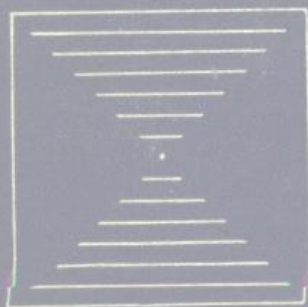


# 数学题解辞典

（第二版）



SHUXUE  
TIJIE  
CIDIAN

上海辞书出版社

R  
51.521  
440

# 数学题解辞典

· 平面解析几何 ·



上海辞书出版社

二八八

D2

一

：

封面设计 江小铎

13

、 数学题解辞典

(平面解析几何)

唐秀颖 主编

上海辞书出版社出版

(上海陕西北路457号)

上海辞书出版社发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 24.5 插页 4 字数 836,000

1983年6月第1版 1983年6月第1次印刷

印数: 1—250,000

统一书号: 17187·91 定价: 2.80元

# 数学题解辞典编辑委员会

顾问 赵宪初

主编 唐秀颖

副主编 鲍志新 夏明德

编辑委员 (以下按姓氏笔画为序)

\*陈振宣 郁 桢 顾鸿达 章景翰 曾 容

主要编写人

陈振宣 赵家镐 闻忻威 贺龙泉 顾正明

计算核对

刘志浩 李大元 沈明哲 顾鸿达 蔡武冈

插图

朱恩源 姜宝坤

责任编辑 唐尚斌

0076/08

---

注: 有 \* 号者为本书责任编辑

## 前 言

随着科学文化事业的发展，广大中等学校数学教师热切希望有一部以题解为中心的、比较系统的、实用的工具书。鉴于建国三十余年来中学数学教学已经积累了比较丰富的实践经验，各种文献资料也提供了众多的题材，这就有可能在总结我国教学实践经验的基础上，广泛吸收各方面的精华，遵照教育部《全日制六年制重点中学数学教学大纲(草案)》的精神，编纂一部比较符合我国国情、门类比较齐全、查阅比较方便的数学题解辞典。为此，我们邀集上海市部分富有教学经验的数学教师编写了这部工具书。

本辞典分代数、三角、平面几何、立体几何、平面解析几何、初等微积分六卷。主要供中等学校数学教师教学、进修时使用，也可供数学爱好者及中等学校学生参考。

编纂本辞典时，力求贯彻下列要求：

1. 重视提高解题的分析能力。释文着重分析解题思路，揭示解题规律，使读者不仅得到简明而准确的解答，而且学会思考问题的方法。

2. 注重题材的广泛性和代表性。选题时，注意筛选收录中外各类数学题解辞典和各种参考资料中富有启发性的题目，我国高等学校历届入学考试和国内外各种数学竞赛中有代表性的试题，以及中学数学范围内传统的著名题，特别是在教学实践中有助于巩固数学概念、富于思考性的自编题。此外，还酌收少量一般教材中常见的典型题。

38142

3. 注意题材归类, 以典型带一般. 题目编排分类清楚, 条理分明, 各类题目选好典型, 加以分析说明, 使读者举一反三, 触类旁通.

由于我们水平有限, 虽经努力, 但上述编纂要求未必都能达到, 选材和释文也可能有疏漏和不当之处, 热诚地欢迎读者批评指正.

数学题解辞典编辑委员会

1982年7月

## 凡 例

1. 本书分坐标法、曲线和方程、直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线、一般二次曲线、高次曲线和超越曲线九章，共收录平面解析几何题目一千二百余道。正文后附录解析几何简史和汉英对照解析几何名词。

2. 题目按学科知识体系的章节分类分组编排。正文前刊有按类组形式编制的目录，正文后附有按题目的条件和结论分类编制的索引，以供检索。

3. 在各章开头用双线相隔的部分，为解题或证题所需要的定理、法则、公式等知识提要，按章节编序，作为解题的依据。

4. 题目解答一般是一题一解，部分题目有其它较好解法的，则一题多解，分别列出。本书中已收录题目的结论，在其它题目中应用时，一般不再重复，只注明“参见第 $\times\times\times$ 题”。

5. 对典型题或较复杂的题目，以[分析]的形式提示解题的关键和思路的分析；另以[说明]的形式标明有关解题规律的总结和题目意义的推广。在典型题后还配置若干相关的题目，以收触类旁通之效。

6. 本书附插图 728 幅，分别附于有关题目下面；同一题中有一幅以上者，分别注明图 1、图 2……。

7. 本书涉及的知识，除第八、九两章外，基本上按照《全日制六年制重点中学数学教学大纲(草案)》的要求；超出大纲要求的知识(在提要中相关序号的左上角用 \* 号标明)以及部分难度较高的题目，仅供教师参考，不宜作为教学要求。

# 目 录

## 第一章 坐标法

§ 1. 直线坐标系(1—8) .....	5
§ 2. 直角坐标系	
(1) 点的坐标(9—31) .....	9
(2) 距离(32—38) .....	25
(3) 分点(39—52) .....	29
(4) 直线的斜率与倾角(53—55) .....	38
(5) 平行、垂直(56—67) .....	39
(6) 面积(68—74) .....	47
(7) 不等量(75—78) .....	53
(8) 三点共线(79—82) .....	54
(9) 其它 (i) 点集(83—85) .....	58
(ii) 格点(86—89) .....	59
(iii) 最大值、最小值(90—95) .....	61
§ 3. 极坐标系(96—102) .....	67
§ 4. 斜坐标系(103—110) .....	71
§ 5. 坐标变换(111—122) .....	76

## 第二章 曲线与方程

§ 1. 曲线的方程	
(1) 求曲线(轨迹)方程的基本方法(123—137) .....	83
(2) 求曲线(轨迹)方程的参数方法(138—170) .....	90
(3) 不同坐标系曲线方程的互化(171—172) .....	110
§ 2. 方程的曲线	



(1) 方程讨论(173—179) .....	111
(2) 描述(180—184) .....	116
§ 3. 两曲线的交点与曲线系	
(1) 两曲线的交点(185—192) .....	118
(2) 曲线系(193—196) .....	124
<b>第三章 直 线</b>	
§ 1. 直线的方程(197—223) .....	131
§ 2. 点线间的距离和离差(224—229) .....	143
§ 3. 两直线的交角(230—232) .....	146
§ 4. 两直线的位置关系	
(1) 平行(233—235) .....	147
(2) 相交与垂直(236—237) .....	149
(3) 重合(238—240) .....	149
§ 5. 直线系(241—253) .....	151
§ 6. 用二次或高次方程表示的直线(254—270) .....	158
§ 7. 图象与区域(271—276) .....	172
§ 8. 平移、旋转、对称变换(277—292) .....	174
§ 9. 最大值、最小值(293—300) .....	182
§ 10. 其它(301—314) .....	186
§ 11. 证明题	
(1) 有关角的证明(包括垂直)(315—321) .....	194
(2) 有关线段的证明(322—332) .....	199
(3) 直线过定点(333—338) .....	207
(4) 共线点、共点线(339—345) .....	211
§ 12. 轨迹题(346—381) .....	216

## 第四章 圆

§ 1. 圆的方程(382—406) .....	243
--------------------------	-----

---

§ 2. 直线与圆、圆与圆的位置关系	
(1) 弦与割线(407—410) .....	255
(2) 切线(411—416) .....	257
(3) 切点弦、极与极线(417—419) .....	260
(4) 公切线(420—423) .....	261
(5) 两圆相切(424—430) .....	264
(6) 两圆相交(包括直交)(431—437) .....	268
§ 3. 圆系(438—449) .....	271
§ 4. 图象与区域(450—455) .....	277
§ 5. 平移、旋转、对称变换(456—459) .....	281
§ 6. 最大值、最小值(460—468) .....	284
§ 7. 其它(469—481) .....	290
§ 8. 证明题	
(1) 有关角的证明(包括垂直)(482—484) .....	298
(2) 有关线段的证明(485—498) .....	300
(3) 共线点、共点线(499—503) .....	308
(4) 共圆点、共点圆(504—505) .....	310
(5) 圆过定点、直线切定圆(506—509) .....	311
(6) 定值问题(510—514) .....	314
(7) 其它(515—520) .....	317
§ 9. 轨迹题(521—589) .....	319

## 第五章 椭 圆

§ 1. 椭圆的方程(590—601) .....	358
§ 2. 直线与椭圆的位置关系	
(1) 弦与割线(602—608) .....	366
(2) 切线与法线(609—616) .....	370
(3) 切点弦、极与极线(617—620) .....	374
(4) 直径与共轭直径(621—623) .....	376

§ 3. 图象与区域(624—632) .....	378
§ 4. 平移、旋转、对称变换(633—636) .....	385
§ 5. 最大值、最小值(637—648) .....	387
§ 6. 其它(649—655) .....	394
§ 7. 证明题	
(1) 有关角或线段之间的关系(656—662) .....	399
(2) 平行、垂直(663—667) .....	403
(3) 定值问题(668—681) .....	406
(4) 相切关系(682—685) .....	416
(5) 四点共圆(686—688) .....	418
(6) 其它(689—695) .....	420
§ 8. 轨迹题(696—732) .....	423

## 第六章 双 曲 线

§ 1. 双曲线的方程(733—745) .....	451
§ 2. 直线与双曲线的位置关系	
(1) 弦与割线(746—749) .....	456
(2) 切线与法线(750—759) .....	459
(3) 切点弦、极与极线(760—762) .....	464
(4) 直径与共轭直径(763—766) .....	465
(5) 渐近线(767—769) .....	468
§ 3. 共焦点的有心锥线系(770—772) .....	470
§ 4. 以坐标轴为渐近线的等轴双曲线(773—776) .....	471
§ 5. 图象与区域(777—782) .....	473
§ 6. 平移、旋转、对称变换(783—786) .....	475
§ 7. 最大值、最小值(787—791) .....	478
§ 8. 其它(792—797) .....	480
§ 9. 证明题	

(1) 有关角或线段之间的关系(798—811) .....	484
(2) 平行、垂直(812—819) .....	493
(3) 定值问题(820—827) .....	498
(4) 相切关系(828—830) .....	502
(5) 四点共圆(831—835) .....	504
(6) 其它(836—844) .....	506
§ 10. 轨迹题(845—872) .....	512

## 第七章 抛物线

§ 1. 抛物线的方程(873—884) .....	532
§ 2. 直线与抛物线的位置关系	
(1) 弦与割线(885—889) .....	538
(2) 切线与法线(890—901) .....	541
(3) 切点弦、极与极线(902—905) .....	547
(4) 直径(906—908) .....	548
§ 3. 共焦点的抛物线系(909—911) .....	549
§ 4. 图象与区域(912—917) .....	551
§ 5. 平移、旋转、对称变换(918—927) .....	554
§ 6. 最大值、最小值(928—939) .....	560
§ 7. 其它(940—961) .....	569
§ 8. 证明题	
(1) 有关角或线段之间的关系(962—975) .....	586
(2) 平行、垂直(976—982) .....	595
(3) 定值问题(983—987) .....	598
(4) 相切关系(988—991) .....	601
(5) 四点共圆(992—993) .....	603
(6) 其它(994—1009) .....	605
§ 9. 轨迹题(1010—1048) .....	614

## 第八章 一般二次曲线

§ 1. 一般二次曲线方程及其化简(1049—1060)	640
§ 2. 直线与一般二次曲线的关系	
(1) 弦与割线(1061—1064)	647
(2) 切线与法线(1065—1071)	649
(3) 切点弦、极与极线(1072—1076)	653
(4) 直径与共轭直径(1077—1080)	656
(5) 渐近线(1081—1083)	658
§ 3. 二次曲线系(1084—1098)	660
§ 4. 图象、区域与作图(1099—1108)	667
§ 5. 最大值、最小值(1109—1111)	672
§ 6. 证明题	
(1) 有关线段或角之间的关系(1112—1117)	674
(2) 定值问题(1118—1126)	679
(3) 其它(1127—1137)	685
§ 7. 轨迹题(1138—1159)	695

## 第九章 高次曲线、超越曲线

§ 1. 高次曲线(1160—1170)	709
§ 2. 超越曲线(1171—1181)	717
§ 3. 螺线(1182—1189)	728
§ 4. 复平面上点的轨迹(1190—1195)	732
§ 5. 最大值、最小值(1196—1198)	736
§ 6. 其它(1199—1205)	739
题目分类索引	745
附录	
解析几何简史	758
汉英对照解析几何名词	767

## 第一章 坐标法

通过建立坐标系，把几何的基本对象(点)和代数的基本对象(数)联系起来，进而使作为动点轨迹的曲线和方程联系起来，为将平面图形问题转化为有关点的坐标的代数问题来研究，创造了条件。平面解析几何就是从这一基本观念出发，用代数方法研究平面图形性质的一门科学。

---

---

### 1. 直线坐标系

设点  $A$ 、 $B$  的坐标分别为  $A(x_A)$ 、 $B(x_B)$ ；点  $P(x_P)$  是分  $AB$  为定比  $\lambda = AP:PB$  的分点。

(1) 有向线段  $AB$  的数量：

$$AB = x_B - x_A. \quad (1.11)$$

(2)  $A$ 、 $B$  两点间的距离：

$$|AB| = |x_B - x_A|. \quad (1.12)$$

(3) 定比分点  $P$  的坐标：

$$x_P = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda} \quad (\lambda \neq -1). \quad (1.13)$$

### 2. 平面直角坐标系

设平面上点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的坐标分别为  $A(x_A, y_A)$ 、 $B(x_B, y_B)$ 、 $C(x_C, y_C)$ ；点  $A$ 、 $B$  在  $x$  轴、 $y$  轴上的射影分别为  $A_x$ 、 $B_x$ 、 $A_y$ 、 $B_y$ 。把有向线段  $AB$  看作向量， $\overrightarrow{AB}$  在  $Ox$  轴上的射影为  $\overrightarrow{A_x B_x}$ ，

射影  $\overrightarrow{A_x B_x}$  的值  $A_x B_x$  记作  $(\overrightarrow{AB})_{Ox}$ ,  $\overrightarrow{A_x B_x} = (\overrightarrow{AB})_{Ox} \vec{e}_1$  ( $\vec{e}_1$  为  $Ox$  轴上的单位向量);  $\overrightarrow{AB}$  在  $Oy$  轴上射影  $\overrightarrow{A_y B_y}$  的值  $A_y B_y$  记作  $(\overrightarrow{AB})_{Oy}$ ,  $\overrightarrow{A_y B_y} = (\overrightarrow{AB})_{Oy} \vec{e}_2$  ( $\vec{e}_2$  为  $Oy$  轴上的单位向量).  $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})$  表示以  $Ox$  为始边,  $\overrightarrow{AB}$  为终边的有向角, 即  $\overrightarrow{AB}$  的幅角.  $\overrightarrow{AB}$  的模记作  $|\overrightarrow{AB}|$  或  $|AB|$ .

设  $\alpha$  为直线  $AB$  的倾角,  $k_{AB}$  为直线  $AB$  的斜率; 点  $P(x_P, y_P)$  是分  $AB$  为定比  $\lambda = \frac{AP}{PB}$  的分点.

(1) 向量  $\overrightarrow{AB}$  在坐标轴上射影的值(见第 9 题):

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB})_{Ox} &= x_B - x_A = |AB| \cos(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB}), \\ (\overrightarrow{AB})_{Oy} &= y_B - y_A = |AB| \sin(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB}). \end{aligned} \quad (1.21)$$

(2)  $A, B$  两点之间的距离:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}. \quad (1.22)$$

(3)  $A, B$  两点连线的斜率:

$$k_{AB} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \left( \alpha \neq \frac{\pi}{2}, x_A \neq x_B \right). \quad (1.23)$$

(4) 定比分点  $P$  的坐标:

$$x_P = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y_P = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda} \quad (\lambda \neq -1). \quad (1.24)$$

当  $\lambda > 0$  时,  $P$  为  $AB$  的内分点; 当  $\lambda < 0$  时,  $P$  为  $AB$  的外分点; 当  $\lambda = 1$  时,  $P$  为  $AB$  的中点, 其坐标为

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_P = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

(5) 三角形  $ABC$  的面积:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}. \quad (1.25)$$

(6) 存在斜率的两直线互相平行的充要条件: 两直线的斜率

相等,即

$$k_1 = k_2. \quad (1.26)$$

(7) 存在斜率的两直线互相垂直的充要条件: 两直线的斜率之积等于  $-1$ , 即

$$k_1 \cdot k_2 = -1. \quad (1.27)$$

### 3. 平面极坐标系

设点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的极坐标分别为:  $A(\rho_1, \theta_1)$ 、 $B(\rho_2, \theta_2)$ 、 $C(\rho_3, \theta_3)$ . 在极点与原点重合, 极轴与  $x$  轴正半轴重合的条件下, 点  $P$  的极坐标为  $(\rho, \theta)$ , 直角坐标为  $(x, y)$ .

(1) 极坐标与直角坐标的关系:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0). \end{cases} \quad (1.31)$$

(2)  $A$ 、 $B$  两点的距离:

$$|AB| = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (1.32)$$

(3) 三角形  $ABC$  的面积(见第 101 题):

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} & |\rho_1\rho_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + \rho_2\rho_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) \\ & + \rho_3\rho_1 \sin(\theta_1 - \theta_3)|. \end{aligned} \quad (1.33)$$

(4)  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点共线的充要条件(见第 98 题):

$$\frac{\sin(\theta_2 - \theta_3)}{\rho_1} + \frac{\sin(\theta_3 - \theta_1)}{\rho_2} + \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\rho_3} = 0$$

$$(\rho_1\rho_2\rho_3 \neq 0). \quad (1.34)$$

### \*4. 平面斜坐标系

设斜坐标轴的夹角为  $\omega$ ,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点的斜坐标分别为  $A(x_A, y_A)$ 、 $B(x_B, y_B)$ 、 $C(x_C, y_C)$ , 线段  $AB$  的定比  $(\lambda = \frac{AP}{PB})$  分点为  $P(x_P, y_P)$ .



(1)  $A, B$  两点间的距离:

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + 2(x_A - x_B)(y_A - y_B)\cos\omega}. \quad (1.41)$$

(2) 定比分点  $P$  的坐标:

$$x_P = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y_P = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda} \quad (\lambda \neq -1). \quad (1.42)$$

当  $\lambda=1$  时,  $P$  为  $AB$  的中点, 其坐标为

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_P = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

(3) 三角形  $ABC$  的面积(见第 107 题):

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \sin\omega \text{ 的绝对值}. \quad (1.43)$$

## 5. 坐标变换

设点  $P$  原来的坐标为  $(x, y)$ , 变换后的坐标为  $(x', y')$ .  $(x_0, y_0)$  为新原点的坐标,  $\theta$  为坐标轴旋转过的角.

(1) 平移:

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0. \end{cases} \quad (1.51)$$

(2) 旋转:

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x \cos\theta + y \sin\theta \\ y' = -x \sin\theta + y \cos\theta. \end{cases} \quad (1.52)$$

(3) 一般变换:

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta + x_0 \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta + y_0. \end{cases} \quad (1.53)$$