

高等学校教学用书



彈性与塑性理論习题集

TANXING YU SUXING LILUN XITIJ

尼·伊·別祖霍夫著

055

58

人民教育出版社

高等學校教學用書



彈性與塑性理論習題集

TANXING YU SUXING LILUN XITIJIF

尼·伊·別祖寧夫著

合肥工業大學材料力學教研組譯

人民教育出版社

本书系根据苏联国立技术理论书籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的尼·伊·别祖霍夫(Н. И. Везулов)著“弹性与塑性理论习题集”(Сборник задач по теории упругости и пластичности)1957年版译出。原书经苏联高等教育部审定作为高等工业学校教学参考书。

本书共分五章：第一章是关于连续体力学的基本方程方面；第二章和第三章是关于弹性理论方面；第四章和第五章是关于塑性理论方面。书中习题的数量比较多，其中一部分是课程的课题，另一部分为各种工程技术中的实际问题；大部分的习题都附有解、提示和答案；在每章之前有一些参考知识、主要公式等等。本书可作为土建、机械等方面专业的教学参考书。

弹性与塑性理论习题集

尼·伊·别祖霍夫著

合肥工业大学材料力学教研组译

人民教育出版社出版

(北京市书刊出版业营业登记证出字第2号)

人民教育印刷厂印装

新华书店科技发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 15010·971 开本 850×1168 1/32 印张 7 1/16
字数 188,000 印数 00001—10,000 定价(7) 0.85
1960年12月第1版 1960年12月北京第1次印刷

序

本习题集系根据高等工业学校弹性与塑性理论课程现行的教学大纲编写而成。

作者编写习题集时，考虑到两个目的：第一，使学生能独立检查他们所获得的理论知识，并获得将这些理论知识应用到工程实践中具体问题上的技能；第二，帮助教员不仅能在课堂组织和进行习题课，而且能在课外选择给同学独立解决的习题。

那些可以被推荐作为课外检查性作业的习题（课程作业题，计算画图作业），用带有字母的号码标明（例如 91^a）；它们是同一类型、同样复杂的，并且给出一定的数量，以供学习小组使用。这样划分，正如在高等工业学校、特别是在函授学院中教学法工作的经验所证明，大大减轻了教师发给上述检查性习题的组织工作。

习题集中也有数量不多的一些习题，在内容上部分地超出了教学大纲的范围；它们可供对弹性及塑性理论问题表现有特殊兴趣的学生作为课堂讨论和独立进行的工作。这些习题在本书中用星号标明。

本习题集中的题目取自工程实际的各个方面，例如建筑方面、机械方面、工艺方面、其目的是为了使这习题集对上述专业的高等学校有所裨益；这也就部分地说明了为什么在本习题集中题目比较多的原因。

为了统一符号，也为了毫无疑问的便利起见，在习题集中有一些参考资料、主要公式等等，每一章的前面附有理论概述。

部分的习题引自各种参考书（这些引文出处用括号内的号码表示，这些号码与列于书末的原始著作的序号相对应），其余是作者根据个人教学经验而编写的。

最后，作者衷心地感謝所有对編写这本习题集給予帮助的人。作者特別感謝 I. M. 卡恰諾夫和 B. B. 索科洛夫斯基，他們对原稿提出很多极有价值的批評和建議。

作者

常用符号

x, y, z ——未变形状态物体中点的直角坐标;

r, θ, z ——未变形状态物体中点的圆柱坐标;

u, v, w ——物体中被研究点的实际位移在不动坐标轴(x, y, z)上的投影; 在圆柱坐标的情形中相应为: u ——在半径上的投影, v ——在切线方向的投影, w ——在旋转体 z 轴上的投影;

u_r, u_θ, u_z ——点的实际位移在圆柱坐标中的另一种标号;

p_n ——一点中具有外法线 n 的截面上的总应力;

p_{xv}, p_{yv}, p_{zv} ——总应力 p_v 在坐标轴(x, y, z)上的投影;

$$p_v^2 = p_{xv}^2 + p_{yv}^2 + p_{zv}^2;$$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ——平行于坐标轴 x, y, z 并作用在由已知点引出的, 外法线分别平行于 x, y, z 轴的三个互相正交截面上的正应力;

τ_{xy}, τ_{xz} ——平行于 x 轴方向并作用在法线沿 y 轴或 z 轴的截面上的剪应力;

τ_{yx}, τ_{yz} ——平行于 y 轴方向并作用在法线沿 x 轴或 z 轴的截面上的剪应力;

τ_{zx}, τ_{zy} ——平行于 z 轴方向并作用在法线沿 x 轴或 y 轴的截面上的剪应力;

$T_n = \begin{pmatrix} \sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z \end{pmatrix}$ ——已知点的应力张量, 即作用在三个互相正交截面上的应力分量总合;

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ——已知点的主应力, 即在沒有剪应力的截面上的正应力, 并且 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$;

$\tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ ——主剪应力; 作用在平分主应力 σ_1 和 σ_2 平面間二面角的截面上*;

$\tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$ ——主剪应力; 作用在平分 σ_2 和 σ_3 方向的截面上;

* 此处和下面对主剪应力的脚标是规定的, 它不与这些应力的方向和作用着这些应力的截面上的法线相联系(正如对应力张量分量的规定一样)。其他的作者(参阅 B. B. 索科洛夫斯基[6]), 采用免去上述规定的其他标号, 例如 τ_1, τ_2, τ_3 。

$\tau_{31} = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$ ——主应力;作用在平分 σ_3 和 σ_1 方向的截面上;

$\sigma_{cp} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ ——平均应力,它也是在八面体平面上,即在通过所研究的点与主平面等角斜交的截面上的正应力;

$\tau_{0.88} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$ ——八面体面上的剪应力;

$\sigma_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\tau_{0.88}$ ——应力强度(或者说为换算应力,计算应力);

$\sigma^I, \sigma^{II}, \sigma^{III}$ ——应力张量不变量(第一,第二,第三);不由坐标系的选择而决定的应力状态特征;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ——沿 x, y, z 轴方向的相对伸长(在直角坐标中)(第一类变形);

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ——相对剪切(在直角坐标中)(第二类变形);脚标表示相应的剪切所投影的坐标平面;

$2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{zx}$ ——相对剪切的另一种标号;

$T_{x_{0.88}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx}, \varepsilon_y, \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{zy}, \varepsilon_z \end{pmatrix}$ ——变形张量,即已知点附近无限小体积(平行六面体形状)的变形分量总和;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ——已知点的主伸长;

$\gamma_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$ ——已知点的最大剪切;

$\varepsilon_{cp} = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ ——平均伸长(八面体的),即在垂直于八面体面方向的伸长;

$\tau_{0.88} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$ ——八面体的剪切,即变形过程

中,作用有应力 $\tau_{0.88}$ 的截面间直二面角的变化;

$\theta = 3\varepsilon_{cp}$ ——单位体积变形;

$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{0.88}$ ——变形强度;

$\varepsilon^I, \varepsilon^{II}, \varepsilon^{III}$ ——变形张量的不变量(第一,第二,第三),不由坐标系的选择而决定的变形状态特征;

E, G ——第一种弹性模数(杨氏模数)和第二种弹性模数(剪切模数);

μ ——泊松系数;

$$\lambda = \frac{2\mu G}{1-2\mu} \text{——拉梅常数;}$$

$$\left. \begin{aligned} l &= \cos(x, \nu) \\ m &= \cos(y, \nu) \\ n &= \cos(z, \nu) \end{aligned} \right\} \text{——方向余弦;}$$

$$\nabla^2(\quad) = \frac{\partial^2(\quad)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\quad)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\quad)}{\partial z^2} \text{——第二种拉普拉斯算式——对函数}(\quad)\text{的第}$$

二种拉普拉斯运算标号。

目 录

序.....	v
常用符号.....	vii
第一章 連續体力学的基本方程.....	1
理論概述.....	1
§ 1.1. 边界条件的确定.....	5
§ 1.2. 一点的应力状态研究.....	10
§ 1.3. 已知点附近变形的研究.....	17
§ 1.4. 平衡微分方程的运用(最簡單情形).....	17
§ 1.5. 几何方程的运用.....	24
§ 1.6. 从連續体力学方程的立場对材料力学初等解的評價.....	28
第二章 彈性理論.....	34
理論概述.....	34
§ 2.1. 已知点附近的物理状态.....	40
§ 2.2. 一般問題·彈性位移,彈性变形和彈性应力的一些性質.....	43
§ 2.3. 直角坐标中彈性理論的平面問題.....	46
§ 2.4. 极坐标中彈性理論的平面問題.....	54
§ 2.5. 軸对称和极对称变形.....	63
§ 2.6. 彈性半空間 接触問題.....	78
§ 2.7. 杆的扭轉.....	83
§ 2.8. 杆的弯曲.....	91
§ 2.9. 热应力.....	91
§ 2.10. 初应力.....	96
第三章 彈性理論中的近似解.....	100
理論概述.....	100
§ 3.1. 中等厚度的矩形板(靜力橫向弯曲).....	104
§ 3.2. 圓板(极对称弯曲).....	111
§ 3.3. 薄壁旋轉壳体的軸对称变形.....	122
§ 3.4. 稳定問題(板的稳定,平面弯曲形式的稳定).....	125
§ 3.5. 板的自由振动和强迫振动.....	132
§ 3.6. 薄壁杆件的振动.....	137

§ 3.7. 杆和壳的稳定和动力学的混合问题	141
第四章 塑性理论	145
理论概述	145
§ 4.1. 塑性条件的特殊情形	149
§ 4.2. 杆件拉伸和压缩时的弹性-塑性变形	152
§ 4.3. 静定梁的弯曲·理想塑性材料的情形	159
§ 4.4. 弯曲·应力与变形为幂数关系的情形	166
§ 4.5. 级(“弹性解”法·梁的弹性-塑性弯曲理论)	169
§ 4.6. 环和管的弹性-塑性轴对称变形	175
§ 4.7. 塑性理论中的平面问题	183
§ 4.8. 杆的弹性-塑性自由扭转	186
§ 4.9. 塑性体锻造时的流展性	196
第五章 塑性理论中的近似解	202
理论概述	202
§ 5.1. 近似平衡方程和近似塑性条件	202
§ 5.2. 静不定梁和刚架的承载能力	210
§ 5.3. 弯曲板的承载能力	218
引用书刊和原始著作	223

第一章 連續体力学的基本方程

理論概述

1. 受已知荷载作用的物体中, 一点的应力状态用应力張量确定(参阅第vii頁符号)。通过已知点的任意斜截面(相对于坐标軸而言)上的总应力在坐标軸(x, y, z)上的投影可写为:

$$\left. \begin{aligned} p_{x\nu} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ p_{y\nu} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ p_{z\nu} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n, \end{aligned} \right\} \quad (1.01)$$

而在斜截面法綫上的投影(即正应力 σ_ν) 和另一在斜截面本身上的投影(即剪应力 τ_ν) 等于:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\nu &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl, \\ \tau_\nu^2 &= p_\nu^2 - \sigma_\nu^2, \end{aligned} \right\} \quad (1.02)$$

式中 $p_\nu^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ 。

2. 受已知荷载作用的物体中, 一点的主应力($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)可由下列三次方程的根确定:

$$\sigma^3 - \sigma^2 \sigma^I + \sigma \sigma^{II} - \sigma^{III} = 0, \quad (1.03)$$

式中方程式的系数(应力張量不变量)

$$\left. \begin{aligned} \sigma^I &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ \sigma^{II} &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ \sigma^{III} &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.04)$$

三次方程解的正确性可以用由方程式系数不变性导出的关系加以检查

$$\sigma^I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \sigma^{II} = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \sigma^{III} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

在与主平面等角斜交的截面(八面体的面)上, 具有应力:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{OKT}} &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \\ \tau_{\text{OKT}} &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.05)$$

或以應力張量的分量表示:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{OKT}} &= \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \\ \tau_{\text{OKT}} &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.06)$$

八面體剪應力可用剪應力的相應最大值表示,可寫為:

$$\tau_{\text{OKT}} = \frac{2}{3}\sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2},$$

$$\text{式中 } \tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{31} = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}. \quad (1.07)$$

已知點的最大和最小剪應力相應為:

$$\tau_{\text{max}} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

3. 在直角坐標系中, 無限小平行六面體形單元體的平衡(運動)微分方程可寫為:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X\rho &= 0 \text{ (或 } \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}), \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y\rho &= 0 \text{ (或 } \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}), \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z\rho &= 0 \text{ (或 } \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}), \end{aligned} \right\} \quad (1.08)$$

(在其他的坐標系中, 平衡微分方程具有其他的形式, 即 (1.16) 或 (1.17))。

將下列在靜力和動力問題中始終不變的關係式列入以上方程中:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

4. 在已知點附近的變形狀態可用變形張量確定(參閱第 viii 頁標

号)。

变形理論中所有必要的公式都可写成相似于应力理論中的相应公式。

例如,通过已知点,具有方向余弦 l, m, n 的任一綫段的相对伸长可用同一点的六个变形分量写成下列形式:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + 2\varepsilon_{xy} lm + 2\varepsilon_{yz} mn + \varepsilon_{zx} nl, \quad (1.09)$$

即与法綫为 ν 的面上的正应力公式相似。

一点的主伸长可用下列方程确定:

$$\varepsilon^3 - \varepsilon^2 \varepsilon^I + \varepsilon \varepsilon^I - \varepsilon^{\text{III}} = 0, \quad (1.10)$$

式中变形張量不变量

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^I &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad \varepsilon^{\text{II}} = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{zx}^2, \\ \varepsilon^{\text{III}} &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + 2\varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zx} - \varepsilon_x \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_y \varepsilon_{zx}^2 - \varepsilon_z \varepsilon_{xy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

与八面体的面相垂直的方向的伸长和八面体的剪变形为:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\text{окт}} &= \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \\ \gamma_{\text{окт}} &= \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

5. 在直角坐标系中,变形分量用位移分量表示为:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

(在其他的坐标系中,微分方程具有其他的形式,参阅(1.18)或(1.19))。

6. 变形分量由变形諧調条件或变形連續条件联系:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \cdot \partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \cdot \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \cdot \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

7. 在圓柱坐标系 $r\theta z$ 中, 平衡微分方程具有下列形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

在球面坐标系 $r\theta\varphi$ 中, 平衡方程写为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [2\sigma_r - (\sigma_\theta + \sigma_\varphi) + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta] &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3\tau_{\theta r} + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta] &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3\tau_{\varphi r} + 2\tau_{\varphi\theta} \operatorname{ctg} \theta] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

8. 在圓柱坐标系 $r\theta z$ 中, 变形分量用位移分量 u, v, w (u_r, u_θ, u_z) 表示为下列形式:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{zr} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}; \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

在球面坐标系 $r\theta\varphi$ 中, 变形分量用位移分量 u, v, w (u_r, u_θ, u_φ) 表示为:

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \gamma_{\theta r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}, \\
 \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{r} + \frac{u_r}{r}, \\
 \gamma_{\varphi r} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}
 \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

§ 1.1. 边界条件的确定

1. 图 1 上表示出矩形长条支座截面的一些不同固定方法，长条承受横向弯曲 (xy 平面为弯曲平面)。

如果利用平面截面假设 (参阅材料力学)，应认为所有表示出的固定形式彼此相当，而所有图示梁的挠度相同。实际上并非如此。试写出各种不同固定方法的变位边界条件。

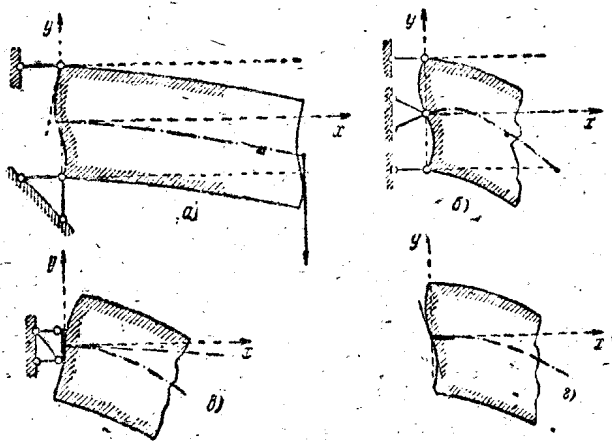


图 1.

答：根据图 a) $x=0$, $y=\frac{h}{2}$, $u=0$,

$$x=0, \quad y=-\frac{h}{2}, \quad u=v=0;$$

根据图 6) $x=0, y=0, u=v=0,$

$$x=0, y=\frac{h}{2}, u=0,$$

$$x=0, y=-\frac{h}{2}, u=0;$$

根据图 8) $x=0, y=0, \frac{\partial u}{\partial y}=0, u=v=0,$

根据图 4) $x=0, y=0, u=v=0, \frac{\partial v}{\partial x}=0.$

2. 承受扭矩作用的薄壁截面杆(图 2), 一端固定抵抗扭轉。試写出变位边界条件, 假定固定处的截面能够翘曲, 但不論在固定处或在所有其他的截面中, 横截面周边不变形。

答: 当 $s=0$ 时, $u=v=0, w \neq 0$ (翘曲)。

对于任意横截面 $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$, 即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

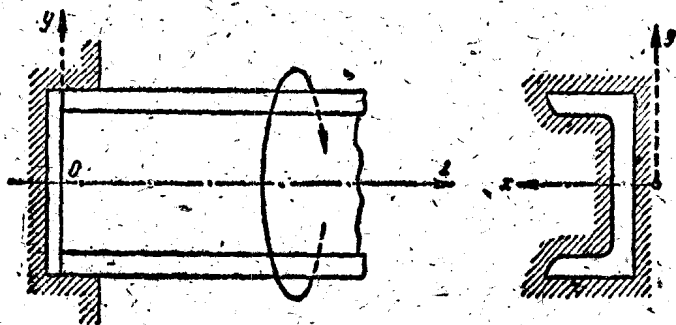


图 2.

3. 試利用表面条件(1.01)証明, 当变截面杆軸向拉伸时(图 3), 在横截面內除去在材料力学中所計算出的正应力(σ_x)外, 在同一截面上必然也应有剪应力(τ_{xs}), 而在平行于杆軸的截面上同样存在有正应力(σ_s)。試确定在靠近杆的外表面处, 横截面上正应力和另外的上述在材料力学中通常被忽略的应力之間的关系。假定杆的横截面形状为狭

长矩形。

答: $\tau_{xz} = \sigma_z \operatorname{tg}(x\nu)$, $\sigma_x = \sigma_z \operatorname{tg}^2(x, \nu)$ 。

4. 在物体的某些部分, 其外表面没有荷载。在已知点中, 上述表面的法线相对于坐标轴 (x, y, z) 的方向余弦 l, m, n 为已知。试写出物体该点的表面条件。

试确定一点的正应力和剪应力之间的关系, 该点系在物体没有荷载的外表面上。

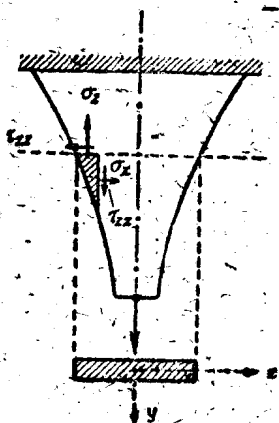


图 3.

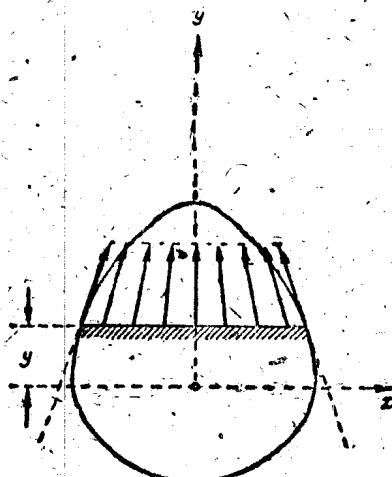
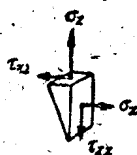


图 4.

答:

$$\sigma_x = -\frac{1}{l}(\tau_{xy}m + \tau_{xz}n),$$

$$\sigma_y = -\frac{1}{m}(\tau_{yx}l + \tau_{yz}n),$$

$$\sigma_z = -\frac{1}{n}(\tau_{zx}l + \tau_{zy}m).$$

5. 如所周知, 在材料力学中, 当横向弯曲时剪应力的著名的 Л. И. 茹拉夫斯基公式, 即 $\tau = \frac{QS}{Jb}$ 是假定剪应力沿梁宽, 即垂直于弯曲平面的方向为均匀分布。但是这样的假定在非矩形截面的情形下, 在杆的外表面上与平衡条件发生矛盾, 所以, 认为茹拉夫斯基公式是表示剪应力垂直投影的; 剪应力的方向在截面周边采取沿周边的切线(图 4)并