上(包括端点在内)具有連續的一阶导函数 $x'(s)$ 及 $y'(s)$，这些导函数不同时为零，且把 $x'(s)$ 及 $y'(s)$ 在区間端点处的值分别理解为 $x'(s_a+0)$，$y'(s_a+0)$ 及 $x'(s_b-0)$，$y'(s_b-0)$.

II. 参数 s 在上述区間上的不同的值对应于不同的点 (x, y).

第一个条件表明所考慮的弧(我們把它記作 L) 是光滑的，亦就是說，它的切綫方向是連續变化的(参看后面)；第二个条件表明弧 L 是簡单的和敞开的.

与值 s_a 和 s_b 对应的点 a 和 b 都叫做弧的端点. 根据(1.1)，端点 a 和 b 是属于弧 L 的；如果需要明确地指出这一点，我們就說弧 L 是一条閉弧. 如果端点都不属于弧(这种情形常常需要特别加以指出)，我們就說弧 L 是一条开弧.

在每一条所討論的光滑弧上，我們将选定一个确定的正方向，亦就是，和参数 s 增加所对应的方向. 我們通常用 ab 表示具有端点 a 和 b 的弧，这里字母的次序表示了弧的正方向是从 a 到 b. 我們有时把点 a 与 b 分别叫做弧的起点和終点.

光滑弧 L 显然是可求长的；因此，从 L 上某一个定点量起的弧长 s (s 的符号与度量的方向有关) 可以当作参数. 今后我們总是这样做的. 与此对应，我們可以有

$$[x'(s)]^2+[y'(s)]^2=1. \tag{1.2}$$

在这种情况下，我們把参数 s 叫做弧 L 上的点所对应的弧坐标.

① "弧(дуга)"及"圍綫(контур)"这两个术語在此处是同义詞；但是，我們通常把第一个术語和第二个术語分别应用于敞开曲綫和封閉曲綫的情形。

我們用 $t(s)$ 或者簡单地用 t 表示与弧坐标 s 所对应的点，而 $t(s_0)$，$t(s_1)$，$t(s_2)$ 等等則表示与弧坐标 s_0, s_1, s_2 等等所对应的点，这些点亦可以簡单地用 t_0, t_1, t_2 等等来表示.

我們总是把曲綫 L 的切綫理解为正切綫，亦就是，指沿着 s 增加方向的切綫. 如果 θ 表示点 t 处的切綫和 Ox 軸之間的夹角，并且它是从 Ox 軸量起的；那么，便有

$$\cos\theta = x'(s), \quad \sin\theta = y'(s). \tag{1.3}$$

这些公式說明，切綫和任一固定方向之間的夹角是随着 s 而連續变化的①. 反过来，显然，如果 θ 是随着 s 而連續变化的，那么，$x'(s)$ 和 $y'(s)$ 都是 s 的連續函数.

今后，如果 x 和 y 是点 t 的坐标，依据我們的写法 $t=x+iy$，我們通常可以用同一个字母 t 来表示 t 的点附标. 如果点 $t=t(s)$ 的弧坐标是 s，那么

$$t' = \frac{dt}{ds} = \frac{dx}{ds} + i\frac{dy}{ds} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}, \tag{1.4}$$

其中 θ 如上所示. 显然，

$$|t'| = \left|\frac{dt}{ds}\right| = 1. \tag{1.5}$$

2° 一条曲綫 L，它如同敞开的光滑弧那样来定义，所不同的仅在于：除了值 $s=s_a$ 及 $s=s_b$ 外，依据 (1.1) 由参数 s 不同的值所对应的点 (x, y) 亦是不同的，而值 $s=s_a$ 及 $s=s_b$ 則对应于同一个点，于是 $x(s_b)=x(s_a)$，$y(s_b)=y(s_a)$，并且还要求 $x'(s_b-0)=x'(s_a+0)$，$y'(s_b-0)=y'(s_a+0)$，我們便称 L 是一条封閉的光滑圍綫或者封閉的光滑弧. 在上述两对等式中，第一对等式表示 L 是封閉的，而第二对等式則表示，当切点通过对应于弧坐标为 s_a 及 s_b 的点时，它的切綫方向亦是連續变化的. 我們把后一个点叫

① 角 θ 可以确定到差一个形式为 $2k\pi$ 的項，其中 k 是一个整数. 但是，当讲到这个角是連續变化的时，我們所指的是什么是完全显然的.

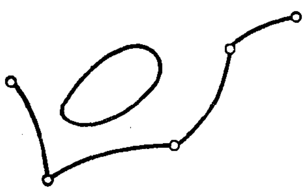
做弧坐标的跳跃点；它和圍綫 L 上的其他点沒有什么本质的区别，因为它只和选定的参数表示法有关，因此，它显然可以放在圍綫 L 上的任意一个点处．于是，例如，在考虑属于已給的封閉圍綫上的任一条弧 ab 时，我們总可以认为（通常不对这一点再作特别的声明），这一个点已經移到弧 ab 之外，或者已經移到它的一个端点处．

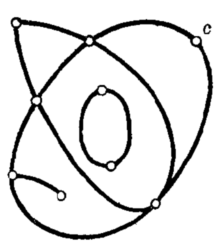
3°. 我們把有限条沒有公共点（包括端点在内）的、封閉的或者敞开的光滑圍綫（弧）的全体，叫做光滑曲綫（指的是簡单曲綫）．

这样一来，由定义，一条曲綫（甚至它是光滑的）可以由几个互不連接的部分构成，而一条弧或者一条圍綫則仅由一个連續部分构成．

4°. 我們把由具有下述性质的、光滑的敞开弧 a_1a_2, a_2a_3, $\cdots$, $a_{n-1}a_n$ 的一个有限序列所构成的曲綫，叫做簡单的逐段光滑弧（或者叫做簡单的逐段光滑圍綫）：前一条弧的終点和后一条弧的起点是重合的，并且这些弧，除了上述的点以外，有可能第一条弧的起点 a_1 与最后一条弧的終点 a_n 是重合的，但是，它們不再有别的公共点．如果点 a_n 与点 a_1 不是重合的，那么，逐段光滑弧便是敞开的；在相反的情形下，它便是封閉的．

我們把有限条沒有公共点的、簡单的逐段光滑弧（圍綫）的全体叫做簡单的逐段光滑曲綫（图 1, a）．这一类曲綫和光滑曲綫的


(a)



(b)

图 1

区别仅在于它可能有(有限个)角点.

最后，我們把可能有有限个公共点的有限条逐段光滑弧(圍綫)的全体，叫做逐段光滑曲綫(不再加“簡单的”).

5°. 我們总可以认为，已給的光滑曲綫或者逐段光滑曲綫 L (在剛才給出的定义的意义下)，仅由一些可能除了端点外，沒有别的公共点的(簡单的)、光滑的敞开弧所构成. 在必要时，为了能做到这一点，显然只要把构成 L 的一些封閉圍綫及敞开弧分成几个部分就够了(图 1, b).

在今后，如果不作相反的声明，我們总可以认为，逐段光滑曲綫都是这个样子的. 我們通常仅把光滑曲綫的情形，亦就是，把由一些沒有公共点的簡单的、光滑的封閉圍綫或者敞开弧所构成的曲綫的情形当作例外.

6°. 我們把这样的点叫做逐段光滑曲綫 L 的結点：它是构成曲綫 L 的一条或者几条光滑弧的端点. 如果已知点只是一条弧的端点，我們就把这样的点亦叫做曲綫 L 的端点；这样一来，根据我們的定义，曲綫 L 的端点是結点的特殊情形. 角点也是結点的特殊情形，在角点处有两条光滑弧相遇.

为了方便起見，根据我們的考虑，我們可以把曲綫 L 上分布在光滑部分的任何别的点列入結点之內，因此，曲綫在已知結点的邻域內可能是光滑的(图 1, b 中的 c 点). 引进这样的补充結点通常可以簡化叙述.

我們把曲綫 L 上异于結点的点叫做普通点.

7°. 最后，我們提醒一下，依据前面 (1° 段)所采用的条件，总可以假定，在每一条光滑弧(光滑圍綫)上，都已經选定了确定的正方向. 由构成 L 的个别弧上所选定的这些正方向，便可以規定出 L 上的正方向.

8°. 最后，我們約定好，曲綫 L 的一部分总是指由有限条弧所构成的部分，而不是指曲綫 L 上任何别的点集.